Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Mateja Pinjuh

STATIČKI NEODREĐENI MEHANIZMI

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2026.

University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Mateja Pinjuh

STATICALLY INDETERMINATE MECHANISMS

FINAL EXAM

Supervisor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2026.

ZAHVALE

Zahvaljujem svom mentoru, prof. dr. sc. Krešimiru Freslu, na stručnom vodstvu, strpljenju, vremenu i trudu uloženom u izradu ovog završnog rada te na znanju koje mi je prenio tijekom njegove izrade.

Posebno zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na neizmjernoj podršci i motivaciji tijekom cijelog studiranja.

SAŽETAK

U radu se razmatraju statički neodređeni mehanizmi, sistemi koji su istodobno geometrijski promjenjivi i statički neodređeni. Takve sisteme Maxwellovo pravilo ne prepoznaje, jer prebrojavanjem štapova i čvorova daje samo razliku broja stanja unutarnje ravnoteže i broja mehanizama. Na nizu prstenastih sistema pokazuje se kako njihovo ponašanje ovisi o broju stranica i simetriji prstena. Kao završni primjer razmatra se drveni osmerokut katedrale u Elyju.

Ključne riječi: statički neodređeni mehanizam; stanje unutarnje ravnoteže; Maxwellovo pravilo; simetrija; osmerokut katedrale u Elyju

SUMMARY

This thesis examines statically indeterminate mechanisms, systems that are simultaneously geometrically variable and statically indeterminate. Maxwell's rule fails to identify such systems, since counting bars and nodes yields only the difference between the number of states of internal equilibrium and the number of mechanisms. Through a series of ring systems, it is shown how their behaviour depends on the number of sides and on the symmetry of the ring. The timber octagon of Ely Cathedral is considered as a concluding example.

Key words: statically indeterminate mechanism; state of internal equilibrium; Maxwell's rule; symmetry; timber octagon of Ely Cathedral

SADRŽAJ

ZAHVALE (NEOBAVEZNO) i
SAŽETAK ii
SUMMARY iii
1. Uvod 1
2. Osmerokut katedrale u Elyju 2
3. Maxwellovo pravilo 6
4. Statički neodređeni mehanizam 8
4.1. Pomaci mehanizama 10
4.2. Pomaci u statički određenom sistemu 12
4.3. Opterećenje parom sila na mjestu uklonjenoga štapa 14
5. Simetrični četverokutni sistem s kosim pravcima gibanja čvorova 18
5.1. Pomaci mehanizma 19
5.2. Stanje unutarnje ravnoteže 21
5.3. Ravnoteža za vanjsko opterećenje koje se može uravnotežiti 22
5.4. Grafički postupak uravnoteženja simetričnog opterećenja 24
6. Trokut 26
6.1. Nepostojanje mehanizma 27
6.2. Nepostojanje stanja unutarnje ravnoteže 28
6.3. Usporedba s četverokutom 28
7. Paran i neparan broj stranica prstena 29
8. Četverokutni sistem s jednom osi simetrije 30
8.1. Pomaci mehanizma 31
8.2. Stanje unutarnje ravnoteže 35
9. Nesimetrični četverokutni sistem 36
9.1. Nepostojanje pomaka 36
9.2. Usporedba sa simetričnim slučajevima 39
10. Osmerokut 40
10.1. Pomaci mehanizma 41
10.2. Stanje unutarnje ravnoteže 42
10.3. Osmerokut katedrale u Elyju 43
11. Zaključak 44
POPIS LITERATURE 45
POPIS SLIKA 46

1. UVOD

Tema su ovoga završnog rada statički neodređeni mehanizmi, konstrukcije koje su istodobno statički neodređene i pomične. Riječ je o naizgled proturječnome spoju: konstrukcija ima više veza nego što je potrebno za uravnoteženje sustava vanjskih sila, a ipak se može gibati bez deformacije svojih dijelova. Upravo takav slučaj klasično Maxwellovo pravilo [1], kojim se određenost rešetke procjenjuje pukim prebrojavanjem štapova, čvorova i veza, ne uspijeva prepoznati. Maxwellovo prebrojavanje otkriva samo razliku između broja stanja unutarnje ravnoteže i broja mehanizama, pa konstrukcija koja je istodobno neodređena i pomična u brojanju izgleda određeno.

Da bi se ta dva svojstva razdvojila, treba konstrukciju opisati ravnotežnom matricom **A**, čiji rang i potprostori daju potpunu sliku statičkoga i kinematičkoga ponašanja [2]. Pritom ključnu ulogu ima simetrija konstrukcije: kod simetričnih, prstenastih oblika ona snizuje rang matrice **A** i upravo je ona razlog zbog kojega se stanje unutarnje ravnoteže i mehanizam pojavljuju istodobno. Prepoznavanje takvih slučajeva vodi do proširenoga Maxwellova pravila i do uvida u pomičnost konstrukcije koju brojanje ne otkriva.

Motivaciju za ovu analizu daje nam drveni osmerokut katedrale u Elyju iz 14. stoljeća, čija je prstenasta struktura s parnim brojem stranica granični slučaj u kojemu se stanje unutarnje ravnoteže i mehanizam pojavljuju istodobno [3]. No, analizu započinjemo jednostavnijim varijacijama prstenaste konstrukcije, s manjim brojem čvorova i štapova, s „potpunom" simetrijom i s djelomičnim i potpunim narušavanjem simetrije, na kojima će se temeljni pojmovi lakše opisati i objasniti.

2. OSMEROKUT KATEDRALE U ELYJU

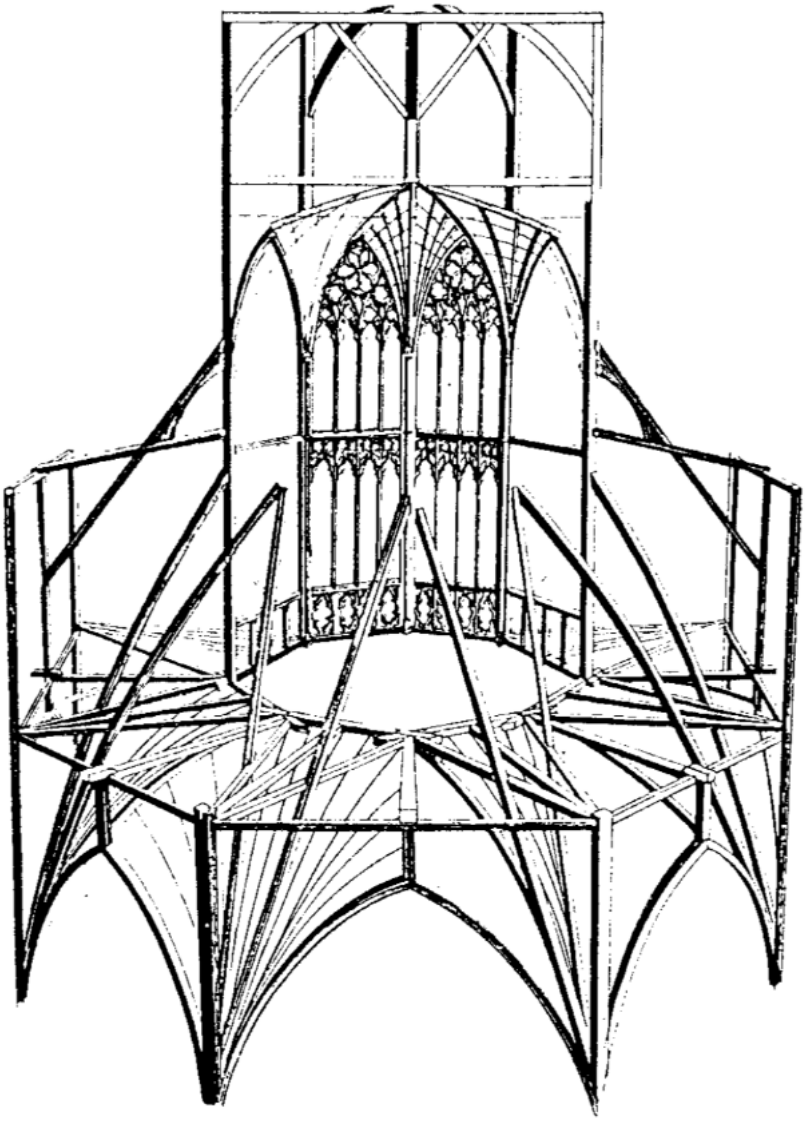
Godine 1322. urušila se središnja kula katedrale u Elyju, ostavivši na njezinom mjestu osmerokutan otvor. Toranj je bio dio izvornog normanskog projekta iz 12. stoljeća, a njegovo urušavanje prisililo je graditelje na odluku koja nije bila uobičajena za to doba: umjesto da obnove toranj na istom, četverokutnom tlocrtu, prijelaz su proširili u osmerokut, gotovo dvostruko veće površine od prvotnoga. To je zahtijevalo uklanjanje svih osam izvornih normanskih stupova te temeljito ojačavanje temelja. Kameni osmerokutni zidovi koji nose krovnu konstrukciju dovršeni su 1328. godine [3].

Nad tim kamenim prstenom podignuta je drvena oktogonalna rešetkasta konstrukcija (slike 1., 2. i 3.). Konstrukcija se temelji na donjem pragu koji nosi osam velikih stupova lanterne, čineći masivni rešetkasti sustav. Struktura je stabilizirana zakrivljenim rebrima i dijagonalnim kosnicima, dok je unutrašnjost same lanterne zatvorena drvenim lepezastim svodom i završnim krovom. Konstrukcija je u svojem izvornom obliku stajala stoljećima i tek je u 18. stoljeću prvi put ojačana [3].

Rekonstrukcija se pripisuje Alanu de Walsinghamu, tadašnjem sakristanu katedrale, koji je nadzirao radove, dok je projektiranje samog drvenog svoda i lanterne povjereno Williamu Hurleyu, kraljevskom tesaru — što govori da je za tako zahtjevan pothvat pribavljen najbolji mogući tehnički savjet onoga doba. Ono što osmerokut u Elyju čini iznimnim jest upravo odabir drvene konstrukcije za premošćivanje znatno većeg raspona, što kamenom svodu tih dimenzija ne bi bilo izvedivo [3].

Slika 1.: Osmerokut i lanterna katedrale u Elyju [7]

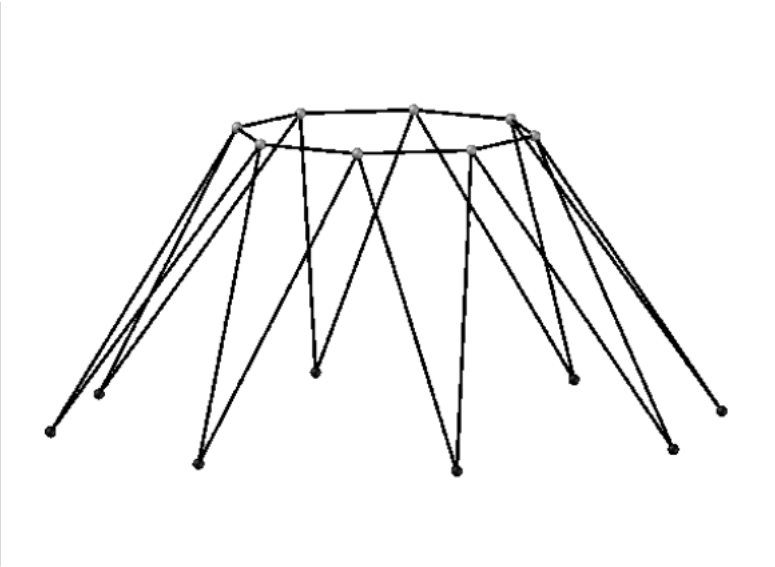
Slika 2.**:** Osmerokut katedrale u Elyju [8]



Slika 3.**:** Drvena rešetkasta konstrukcija katedrale u Elyju [3]

Proučavajući taj sistem, inženjeri Elizabeth Carol Wade i Jacques Heyman ocijenili su ga arhitektonskim remek-djelom, koje je u svojem izvornom obliku ujedno bilo i donekle konstrukcijska pogreška [3]. Razlog leži u načinu na koji glavni okvir nosi opterećenje.

Pojednostavljeni model glavne nosive strukture (slika 4.) dobiva se zamjenom zakrivljenih rebara ravnim kosim štapovima, a čvorova idealnim zglobovima. Tako se dobiva prstenasti sistem: gornji osmerokut povezan kosim štapovima s ležajevima na donjem rubu.



Slika 4.**:** Pojednostavljeni model glavne nosive strukture

Za takav sistem prebrojavanje štapova i čvorova daje $b - 3n_f = 0$, pa bi po Maxwellovu pravilu konstrukcija trebala biti geometrijski nepromjenjiva i statički određena.

Geometrija, međutim, pokazuje suprotno. Gornji se osmerokut ponaša kao zatvoreni lanac štapova čiji se čvorovi mogu pomicati bez promjene duljina štapova, pa je sistem mehanizam s jednim stupnjem slobode. Istodobno u njemu postoji stanje unutarnje ravnoteže, raspodjela uravnoteženih unutarnjih sila bez vanjskog opterećenja. Sistem je tako istodobno jedanput statički neodređen ($s = 1$) i mehanizam s jednim stupnjem slobode ($m = 1$) [5]. Prebrojavanjem štapova i čvorova dobiva se samo razlika $s - m$, koja je ovdje jednaka nuli, pa daje isti rezultat kao za geometrijski nepromjenjivu i statički određenu konstrukciju. Zbog toga se ta dva svojstva prebrojavanjem ne mogu otkriti.

3. MAXWELLOVO PRAVILO

Maxwellovo pravilo povezuje broj štapova i broj slobodnih čvorova sistema zglobno povezanih štapova s njegovom statičkom određenošću i geometrijskom nepromjenjivošću [1]. Temelji se na jednostavnom prebrojavanju. Svaki slobodni čvor u prostoru ima tri stupnja slobode gibanja, pa sistem s n_f slobodnih čvorova i podlogom ima ukupno $3n_f$ stupnjeva slobode. Svaki štap uklanja jedan od njih, jer sprječava promjenu udaljenosti dvaju čvorova koje povezuje. Da bi sistem bio statički određen i geometrijski nepromjenjiv, potrebno je stoga najmanje

$$b = 3n_f$$

ispravno raspoređenih štapova.

Odnos između broja stupnjeva slobode i broja štapova izražava razlika:

$$m_{min} = 3n_f - b$$

pri čemu je m_{min} najmanji mogući broj stupnjeva slobode sistema. Prema vrijednosti te razlike razlikuju se tri osnovna slučaja:

Ako je $b > 3n_f$, odnosno $m_{min} < 0$, sistem sadrži višak štapova, te je statički neodređen.

Ako je $b < 3n_f$, odnosno $m_{min} > 0$, sistemu nedostaju štapovi, pa je geometrijski promjenjiv, dakle riječ je o mehanizmu.

Ako je $b = 3n_f$, sistem može biti statički određen i geometrijski nepromjenjiv, ali samo ako su štapovi ispravno raspoređeni.

Posebno je važno naglasiti da zadovoljavanje uvjeta $b = 3n_f$ samo po sebi ne jamči geometrijsku nepromjenjivost. Postoje sistemi koji brojčano zadovoljavaju Maxwellovo pravilo, ali zbog svoje geometrije, simetrije ili rasporeda štapova i dalje posjeduju mehanizme, odnosno imaju jedan ili više stupnjeva slobode.

Calladine je Maxwellovo pravilo poopćio u oblik:

$$b - 3n_f = s - m$$

gdje je b broj štapova, n_f broj slobodnih čvorova, s broj stanja unutarnje ravnoteže, koji je jednak stupnju statičke neodređenosti, a m broj mehanizama, odnosno stupanj kinematičke neodređenosti [4]. Lijeva je strana određena prebrojavanjem, a desna sadrži razliku tih dvaju brojeva. Maxwell-Calladineovo pravilo omogućuje da se preciznije razlikuju konstrukcije koje su istodobno statički neodređene i geometrijski promjenjive, dakle one u kojima je $s > 0$ i $m > 0$. Takav je i osmerokut katedrale u Elyju, koji zadovoljava uvjet $b = 3n_f$, a ipak je mehanizam [5].

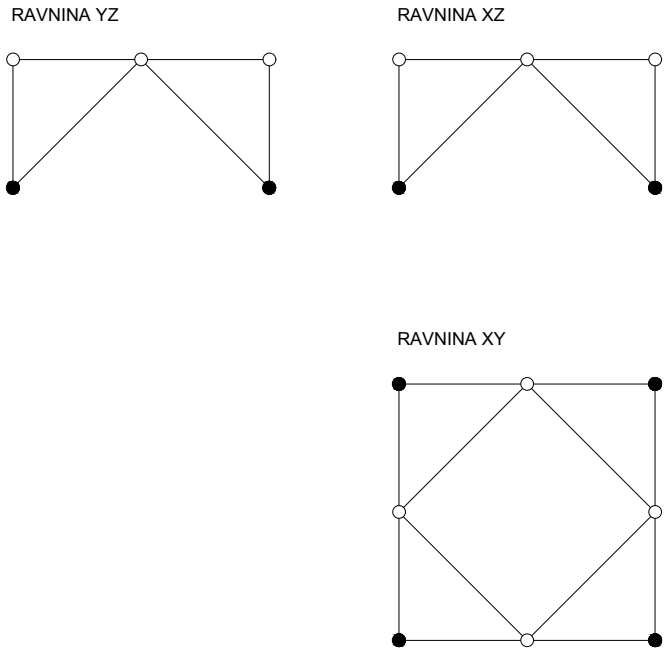
4. STATIČKI NEODREĐENI MEHANIZAM

Ponašanje uočeno na osmerokutu, istovremeno gibanje bez promjene duljina štapova i sile u štapovima bez vanjskog opterećenja, nije svojstvo samo te konstrukcije, nego čitave skupine prstenastih sistema. Da bi se objasnilo, najprije treba reći o kakvu je sistemu riječ.

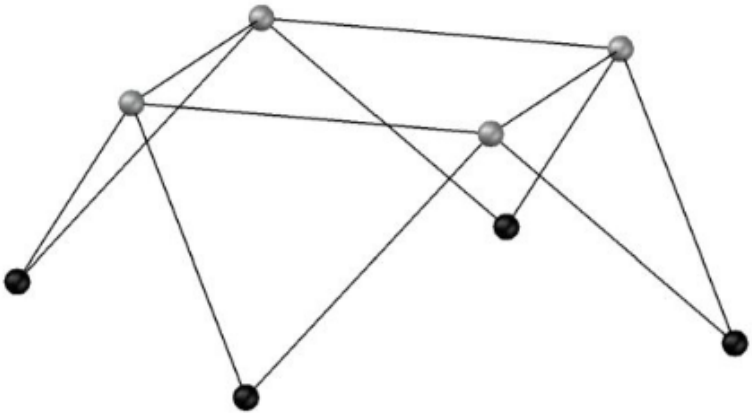
Kako je pokazano u prethodnom poglavlju, sistem zglobnih štapova može imati dva svojstva koja prebrojavanje ne razlikuje. Prvo je mehanizam, sustav pomaka slobodnih čvorova pri kojem se mijenja oblik sistema, ali se nijedan štap ne produljuje ni ne skraćuje; broj nezavisnih takvih pomaka jest m. Drugo je stanje unutarnje ravnoteže, sustav sila u štapovima koji je u ravnoteži u svim čvorovima i bez vanjskih sila; broj nezavisnih takvih sustava jest s i jednak je stupnju statičke neodređenosti. U statički određenim sistemima takvih sustava nema, pa su sile u štapovima za zadano vanjsko opterećenje određene uvjetima ravnoteže. U statički neodređenim sistemima, naprotiv, postoji barem jedno stanje unutarnje ravnoteže, pa sile u štapovima nisu određene samim uvjetima ravnoteže.

Statički neodređeni mehanizam jest sistem koji ima oba svojstva istodobno, $s > 0$ i $m > 0$, sistem koji je u isto vrijeme geometrijski promjenjiv i statički neodređen.

Najjednostavniji takav sistem jest prstenasti četverokut (slike 5. i 6.). U nastavku se razmatra simetričan slučaj u kojem se čvorovi gornjega četverokuta gibaju po vodoravnim pravcima. Sistem tvore četiri štapa gornjega četverokuta koji spajaju slobodne čvorove i kosi štapovi koji ga povezuju s ležajnim čvorovima. Pritom su parovi štapova kojima su pojedini čvorovi spojeni s podlogom u vertikalnim ravninama. Na slici 5. sistem je prikazan u projekcijama na tri ravnine, a geometrija se najjasnije vidi u tlocrtu, gdje gornji četverokut ima oblik kvadrata. Na slici 6. je aksonometrijski prikaz.



Slika 5.**:** Simetrični prstenasti četverokut, prikaz u projekcijama na tri ravnine



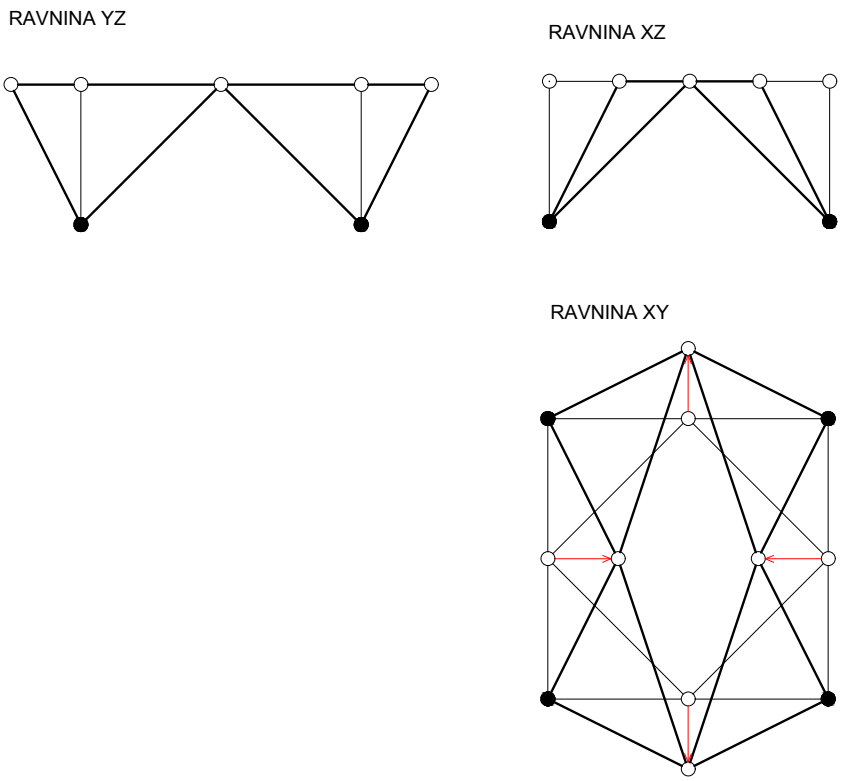
Slika 6.**:** Simetrični prstenasti četverokut, aksonometrijski prikaz

4.1. Pomaci mehanizama

Iako prebrojavanje štapova i čvorova daje $b - 3n_f = 0$, geometrijsko razmatranje pokazuje da sistem nije geometrijski nepromjenjiv. Postoji sustav pomaka slobodnih čvorova pri kojem se nijedan štap ne produljuje ni ne skraćuje. Štapovi se pri tome gibanju samo zakreću oko svojih ležajnih čvorova, a čvorovi se gornjega četverokuta u teoriji malih pomaka gibaju po vodoravnim pravcima (stvarno je gibanje po kružnicama kojima su središta u polovištima spojnica ležajnih čvorova).

Gibanje se najjasnije prati u tlocrtu, u ravnini XY (slika 7.). Gornji četverokut, koji u početnom položaju ima oblik kvadrata, pri pomaku se deformira tako da se jedan par nasuprotnih čvorova međusobno približava, dok se drugi par istodobno udaljava. Kvadrat tako prelazi u romb. Duljine stranica četverokuta pritom se ne mijenjaju, mijenjaju se samo kutovi među njima, pa štapovi gornjega prstena ostaju nepromijenjene duljine. Kosi štapovi koji povezuju gornji četverokut s ležajnim čvorovima prate to gibanje, također bez promjene duljine.

Budući da je takav sustav pomaka moguć bez ikakve promjene duljina štapova, sistem je mehanizam. Kako postoji jedan nezavisan sustav pomaka, riječ je o mehanizmu s jednim stupnjem slobode, $m = 1$. Na skici su pomaci čvorova u tlocrtu označeni strelicama koje pokazuju smjer gibanja svakoga čvora; iz njih se vidi opisani prijelaz kvadrata u romb.

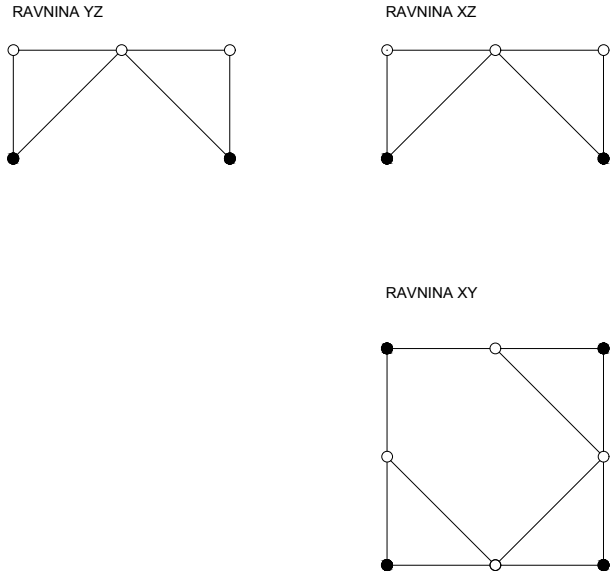


Slika 7.**:** Pomaci simetričnoga prstenastog četverokuta, projekcije na tri ravnine

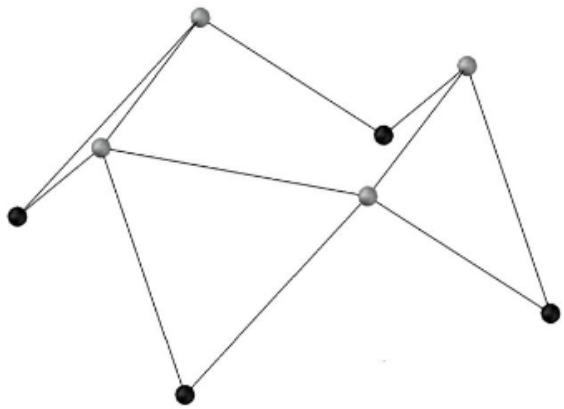
Slika 8.**:** Pomaci simetričnoga prstenastog četverokuta, aksonometrijski prikaz

4.2. Pomaci u statički određenom sistemu

Da bi se olakšalo razmatranje sila, iz prstena se privremeno uklanja jedan štap gornjega četverokuta (slike 9. i 10.). Uklanjanjem toga štapa smanjuje se broj štapova za jedan, čime nestaje stanje unutarnje ravnoteže, pa dobiveni sistem više nije statički neodređen. Bitno je pritom da uklanjanje toga štapa ne sprječava gibanje: prsten je i prije bio geometrijski promjenjiv, a oduzimanjem jednoga štapa ostaje promjenjiv na isti način.

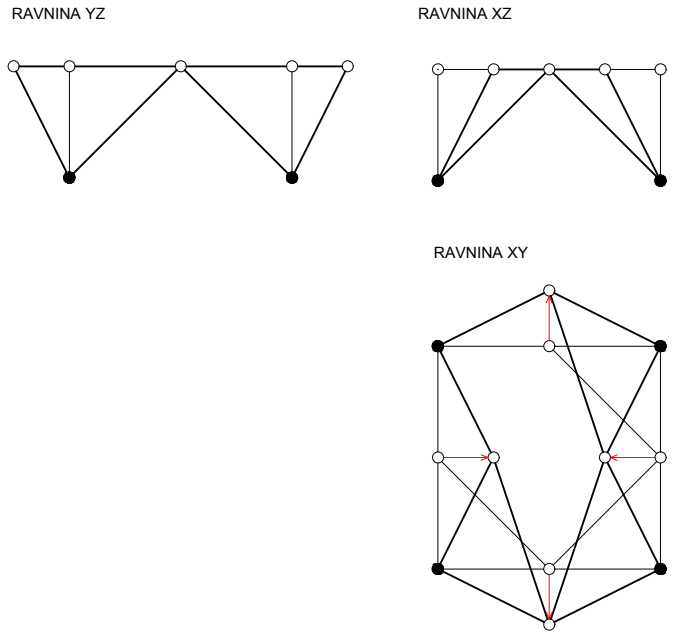


Slika 9.**:** Četverokutni sistem s uklonjenim štapom prstena, projekcije na tri ravnine

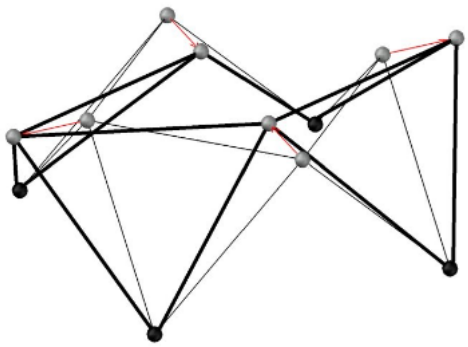


Slika 10.**:** Četverokutni sistem s uklonjenim štapom prstena, aksonometrijski prikaz

Pomaci čvorova u takvom sistemu jednaki su pomacima mehanizma opisanima u prethodnom odjeljku. Gornji se četverokut i dalje deformira iz kvadrata u romb (slike 11. i 12.), uz iste smjerove gibanja čvorova. Mehanizam se, dakle, nije promijenio, a razlika je samo u tome što je sistem sada statički određen.



Slika 11.**:** Pomaci statički određenog sistema, projekcije na tri ravnine

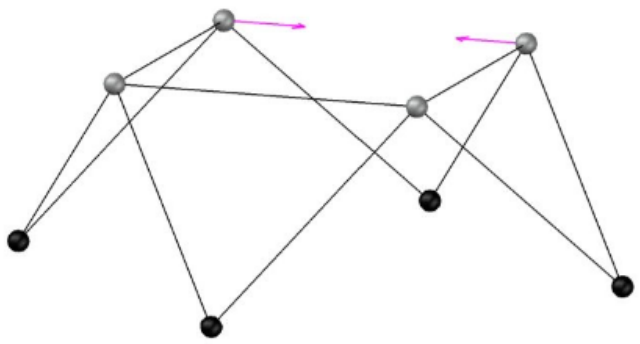


Slika 12.**:** Pomaci statički određenog sistema, aksonometrijski prikaz

Time se dobiva pogodno polazište za razmatranje sila. Mehanizam koji se proučava ostao je isti, ali je sistem sveden na statički određen. U takvom su sistemu sile u štapovima za zadano opterećenje jednoznačno određene uvjetima ravnoteže što u statički neodređenom prstenu nije slučaj.

4.3. Opterećenje parom sila na mjestu uklonjenoga štapa

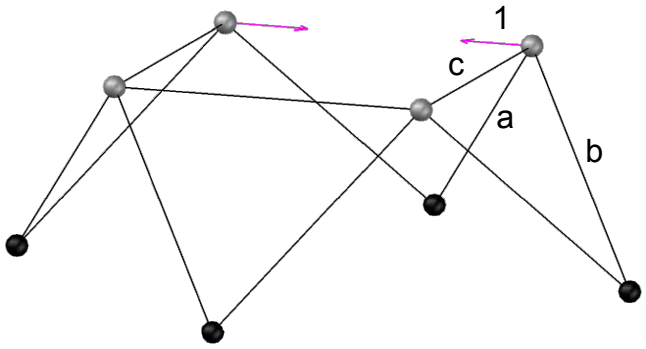
Na statički određeni sistem dobiven u prethodnom odjeljku nanosi se opterećenje na mjestu na kojem je štap uklonjen (slika 13.). To opterećenje čini par sila, dvije sile jednakih iznosa i suprotnoga smjera, koje djeluju uzduž pravca na kojem je uklonjeni štap ležao, s hvatištima u čvorovima koje je taj štap povezivao. Riječ je upravo o silama koje bi uklonjeni štap, da je prisutan, prenosio na ta dva čvora.



Slika 13.**:** Opterećenje parom sila na mjestu uklonjenoga štapa

Pod tim se opterećenjem sistem nalazi u ravnoteži. Budući da je statički određen, sile u svim štapovima jednoznačno su određene uvjetima ravnoteže u čvorovima: u svakom čvoru zbroj sila iz priključenih štapova i vanjske sile (ako u njemu djeluje) jednak je nuli. Tako se opterećenje parom sila prenosi kroz sistem do ležajnih čvorova, pri čemu se u svakom štapu javlja sila određena iznosa i smjera.

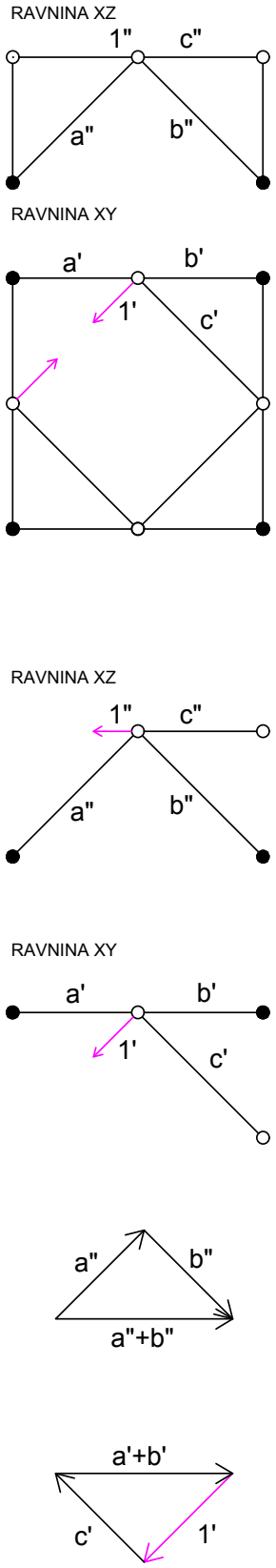
Postupak uravnoteženja (slika 15.) prikazan je grafički na izdvojenom čvoru (slika 14.) u kojem djeluju jedinična sila 1 i sile u štapovima a, b i c.



Slika 14.**:** Opterećenje parom sila na mjestu uklonjenoga štapa

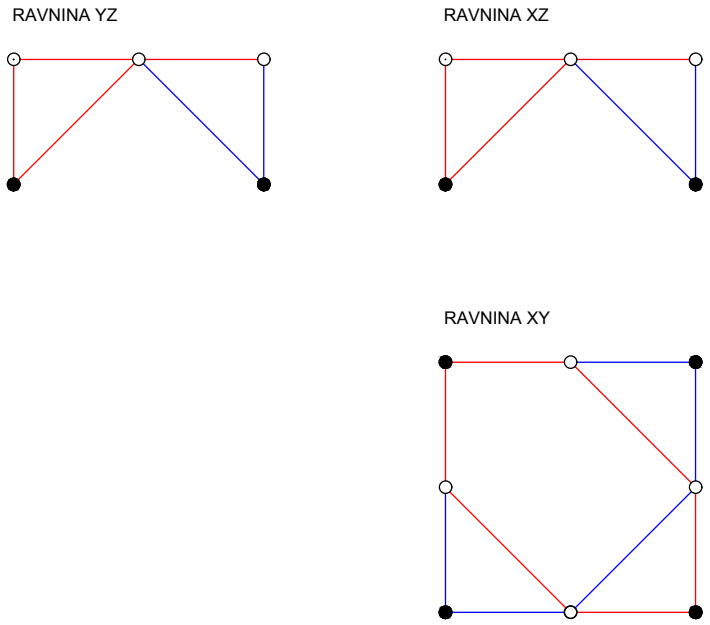
Postupak je prostorna varijacija Culmannova postupka. U ravninskom Culmannovu postupku sile leže u istoj ravnini, ali ne prolaze istom točkom, dok u ovom slučaju sile prolaze istim čvorom, ali ne leže u jednoj ravnini. Sile se grupiraju u dva para: jedinična sila 1 i sila u štapu c čine jedan par, a sile u štapovima a i b drugi par. Svaki se par zamjenjuje pripadajućom rezultantom. Rezultanta para sila leži u ravnini određenoj pravcima djelovanja tih sila (u Culmannovom postupku rezultanta prolazi sjecištem pravaca). Ako je čvor u ravnoteži, rezultante tih parova moraju djelovati na istom pravcu, biti jednakoga intenziteta i suprotnoga smisla [9]. Budući da taj pravac mora biti u ravninama oba para, njihova je presječnica (u Culmannovom postupku mora proći sjecištima oba para, pa je na njihovoj spojnici).

Postupak započinje u tlocrtu. U tlocrtu se zatvara poligon sila za jediničnu silu 1', silu u štapu c' i rezultantu sila u štapovima a i b, označenu s a' + b'. Nakon što se ta rezultanta odredi, postupak se nastavlja u nacrtu. U nacrtu se rezultanta a'' + b'' rastavlja u komponente u pravcima a'' i b'', čime se dobivaju sile u štapovima a i b.

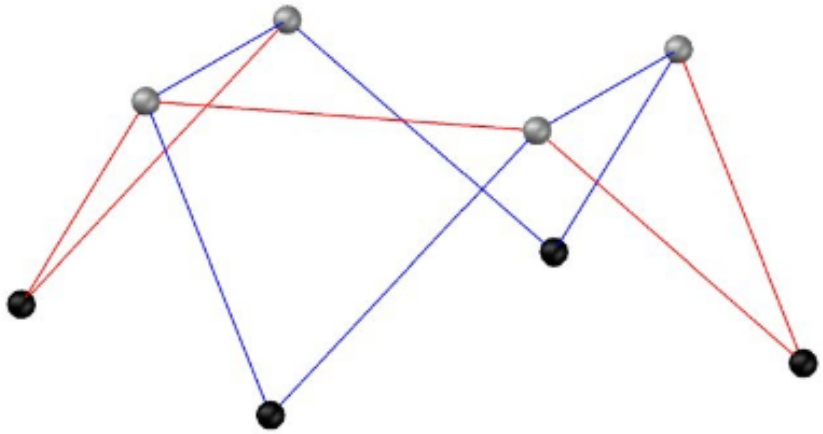


Slika 15.**:** Grafičko uravnoteženje čvora nakon uklanjanja štapa

U nekim su štapovima dobivene sile vlačne, a u nekima tlačne. Na slici su vlačni štapovi prikazani plavom, a tlačni štapovi crvenom bojom, pa se raspodjela sila može pratiti u projekcijama na sve tri ravnine, u nacrtu, bokocrtu i tlocrtu (slike 16. i 17.).



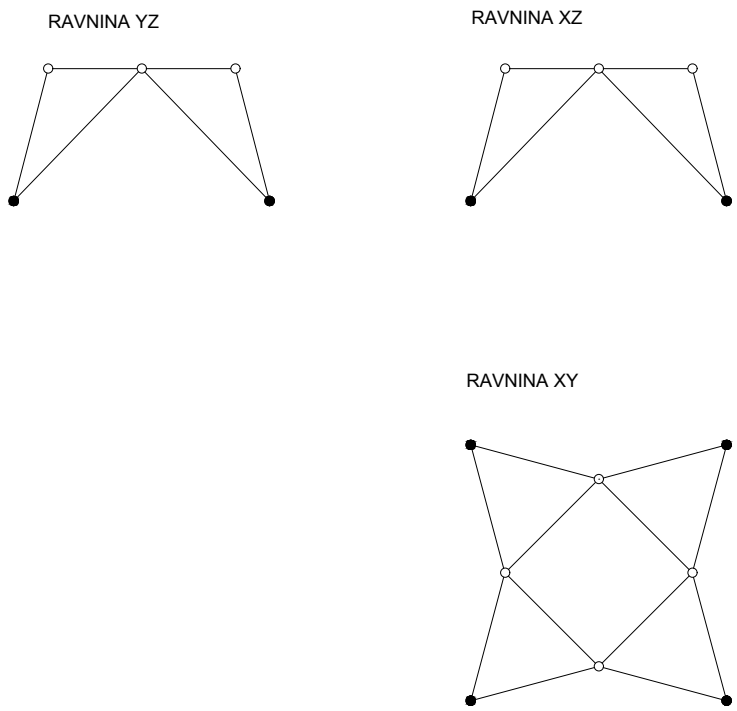
Slika 16.**:** Sile u štapovima pod opterećenjem, projekcije na tri ravnine



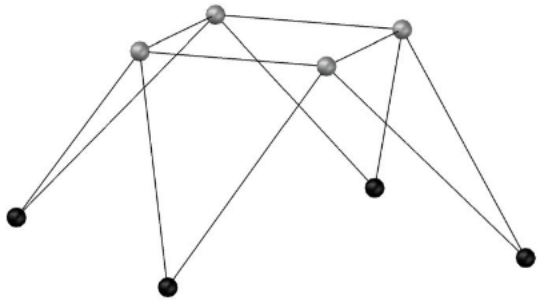
Slika 17.**:** Sile u štapovima pod opterećenjem, aksonometrijski prikaz

5. SIMETRIČNI ČETVEROKUTNI SISTEM S KOSIM PRAVCIMA GIBANJA ČVOROVA

U prethodnom je poglavlju razmotren simetrični četverokutni sistem u kojem se čvorovi gornjega prstena gibaju po vodoravnim pravcima. Sada se razmatra složenija varijacija istoga prstenastog sistema (slike 18. i 19.), u kojoj su parovi štapova kojima su pojedini čvorovi spojeni s podlogom u kosim ravninama, pa se čvorovi gornjega četverokuta pri gibanju ne pomiču vodoravno, nego po kosim pravcima, okomitima na ravnine parova štapova. Geometrija prstena ostaje ista, mijenja se samo usmjerenje pravaca po kojima se čvorovi mogu gibati, pa se i svojstva sistema mogu usporediti s onima iz osnovnoga, jednostavnijeg slučaja.



Slika 18.**:** Simetrični četverokutni sistem s kosim pravcima gibanja, projekcije na tri ravnine

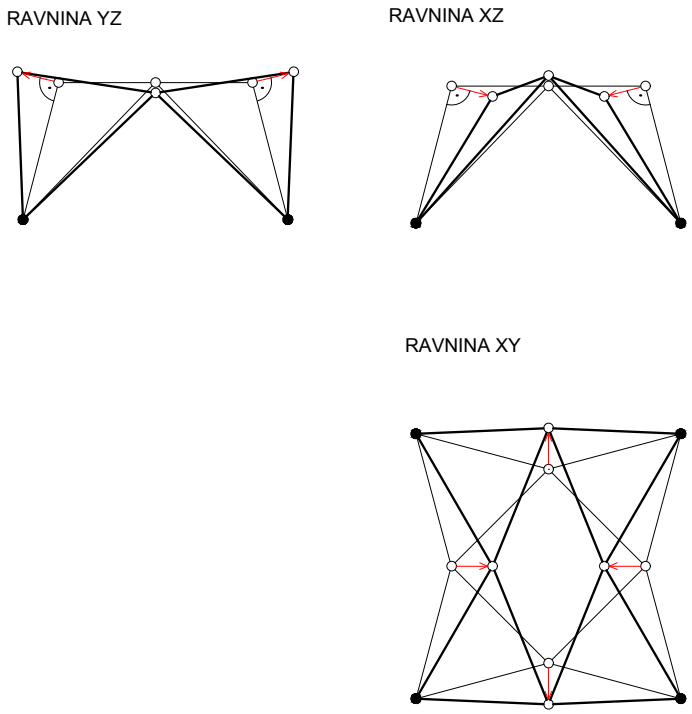


Slika 19.**:** Simetrični četverokutni sistem s kosim pravcima gibanja, prostorni prikaz

5.1. Pomaci mehanizma

Kao i u jednostavnijem slučaju, sistem dopušta pomak slobodnih čvorova pri kojem se nijedan štap ne produljuje ni ne skraćuje. Razlika je u smjeru gibanja: čvorovi gornjega četverokuta ne pomiču se po vodoravnim pravcima, nego po kosim, nagnutim u odnosu na ravninu gornjega prstena. Pri tom se gibanju štapovi zakreću, a gornji četverokut mijenja oblik bez promjene duljina svojih stranica.

Na slikama 20. i 21. su pravci gibanja čvorova označeni strelicama. Strelice pokazuju da se susjedni čvorovi gornjega četverokuta gibaju u suprotnim smjerovima, slično kao u vodoravnom slučaju, ali sada uz vertikalnu komponentu pomaka, zbog koje pravci gibanja postaju kosi. Budući da je takav sustav pomaka moguć bez promjene duljina štapova i da postoji jedan takav nezavisan pomak, sistem je i u ovom slučaju mehanizam s jednim stupnjem slobode, $m = 1$.



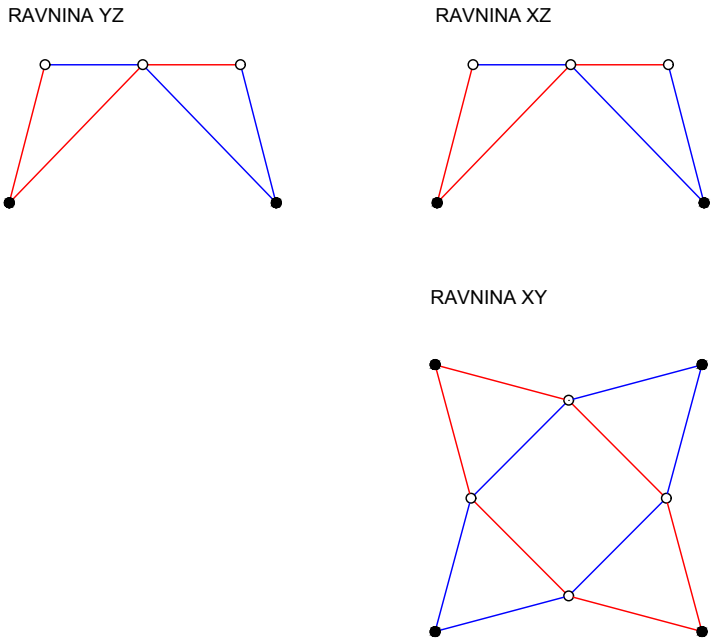
Slika 20.**:** Pomaci po kosim pravcima gibanja, projekcije na tri ravnine

Slika 21.**:** Pomaci po kosim pravcima gibanja, prostorni prikaz

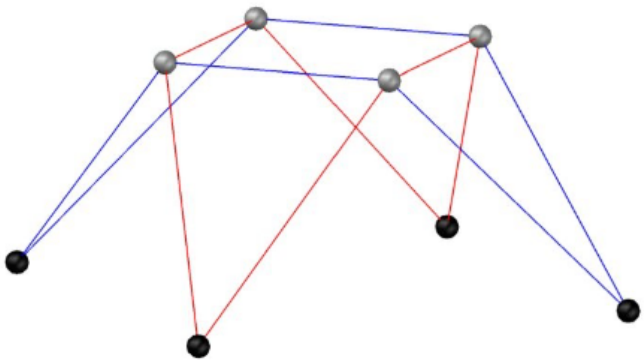
5.2. Stanje unutarnje ravnoteže

I u ovom slučaju sistem se može biti u stanju unutarnje ravnoteže u kojem postoji sustav sila u štapovima u ravnoteži u svim čvorovima bez vanjskoga opterećenja. U svakom je slobodnom čvoru zbroj sila iz priključenih štapova jednak nuli, premda na sistem ne djeluje nikakva vanjska sila. Time je i ovaj prsten istodobno geometrijski promjenjiv i statički neodređen, dakle statički neodređeni mehanizam sa $s = m = 1$, kao i u slučaju s vodoravnim pravcima gibanja.

Na skici su vlačni štapovi prikazani plavom, a tlačni štapovi crvenom bojom, pa se raspodjela sila stanja unutarnje ravnoteže može pratiti kroz cijeli prsten (slike 22. i 23.)

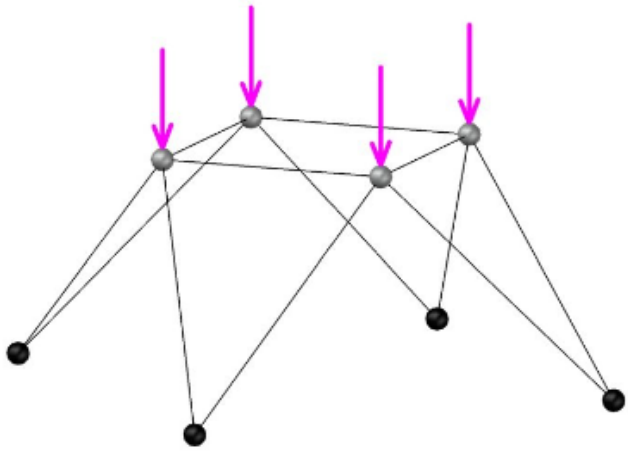


Slika 22.**:** Stanje unutarnje ravnoteže, projekcije na tri ravnine



Slika 23.: Stanje unutarnje ravnoteže, prostorni prikaz

5.3. Ravnoteža za vanjsko opterećenje koje se može uravnotežiti



Slika 24.: Vanjsko opterećenje koje se može uravnotežiti

Budući da je sistem statički neodređeni mehanizam, ne može se svako vanjsko opterećenje uravnotežiti silama u štapovima. Uvjet ravnoteže opisuje se pomoću ravnotežne matrice **A**. Za svaki slobodni čvor pišu se tri jednadžbe ravnoteže, u smjerovima koordinatnih osi *x*, *y* i *z*, a koeficijenti uz nepoznate sile u štapovima čine matricu **A** [1].

Sustav jednadžbi ravnoteže zapisuje se u obliku

$$\mathbf{A}\,\mathbf{s} + \mathbf{f} = \mathbf{0},$$

odnosno

$$\mathbf{A}\,\mathbf{s} = -\mathbf{f}.$$

U tom je zapisu **s** vektor vrijednosti sila u štapovima, a **f** vektor vanjskih sila u slobodnim čvorovima. Ako sistem ima b štapova i n_f slobodnih čvorova, tada vrijedi

$$\mathbf{A} : R^b \longrightarrow R^{(3\,n_f)}.$$

Matrica **A** zato preslikava sile u štapovima u sile u slobodnim čvorovima [1].

Vanjsko opterećenje može se uravnotežiti samo ako postoji vektor sila u štapovima **s** koji zadovoljava jednadžbu **A s** = -**f**. Drugim riječima, opterećenje se može uravnotežiti ako pripada prostoru stupaca ravnotežne matrice **A**. Prostor stupaca matrice **A** je prostor vanjskih sila koje se mogu uravnotežiti.

Ako opterećenje nije u prostoru stupaca matrice **A**, tada jednadžbe ravnoteže nemaju rješenje. Takvo opterećenje ima nenultu komponentu u lijevoj jezgri matrice **A**. Lijeva jezgra je prostor vanjskih sila koje se ne mogu uravnotežiti [1].

Isti se odnos može opisati kinematičkom matricom **B**, koja preslikava pomake slobodnih čvorova u promjene duljina štapova:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{u} = -\mathbf{d}.$$

Za sisteme zglobnih štapova vrijedi

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T.$$

Ako pomaci čvorova ne uzrokuju promjene duljina štapova, tada je:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Rješenja te jednadžbe čine jezgru matrice **B**. U toj su jezgri pomaci mehanizma, odnosno pomaci koji ne uzrokuju promjene duljina štapova. Budući da je $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, lijeva jezgra ravnotežne matrice **A** jednaka je jezgri kinematičke matrice **B**. Zato se opterećenje koje ima komponentu u lijevoj jezgri matrice **A** ne može uravnotežiti silama u štapovima, nego uzrokuje gibanje sistema po pomaku mehanizma [1].

S druge strane, jezgra ravnotežne matrice **A** određena je jednadžbom:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{s} = \mathbf{0}.$$

Rješenja te jednadžbe su stanja unutarnje ravnoteže, odnosno sustavi sila u štapovima koji su u ravnoteži bez vanjskoga opterećenja [1].

Općeniti je uvjet ovaj: opterećenje se može uravnotežiti ako pripada prostoru stupaca ravnotežne matrice, a ne može se uravnotežiti ako ima komponentu u lijevoj jezgri ravnotežne matrice.

U promatranom primjeru (slika 24.) vanjsko je opterećenje raspoređeno simetrično: na sva četiri slobodna čvora gornjega prstena djeluju jednake sile. Takvo opterećenje pripada prostoru stupaca matrice A. Zato postoji sustav sila u štapovima koji ga može uravnotežiti. Mehanizam i dalje postoji, ali zadano opterećenje ne uzrokuje gibanje sistema.

Kada bi sila, recimo, djelovala samo u jednom slobodnom čvoru, takvo opterećenje ne bi pripadalo prostoru stupaca matrice **A**, nego bi imalo komponentu u lijevoj jezgri. Zbog toga se ne bi moglo uravnotežiti silama u štapovima. Prema tome, nije dovoljno promatrati samo smjer pojedine sile, nego treba promatrati cijeli vektor opterećenja i njegov položaj u odnosu na prostor stupaca ravnotežne matrice.

5.4. Grafički postupak uravnoteženja simetričnog opterećenja

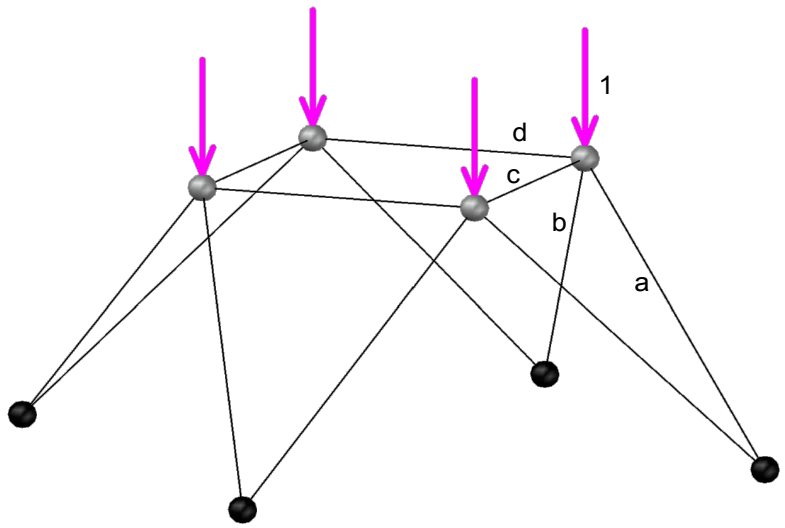
Zadano opterećenje može se uravnotežiti i grafičkim postupkom. Na slici 26. prikazan je postupak za izdvojeni čvor (slika 25.) prstenastoga sistema. Štapovi priključeni u promatrani čvor označeni su slovima a, b, c i d, a njihove projekcije u tlocrtu i nacrtu označene su jednim, odnosno dvama apostrofima. U tlocrtu su osi svih štapova vidljive odvojeno, dok se u nacrtu osi simetričnih parova poklapaju, pa vrijedi a'' ≡ b'' i c'' ≡ d''.

Zbog simetrije sistema sile u štapovima koji se u nacrtu poklapaju imaju jednake vrijednosti. Zato se djelovanje para štapova a i b može zamijeniti rezultantom R_{ab}, a djelovanje para štapova c i d rezultantom R_{cd}. Ravnoteža izdvojenog čvora tada se svodi na ravnotežu triju sila: vanjske jedinične sile i dviju rezultanata R_{ab} i R_{cd}. U nacrtu se zatvara poligon sila, iz kojega se određuju nacrti rezultanata R_{ab}'' i R_{cd}'' [10].

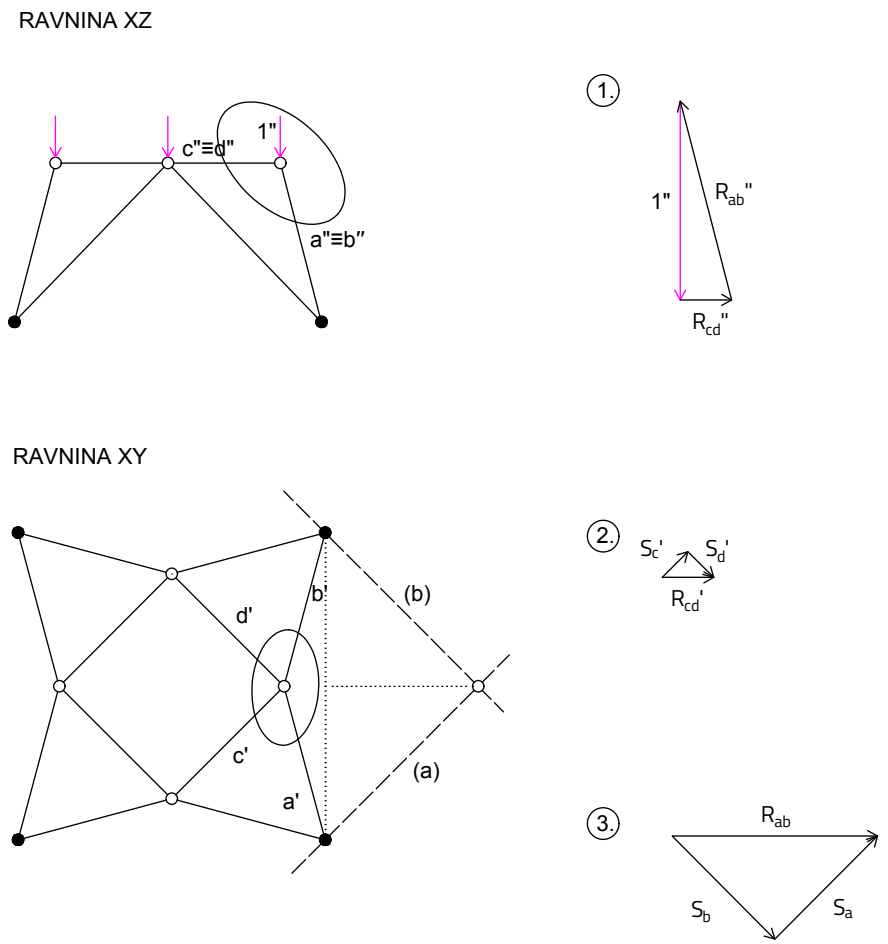
Nakon toga se rezultante rastavljaju na sile u pojedinim štapovima. Rezultanta R_{cd} rastavlja se u tlocrtu na sile S_c i S_d, jer su pravci c' i d' u tlocrtu vidljivi odvojeno.

Za par štapova a i b treba prethodno odrediti pravi kut između njihovih osi. Zato se ravnina određena tim štapovima rotira u tlocrtnu ravninu. Duljina priklonice koja se u nacrtu poklapa s nacrtima štapova a i b, očitana u nacrtu, prenosi se u tlocrt, čime se dobiva rotirani položaj promatrane točke. Rotirani položaji osi štapova označeni su zagradama, (a) i (b). U tako dobivenoj pravoj veličini rezultanta R_{ab} rastavlja se u sile S_a i S_b, povlačenjem paralela s pravcima (a) i (b).

Na taj se način prostorni zadatak ravnoteže izdvojenoga čvora svodi na dva ravninska rastava rezultanata u komponente na pravcima pripadnih štapova.

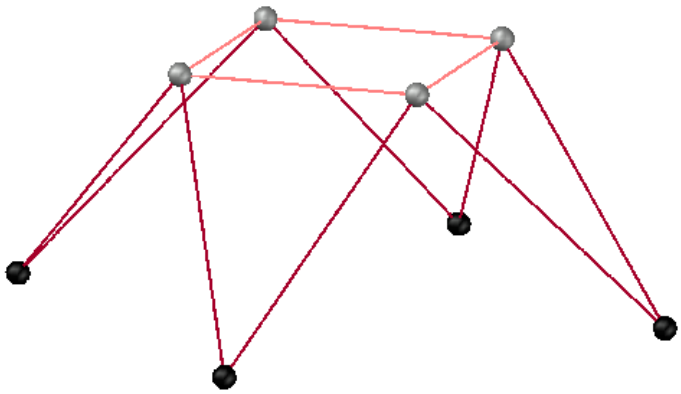


Slika 25.: Prstenasti sistem s označenim štapovima u izdvojenom čvoru, aksonometrijski prikaz



Slika 26.: Grafički postupak određivanja sila u štapovima u izdvojenom čvoru

Na slici 27 prikazana je konačna raspodjela sila u štapovima dobivena grafičkim postupkom. Sve sile u promatranim štapovima su tlačne. Štapovi gornjega prstena, označeni svijetlocrveno, imaju međusobno jednake vrijednosti sila, dok kosi štapovi, označeni tamnocrveno, također imaju međusobno jednake vrijednosti sila. Time se potvrđuje simetrična raspodjela unutarnjih sila za zadano simetrično vanjsko opterećenje.

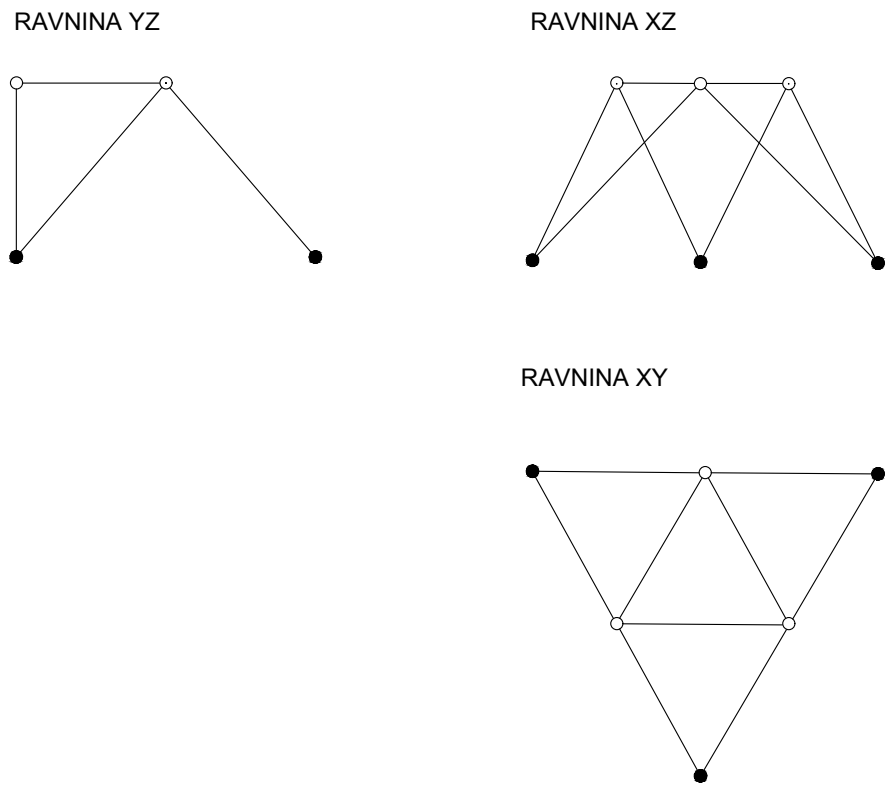


Slika 27.: Konačna raspodjela sila u štapovima

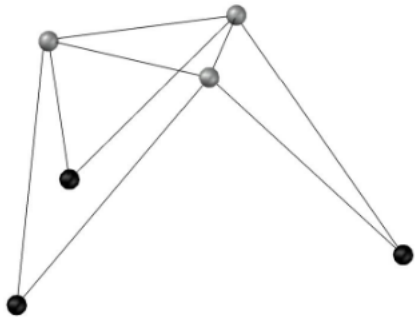
6. TROKUT

Dosadašnji su primjeri pokazali da je simetrični četverokutni sistem statički neodređeni mehanizam, sistem koji istodobno ima mehanizam i stanje unutarnje ravnoteže. Postavlja se pitanje je li to svojstvo zajedničko svim prstenastim sistemima ili ovisi o broju stranica prstena. Da bi se to razjasnilo, razmatra se prsten s neparnim brojem stranica i to najjednostavniji, jednakostranični trokut.

Trokutni prsten građen je jednako kao četverokutni, samo s tri stranice koje spajaju slobodne čvorove umjesto četiri. Gornji trokut povezan je kosim štapovima s ležajnim čvorovima. Za razliku od četverokuta, ovaj sistem nema ni mehanizma ni stanja unutarnje ravnoteže (slike 28. i 29.).



Slika 28.: Trokutni prsten, projekcije na tri ravnine

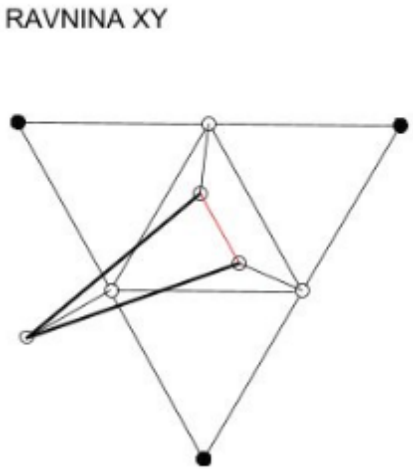


Slika 29.: Trokutni prsten, aksonometrijski prikaz

6.1. Nepostojanje mehanizma

Trokutni je prsten geometrijski nepromjenjiv. Ne postoji pomak slobodnih čvorova moguć bez promjene duljina štapova: svaki pomak čvorova gornjega trokuta zahtijeva produljenje ili skraćenje barem jednoga štapa. Sistem stoga nema mehanizma, pa je $m = 0$.

To se može pokazati pokušajem pomaka. Pomaknu li se čvorovi gornjega trokuta, geometrija prstena ne dopušta da svi štapovi pri tome zadrže svoju duljinu. Barem jedan štap mora promijeniti duljinu, pa pretpostavljeni pomak nije moguć kao pomak mehanizma. Na slici 30. je taj štap, koji se pri pokušaju pomaka skraćuje, istaknut crvenom bojom. Postojanje jednoga takvog štapa pokazuje da pomak nije moguć bez promjene duljina, čime je potvrđeno da je sistem geometrijski nepromjenjiv.



Slika 30.: Pokušaj pomaka trokuta, skraćeni štap istaknut crvenom bojom

6.2. Nepostojanje stanja unutarnje ravnoteže

Trokutni prsten nije u stanju unutarnje ravnoteže. Ne postoji raspodjela sila u štapovima koja bi bila u ravnoteži u svim čvorovima bez vanjskog opterećenja. Jedino rješenje uvjeta ravnoteže bez vanjskih sila jest da su sile u svim štapovima jednake nuli. Sistem je stoga statički određen, $s = 0$.

6.3. Usporedba s četverokutom

Trokutni i četverokutni prsteni razlikuju se, dakle, u temeljnom svojstvu. Četverokutni je prsten statički neodređeni mehanizam, sa $s = m = 1$, dok trokutni nema ni jedno od tih dvaju svojstava, $s = m = 0$. Premda u oba slučaja prebrojavanje daje istu vrijednost $b - 3n_f = 0$, sistemi se bitno razlikuju: trokutni je geometrijski nepromjenjiv i statički određen, a četverokutni je istodobno geometrijski promjenjiv i statički neodređen.

Iz te se usporedbe vidi da pojava mehanizma i stanja unutarnje ravnoteže ovisi o broju stranica prstena. Trokut, s neparnim brojem stranica, ponaša se kao obična geometrijski nepromjenjiva konstrukcija, dok se četverokut, s parnim brojem stranica, ponaša kao statički neodređeni mehanizam. To zapažanje vodi do poopćenja na proizvoljan broj stranica, kojim se objašnjava i ponašanje osmerokuta.

7. PARAN I NEPARAN BROJ STRANICA PRSTENA

Usporedba trokuta i četverokuta pokazala je da ponašanje prstenastoga sistema ovisi o broju stranica prstena. Trokut, s neparnim brojem stranica, geometrijski je nepromjenjiv i statički određen, dok je četverokut, s parnim brojem stranica, statički neodređeni mehanizam.

Pravilni prsten s parnim brojem stranica ima svojstvo koje prsten s neparnim brojem stranica nema, a to je zrcalna simetrija s obzirom na ravninu koja prolazi kroz dva nasuprotna vrha gornjega mnogokuta. Pri parnom broju stranica nasuprot svakomu vrhu nalazi se drugi vrh, pa takva ravnina postoji. Pri neparnom broju stranica nasuprot vrhu nalazi se sredina stranice, pa nasuprotnih vrhova nema, a onda, naravno, nema ni ravnine simetrije kroz dva nasuprotna vrha nema.

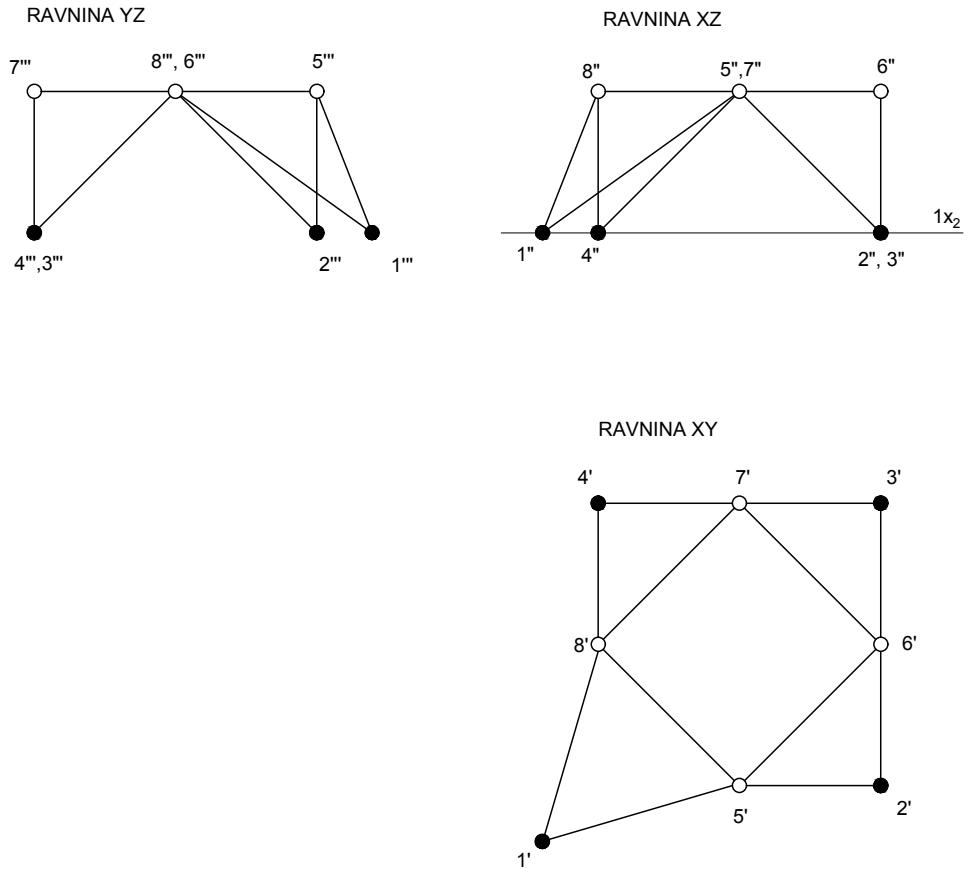
Upravo ta zrcalna simetrija omogućuje pojavu mehanizma. Tarnai je pokazao da prstenasta struktura zglobnih štapova s parnim brojem stranica, čini mehanizam ako je simetričan s obzirom na ravninu koja prolazi kroz dva vrha gornjega mnogokuta [5]. Postojanje te ravnine simetrije je uvjet pomičnosti. Stoga prsten s parnim brojem stranica ima mehanizam, a prsten s neparnim brojem stranica nema.

Zbog proširenoga Maxwellova pravila pojava mehanizma povlači za sobom i pojavu stanja unutarnje ravnoteže. Za sve te prstene prebrojavanje daje $b - 3n_f = 0$, pa je $s - m = 0$, odnosno $s = m$. Kod prstena s neparnim brojem stranica nema mehanizma, $m = 0$, pa je i $s = 0$, te je sistem geometrijski nepromjenjiv i statički određen. Kod prstena s parnim brojem stranica postoji mehanizam, $m = 1$, pa je i $s = 1$, te je sistem statički neodređeni mehanizam.

Zaključujemo da se trokut i ostali pravilni prsteni s neparnim brojem stranica ponašaju kao obične geometrijski nepromjenjive konstrukcije, dok se pravilni četverokut, šesterokut, osmerokut i ostali prsteni s parnim brojem stranica ponašaju kao statički neodređeni mehanizmi.

8. ČETVEROKUTNI SISTEM S JEDNOM OSI SIMETRIJE

U dosadašnjim su poglavljima razmatrani „potpuno" simetrični četverokuti s četiri osi simetrije (dvije osi prolaze nasuprotnim vrhovima, a dvije polovištima nasuprotnih stranica). Sada se razmatra četverokutni sistem s „narušenom" simetrijom, koji ima samo jednu os simetrije (četverokut je i sada kvadrat, ali je simetrija cijeloga prstenastog sistema narušena pomicanjem ležajnoga čvora). Time se ispituje zadržava li se svojstvo statički neodređenoga mehanizma i kada simetrija nije potpuna. Geometrija se prikazuje Mongeovom metodom, u tlocrtu, nacrtu i bokocrtu (slika 31.), pri čemu se točke označavaju ovisno o ravnini projekcije: jednom crticom u tlocrtu (1', 5'), dvjema u nacrtu (1'', 5'') i trima u bokocrtu (1''', 5'''). Slobodni su čvorovi gornjega četverokuta označeni brojevima 5 do 8, a ležajni čvorovi brojevima 1 do 4.



Slika 31.: Četverokutni sistem s jednom osi simetrije

8.1. Pomaci mehanizma

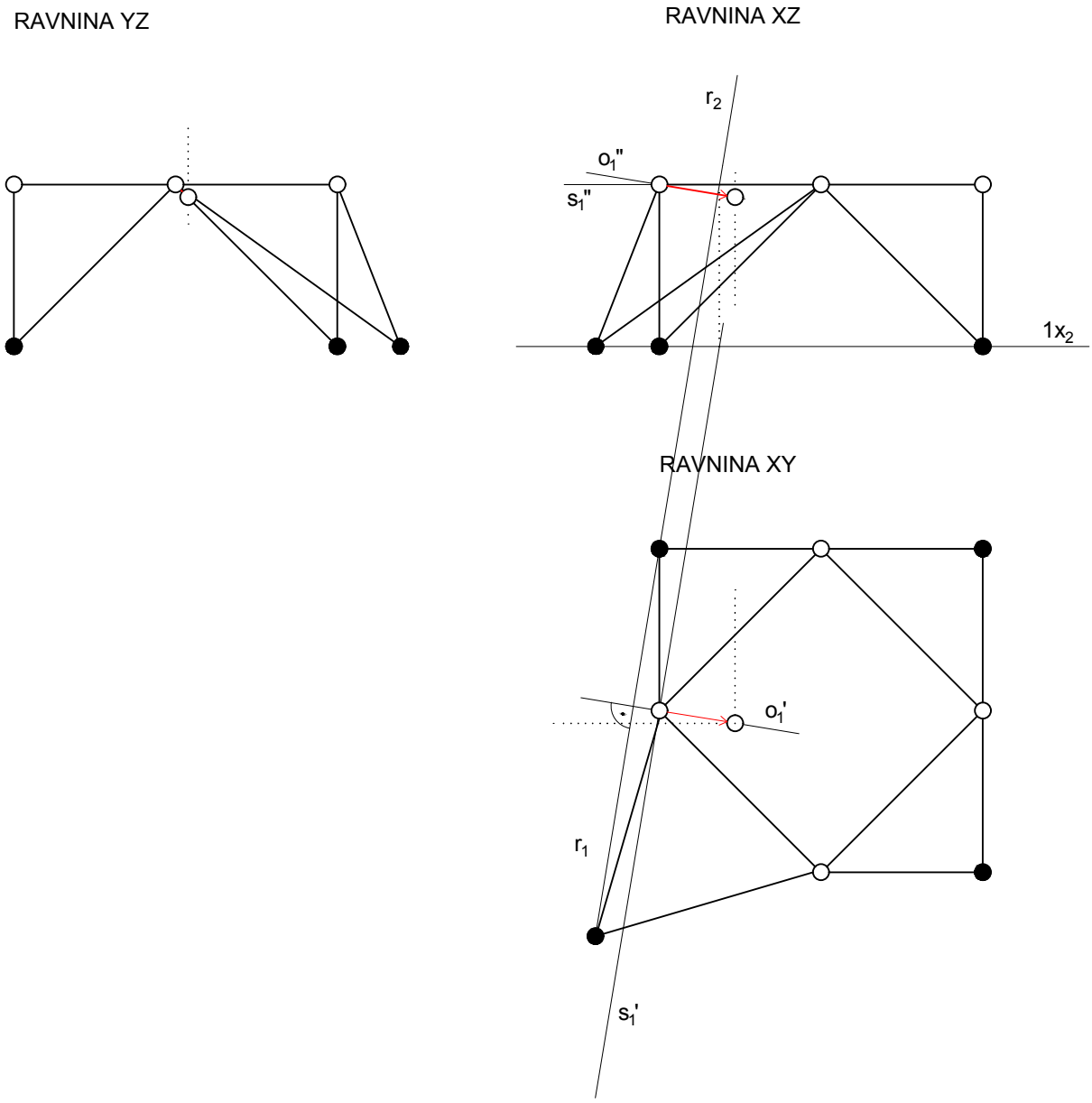
Da bi se odredio pomak mehanizma, najprije se utvrđuje pravac po kojem se svaki slobodni čvor može gibati. Svaki je slobodni čvor gornjega četverokuta s dva kosa štapa vezan za dva ležajna čvora. Ta dva štapa određuju ravninu, a pomak čvora koji ne mijenja duljinu nijednoga od njih mora biti okomit na oba, dakle okomit na tu ravninu. Smjer gibanja čvora stoga je okomica, odnosno normala, na ravninu dvaju kosih štapova kojima je čvor vezan za ležajeve. U prikazu je ta okomica označena s o_1 (slika 32.).

Smjer gibanja određuje se Mongeovom metodom, preko tragova te ravnine [6]. Prvi trag, označen s r_1, presječnica je ravnine s tlocrtnom ravninom, a budući da oba ležajna čvora leže u tlocrtnoj ravnini, prvi je trag upravo spojnica tih dvaju ležajeva. Drugi trag, označen s r_2, presječnica je s nacrtnom ravninom i određuje se s pomoću sutražnice prve skupine. Ta je sutražnica, označena s s_1, pravac ravnine paralelan s prvim tragom, pa je njezin tlocrt paralelan s r_1, a nacrt paralelan s osi x [6]. Promatrani čvor leži na toj sutražnici. Točka u kojoj sutražnica siječe os x podiže se na nacrt sutražnice, čime se dobiva njezino drugo probodište. Budući da se tragovi ravnine sijeku na osi x, spajanjem toga probodišta s presjekom prvoga traga i osi dobiva se drugi trag r_2 (slika 32.).

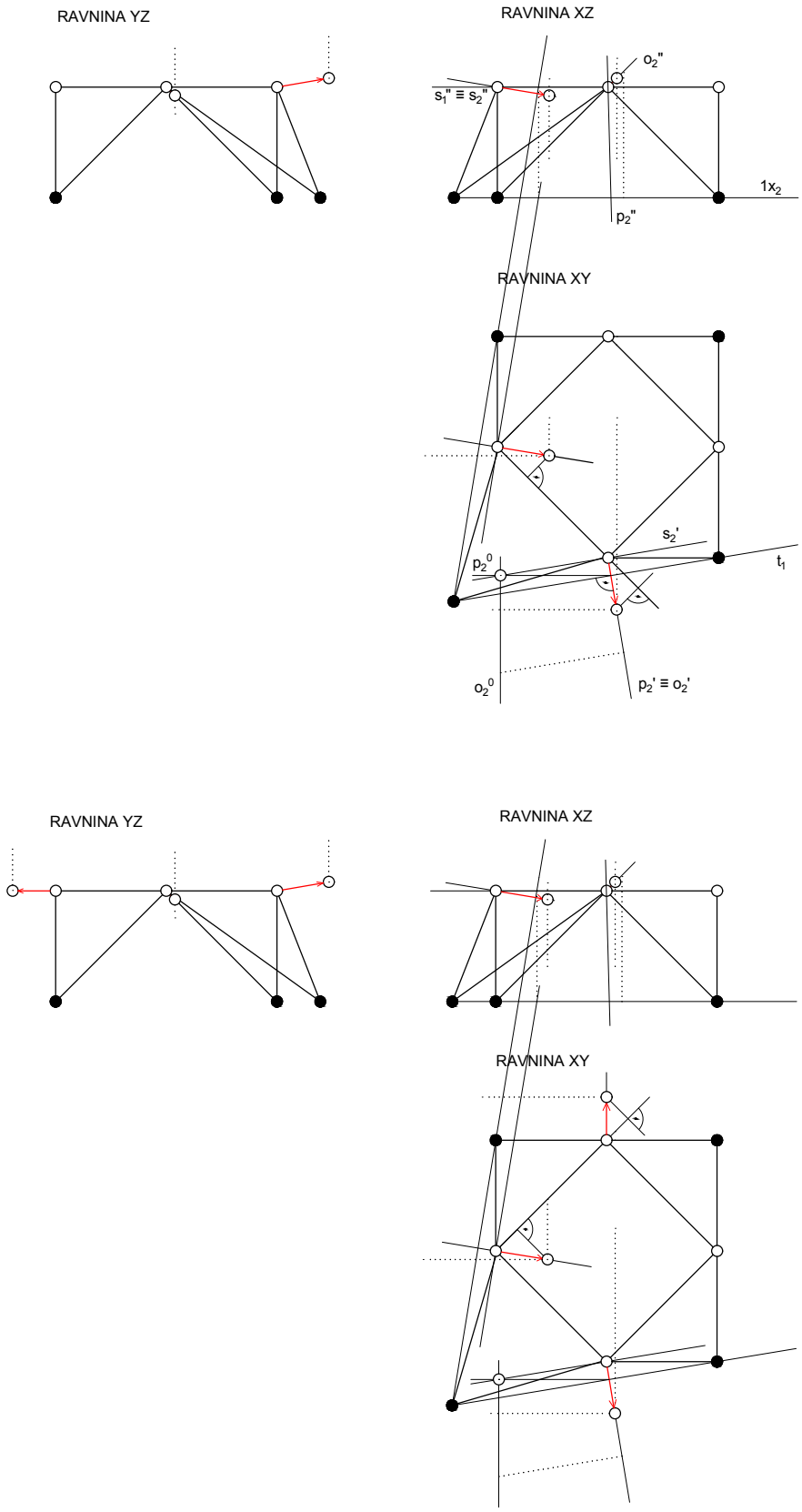
Smjer pomaka čvora sada se crta kao okomica o na tako određenu ravninu. Prema svojstvu okomitosti pravca i ravnine u Mongeovoj metodi, tlocrt okomice okomit je na prvi trag, a nacrt okomice na drugi trag, dakle $o' \perp r_1$ i $o'' \perp r_2$ [6].

Kada je smjer gibanja jednoga čvora poznat, pomaci ostalih čvorova određuju se prijenosom kroz prsten. Jednome se slobodnom čvoru zada proizvoljan pomak po njegovu smjeru gibanja, a zatim se taj pomak prenosi na susjedni čvor preko uvjeta da se duljina štapa među njima ne mijenja: u teoriji malih pomaka projekcije pomaka dvaju krajeva štapa na spojnicu tih čvorova moraju biti jednake. Time je određen pomak susjednoga čvora, pa se postupak ponavlja redom kroz cijeli prsten. Pomaci se usklade oko cijeloga prstena, pa je pomak svih čvorova moguć bez promjene duljina štapova. Sistem je stoga mehanizam s jednim stupnjem slobode, $m = 1$.

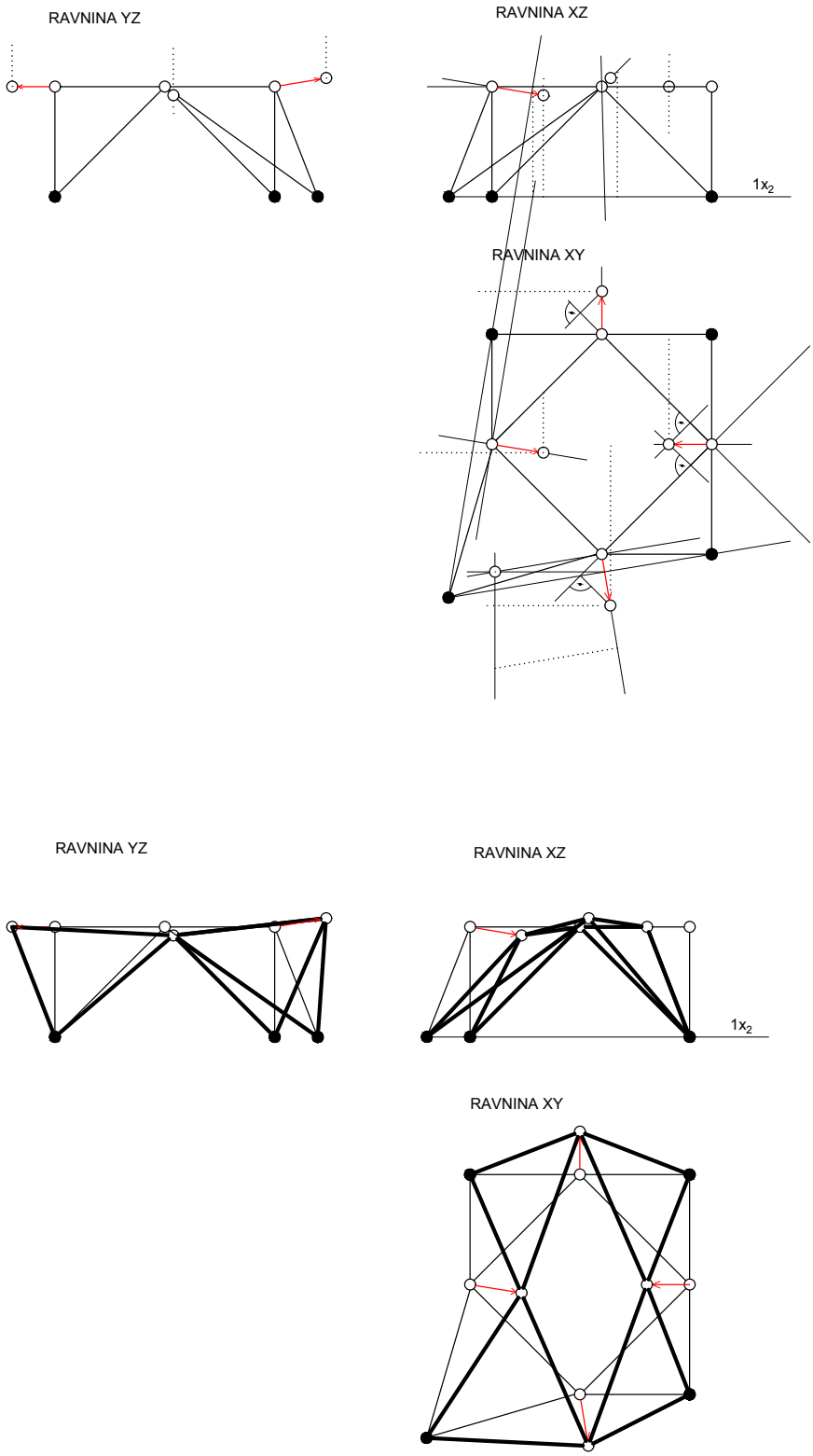
.



Slika 32. Konstrukcija smjera gibanja čvora



Slika 33. Pomaci četverokutnoga sistema s jednom osi simetrije, projekcija na tri ravnine



Slika 34. Pomaci četverokutnoga sistema s jednom osi simetrije, projekcije na tri ravnine

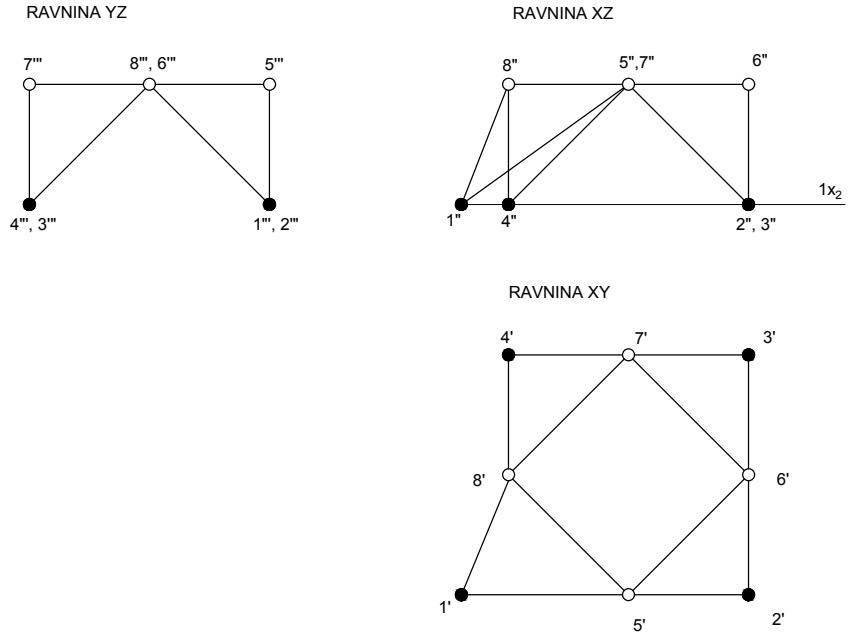
8.2. Stanje unutarnje ravnoteže

Sistem zadržava i stanje unutarnje ravnoteže. Postoji raspodjela sila u štapovima koja je u ravnoteži u svim slobodnim čvorovima bez vanjskoga opterećenja, dakle takva da se u svakom čvoru sile iz priključenih štapova poništavaju. Time je četverokutni sistem s jednom osi simetrije i dalje statički neodređeni mehanizam, sa $s = m = 1$, kao i potpuno simetrični slučaj.

Iz toga slijedi da je jedna os simetrije dovoljna da sistem zadrži oba svojstva. Smanjenje simetrije s dvije (zapravo četiri) osi na jednu ne mijenja svojstvo sistema: on ostaje istodobno geometrijski promjenjiv i statički neodređen.

9. NESIMETRIČNI ČETVEROKUTNI SISTEM

U prethodnom je poglavlju razmotren četverokutni sistem s jednom osi simetrije, koji je zadržao svojstvo statički neodređenoga mehanizma. Sada se razmatra nesimetrični četverokutni sistem (slika 35.), kod kojega sistem nema nijedne osi simetrije. Time se dovršava niz u kojem se simetrija sistema postupno smanjuje, od potpuno simetričnoga četverokutnoga, preko onoga s jednom osi, do nesimetričnoga. Geometrija se i ovdje prikazuje Mongeovom metodom, u tlocrtu, nacrtu i bokocrtu, s točkama označenima crticama prema ravnini projekcije [6].



Slika 35.: Nesimetrični četverokutni sistem

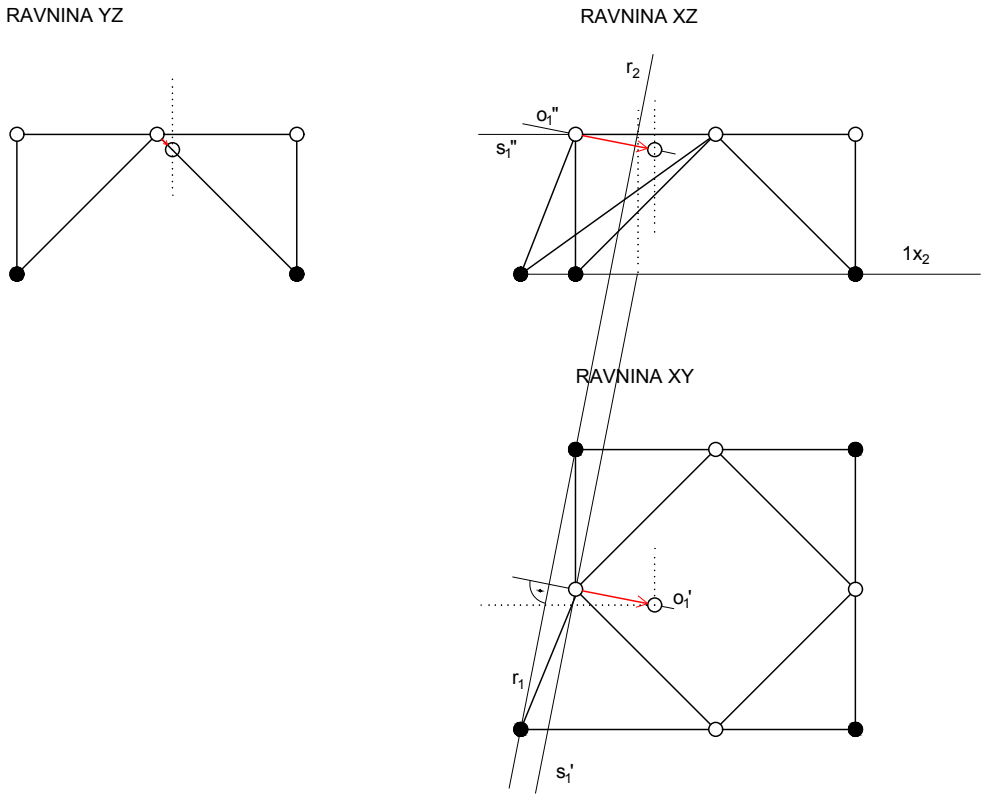
9.1. Nepostojanje pomaka

Pomak se i ovdje pokušava odrediti na isti način kao i kod slučaja s jednom osi simetrije. Svaki je slobodni čvor vezan dvama kosim štapovima za dva ležajna čvora, koji određuju ravninu, pa je smjer gibanja čvora okomica o na tu ravninu. Ta se okomica konstruira Mongeovom metodom, preko tragova ravnine: prvi trag r_1 spojnica je dvaju ležajeva, a drugi trag r_2 određuje se s pomoću sutražnice prve skupine na kojoj leži promatrani čvor [6]. Tlocrt okomice okomit je na prvi trag, a nacrt na drugi.

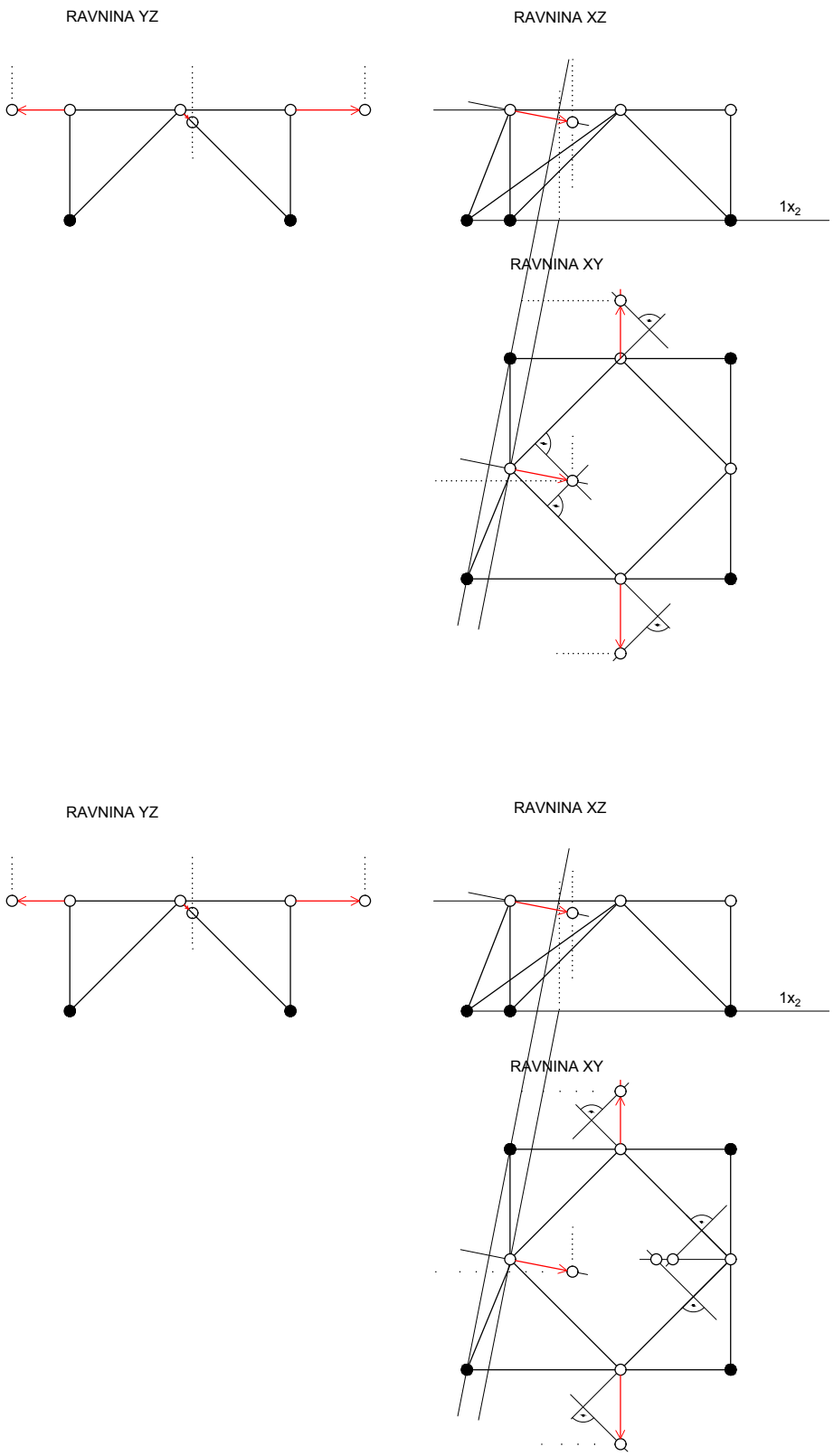
Pomaci se zatim pokušavaju prenijeti kroz prsten. Jednome se slobodnom čvoru zadaje proizvoljan pomak po njegovu smjeru gibanja. Taj se pomak prenosi na susjedni čvor preko uvjeta da se duljina štapa među njima ne mijenja, pa projekcije pomaka dvaju krajeva štapa na njihovu spojnicu moraju biti jednake. Time je određen pomak susjednoga čvora, a postupak se nastavlja redom kroz prsten (slike 36. i 37.).

Kada se postupak provede oko cijeloga prstena, pomak posljednjega čvora određen je dvama uvjetima. Pokazuje se da se ta dva uvjeta ne mogu zadovoljiti istodobno: pomak koji slijedi iz jedne spojnice razlikuje se od pomaka koji slijedi iz druge. Pomak koji bi zadovoljio sve štapove istodobno stoga ne postoji, pa nijedan pomak prstena nije moguć bez promjene duljina štapova (Slika 37.). Sistem je geometrijski nepromjenjiv, $m = 0$.

Razlog leži u izostanku simetrije. Kod simetričnih je četverokuta raspored štapova takav da se zadani pomak može uskladiti oko cijeloga prstena i zatvoriti u jedinstven mehanizam. Kada se simetrija ukloni, to usklađivanje više nije moguće, pa pomak bez promjene duljina štapova ne postoji.



Slika 36. Pokušaj pomaka



Slika 37. Pokušaj pomaka

9.2. Usporedba sa simetričnim slučajevima

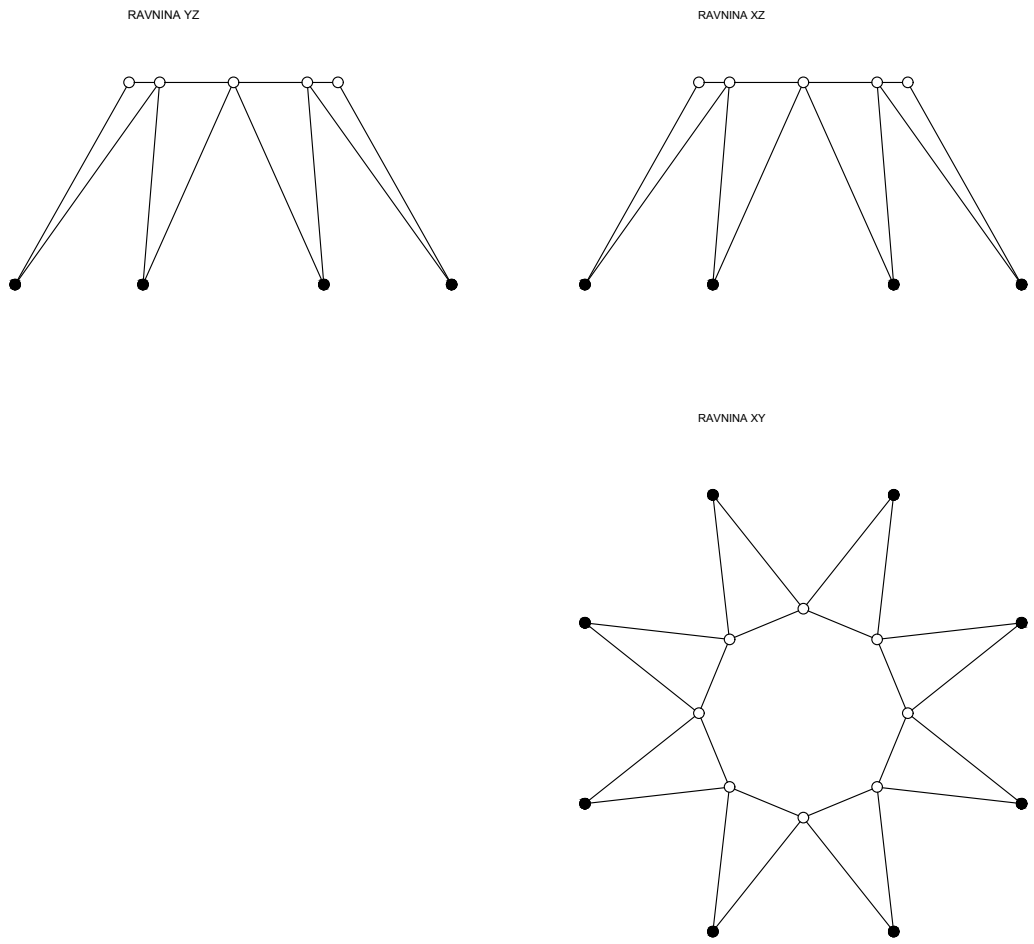
Nesimetrični se četverokutni sistem ponaša drukčije od simetričnih. Potpuno simetrični četverokutni sistem i četverokutni sistem s jednom osi simetrije statički su neodređeni mehanizmi, sa $s = m = 1$, dok nesimetrični četverokutni sistem nema ni mehanizma ni stanja unutarnje ravnoteže, $s = m = 0$. Premda u svim slučajevima prebrojavanje daje istu vrijednost $b - 3n_f = 0$, sistemi se bitno razlikuju: nesimetrični je četverokutni sistem, kao i trokutni, geometrijski nepromjenjiv i statički određen.

Time se pokazuje da simetrija nije sporedno svojstvo, nego upravo ono što kod četverokuta omogućuje pojavu mehanizma i stanja unutarnje ravnoteže. Već je jedna os simetrije dovoljna da sistem zadrži ta svojstva, dok se njihovim potpunim gubitkom sistem ponaša kao obična geometrijski nepromjenjiva konstrukcija.

10. OSMEROKUT

Na početku rada osmerokut katedrale u Elyju poslužio je kao motivacija, primjer konstrukcije čije ponašanje klasično prebrojavanje ne objašnjava. Nakon što su na jednostavnijim prstenima objašnjeni pojmovi mehanizma i stanja unutarnje ravnoteže te pokazana uloga simetrije, osmerokut se sada može razmotriti s razumijevanjem.

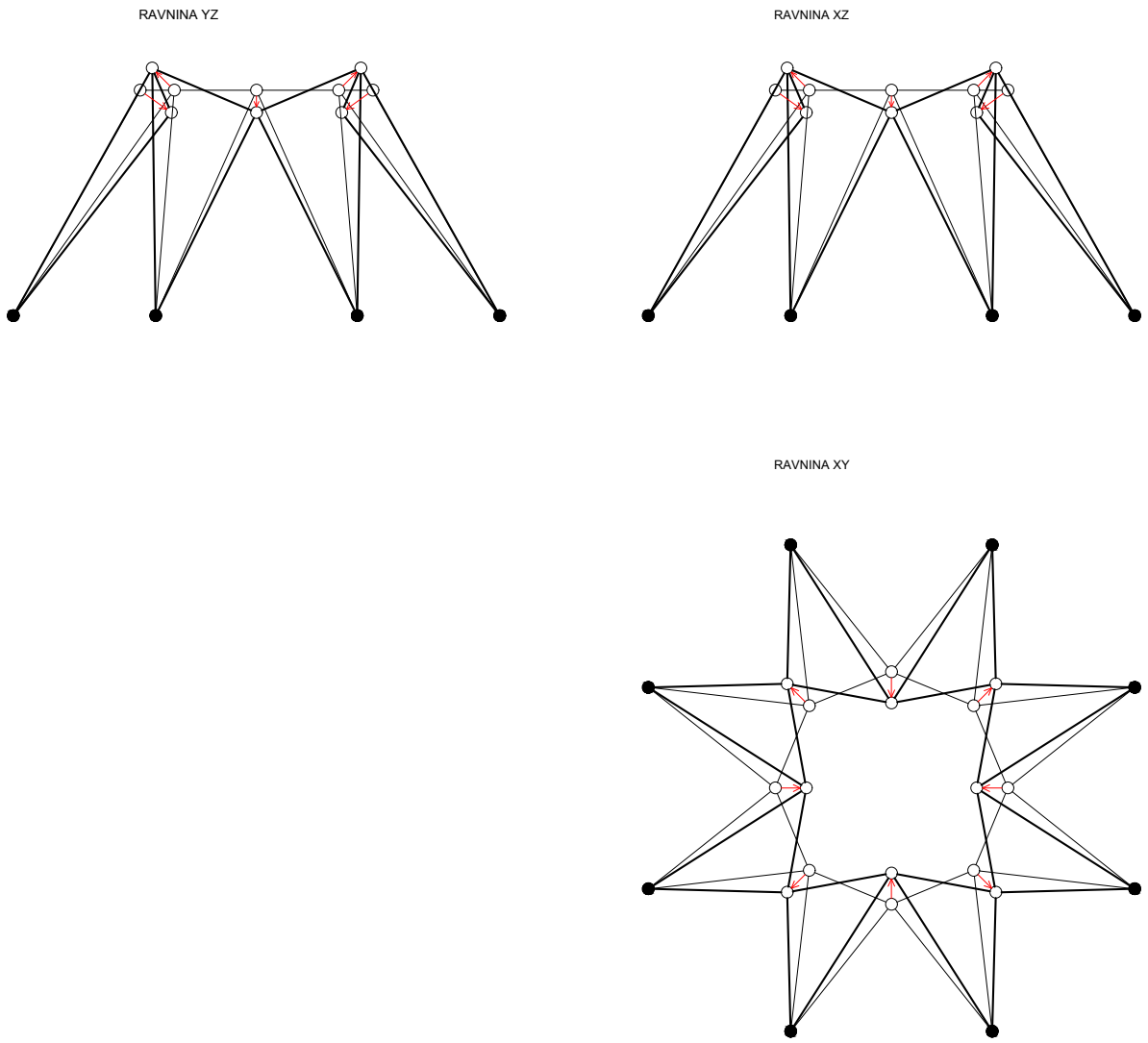
Osmerokutni je prsten građen kao i prethodni prstenasti sistemi, samo s osam stranica. Gornji osmerokut povezan je kosim štapovima s ležajnim čvorovima. Sistem ima osam slobodnih čvorova gornjega osmerokuta, osam ležajnih čvorova i dvadeset i četiri štapa. Prebrojavanje daje $b - 3n_f = 3 \cdot 8 - 24 = 0$, pa bi po Maxwellovu pravilu konstrukcija trebala biti geometrijski nepromjenjiva i statički određena. No osmerokut je, poput simetričnoga četverokutnog sistema, potpuno simetričan prsten. Upravo ta simetrija, kao što je pokazano na prethodnim primjerima, omogućuje istodobnu pojavu mehanizma i stanja unutarnje ravnoteže.



Slika 38. Osmerokut, prikaz u projekcijama na tri ravnine

10.1. Pomaci mehanizma

Osmerokutni prsten ima zrcalnu simetriju s obzirom na ravninu koja prolazi kroz dva nasuprotna vrha gornjega osmerokuta. Kako je pokazano u poglavlju o parnom i neparnom broju stranica, upravo ta simetrija omogućuje pojavu mehanizma [5]. Sistem stoga dopušta pomak slobodnih čvorova bez promjene duljina štapova: čvorovi gornjega osmerokuta gibaju se po svojim smjerovima, a prsten pri tome mijenja oblik. Riječ je o mehanizmu s jednim stupnjem slobode, $m = 1$.

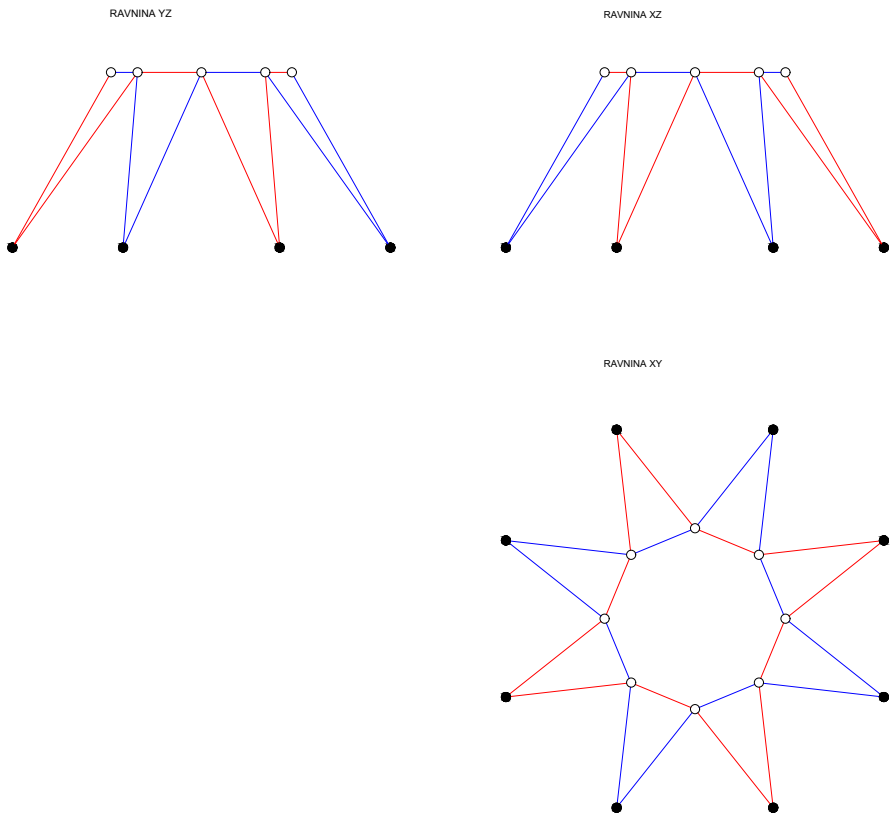


Slika 39. Pomaci osmerokuta, projekcije na tri ravnine

10.2. Stanje unutarnje ravnoteže

Osmerokutni prsten ima i stanje unutarnje ravnoteže, raspodjelu sila u štapovima koja je u ravnoteži u svim slobodnim čvorovima bez vanjskoga opterećenja. U svakom je slobodnom čvoru zbroj sila iz priključenih štapova jednak nuli, premda na sistem ne djeluje nikakva vanjska sila. Na prikazu su vlačni štapovi označeni plavom, a tlačni crvenom bojom.

Time je osmerokut, kao i simetrični četverokut, statički neodređeni mehanizam sa $s = m = 1$. Premda prebrojavanje daje $b - 3n_f = 0$, što bi odgovaralo geometrijski nepromjenjivoj i statički određenoj konstrukciji, osmerokut to nije: istodobno je geometrijski promjenjiv i jedanput statički neodređen. To je upravo ponašanje koje je na početku rada djelovalo neobično, a sada se objašnjava kao posljedica parnoga broja stranica i pripadne zrcalne simetrije prstena.



Slika 40. Stanje unutarnje ravnoteže osmerokuta

10.3. Osmerokut katedrale u Elyju

Time se objašnjava tvrdnja Wade i Heymana, prema kojoj je osmerokut bio arhitektonsko remek-djelo, ali u izvornom obliku i donekle konstrukcijska pogreška [3]. Kao statički neodređeni mehanizam, osmerokutni prsten u idealnom modelu zglobnih štapova nije geometrijski nepromjenjiv, nego dopušta pomak bez promjene duljina štapova. Takva konstrukcija ne može pouzdano nositi proizvoljno opterećenje, jer se opterećenje u smjeru mehanizma ne može uravnotežiti silama u štapovima.

Postavlja se pitanje kako je onda osmerokut mogao nositi lanternu stoljećima. Jedan dio odgovora nalazi se u vrsti opterećenja. Sistem ne može uravnotežiti svako opterećenje, ali opterećenje koje ne pokreće mehanizam uravnotežuje silama u štapovima. Težina lanterne, raspoređena na čvorove prstena, upravo je takvo opterećenje, pa ga konstrukcija može preuzeti unatoč svojoj pomičnosti. Wade i Heyman su pritom istaknuli i da nejednolika raspodjela sila, kakva nastaje pri stvarnom opterećenju, ne narušava osjetljivu ravnotežu osnovnoga prostornog okvira [3].

Drugi je dio odgovora u tome što konstrukcija u izvornom obliku nije ostala nepromijenjena. Nekoliko je stoljeća nakon gradnje zatečena u lošem stanju, pa su pri kasnijim obnovama uvedene dijagonalne ukrute i potporno okvirno pojačanje, koji su je učinili pouzdanom [3].

11. ZAKLJUČAK

U radu su razmotreni statički neodređeni mehanizmi, sistemi koji su istodobno geometrijski promjenjivi i statički neodređeni. Pokazano je da ih klasično Maxwellovo pravilo ne prepoznaje, jer prebrojavanjem štapova i čvorova otkriva samo razliku $s - m$, a ne pojedinačne vrijednosti. Calladineovo poopćenje $b - 3n_f = s - m$ tu razliku objašnjava i omogućuje da se takvi sistemi prepoznaju.

Na nizu prstenastih sistema pokazalo se da to ponašanje ovisi o broju stranica i o simetriji prstena. Sistemi s prstenima s parnim brojem stranica statički su neodređeni mehanizmi, dok oni s neparnim brojem to nisu. Jednako tako, simetrični prstenasti sistemi zadržavaju to svojstvo, dok ga nesimetrični gube.

Sva su ta svojstva prepoznata na osmerokutu katedrale u Elyju. Kao prsten s parnim brojem stranica, osmerokut je statički neodređeni mehanizam sa $s = m = 1$, čime je objašnjeno njegovo ponašanje koje je u uvodu, gledano samo kroz prebrojavanje, djelovalo neobično.

POPIS LITERATURE

[1] Krešimir Fresl: *Nelinearna statika štapnih konstrukcija: predavanja*. Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2023.. Dostupno na: https://master.grad.hr/nastava/gs/nls/nls.pdf

[2] Krešimir Fresl: *Jednostavni statički određeni rešetkasti nosači*, sažetak predavanja, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2018. Dostupno na: https://master.grad.hr/nastava/gs/meh1/jsor.pdf

[3] Elizabeth C. Wade i Jacques Heyman: *The timber octagon of Ely Cathedral*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 1, vol. 78, str. 1421–1436, 1985.

[4] Christopher R. Calladine: *Buckminster Fuller's "Tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames*, International Journal of Solids and Structures, vol. 14, br. 2, str. 161–172, 1978.

[5] Tibor Tarnai: *Finite Mechanisms and the Timber Octagon of Ely Cathedral*, Structural Topology, br. 14, str. 9–20, 1988.

[6] Sonja Gorjanc i suradnice: *Nacrtna geometrija*, mrežni udžbenik, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2019. Dostupno na: https://www.grad.hr/geometrija/udzbenik/

[7] Seton M. *Ely Cathedral* [Internet]. 1. siječnja 2012. Dostupno na: https://markseton.co.uk/2012/01/01/ely-cathedral/

[8] Hassocks5489. *Ely Cathedral 017* [fotografija]. Wikimedia Commons; 2010. Dostupno na: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ely_Cathedral_017.jpg

[9] Krešimir Fresl: *GS 1 — Zadatak 3: grafičkim postupkom u projekcijama uravnotežite silu F silama u štapovima prostorne rešetke*. Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2024. Dostupno na: https://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/isp/1-240701-3.pdf

[10] Krešimir Fresl: *Statički određeni prostorni rešetkasti nosači: prezentacija predavanja*. Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu. Dostupno na: https://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/pdn/p-pr.pdf

POPIS SLIKA

Slika 1.: Osmerokut i lanterna katedrale u Elyju [7] ... 3
Slika 2.: Osmerokut katedrale u Elyju [8] ... 3
Slika 3.: Drvena rešetkasta konstrukcija katedrale u Elyju [3] ... 4
Slika 4.: Pojednostavljeni model glavne nosive strukture ... 5
Slika 5.: Simetrični prstenasti četverokut, prikaz u projekcijama na tri ravnine ... 9
Slika 6.: Simetrični prstenasti četverokut, aksonometrijski prikaz ... 9
Slika 7.: Pomaci simetričnoga prstenastog četverokuta, projekcije na tri ravnine ... 10
Slika 8.: Pomaci simetričnoga prstenastog četverokuta, aksonometrijski prikaz ... 11
Slika 9.: Četverokutni sistem s uklonjenim štapom prstena, projekcije na tri ravnine ... 12
Slika 10.: Četverokutni sistem s uklonjenim štapom prstena, aksonometrijski prikaz ... 12
Slika 11.: Pomaci statički određenog sistema, projekcije na tri ravnine ... 13
Slika 12.: Pomaci statički određenog sistema, aksonometrijski prikaz ... 13
Slika 13.: Opterećenje parom sila na mjestu uklonjenoga štapa ... 14
Slika 14.: Opterećenje parom sila na mjestu uklonjenoga štapa ... 15
Slika 15.: Grafičko uravnoteženje čvora nakon uklanjanja štapa ... 16
Slika 16.: Sile u štapovima pod opterećenjem, projekcije na tri ravnine ... 17
Slika 17.: Sile u štapovima pod opterećenjem, aksonometrijski prikaz ... 17
Slika 18.: Simetrični četverokutni sistem s kosim pravcima gibanja, projekcije na tri ravnine ... 18
Slika 19.: Simetrični četverokutni sistem s kosim pravcima gibanja, prostorni prikaz ... 19
Slika 20.: Pomaci po kosim pravcima gibanja, projekcije na tri ravnine ... 20
Slika 21.: Pomaci po kosim pravcima gibanja, prostorni prikaz ... 20
Slika 22.: Stanje unutarnje ravnoteže, projekcije na tri ravnine ... 21
Slika 23.: Stanje unutarnje ravnoteže, prostorni prikaz ... 21
Slika 24.: Vanjsko opterećenje koje se može uravnotežiti ... 22
Slika 25.: Prstenasti sistem s označenim štapovima u izdvojenom čvoru, aksonometrijski prikaz ... 24
Slika 26.: Grafički postupak određivanja sila u štapovima u izdvojenom čvoru ... 25
Slika 27.: Konačna raspodjela sila u štapovima ... 25
Slika 28.: Trokutni prsten, projekcije na tri ravnine ... 26
Slika 29.: Trokutni prsten, aksonometrijski prikaz ... 27
Slika 30.: Pokušaj pomaka trokuta, skraćeni štap istaknut crvenom bojom ... 27
Slika 31.: Četverokutni sistem s jednom osi simetrije ... 30
Slika 32. Konstrukcija smjera gibanja čvora ... 32
Slika 33. Pomaci četverokutnoga sistema s jednom osi simetrije, projekcija na tri ravnine ... 33

Slika 34. Pomaci četverokutnoga sistema s jednom osi simetrije, projekcije na tri ravnine 34
Slika 35.: Nesimetrični četverokutni sistem 36
Slika 36. Pokušaj pomaka 37
Slika 37. Pokušaj pomaka 38
Slika 38. Osmerokut, prikaz u projekcijama na tri ravnine 40
Slika 39. Pomaci osmerokuta, projekcije na tri ravnine 41
Slika 40. Stanje unutarnje ravnoteže osmerokuta 42