



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

EMA VIDOVIĆ

POSTUPAK MAXWELLA I CREMONE

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2025.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Ema Vidović

Maxwell-Cremona's method

FINAL EXAM

Supervisor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2025.

ZAHVALE

Iskreno zahvaljujem svom mentoru, profesoru Krešimiru Freslu, na trudu i vremenu koje je uložio u moj završni rad. Njegova stručna podrška, korisni (i zabavni) savjeti i strpljenje imali su presudnu ulogu u oblikovanju ovog rada te su me uvelike motivirali tijekom cijelog procesa.

Od srca zahvaljujem i svojim babama, koje su mi svakodnevnom brigom, pažnjom i interesom za moje studiranje davale poticaj te svojim molitvama pratile svaki moj korak.

SAŽETAK

U radu se obrađuju osnovna obilježja rešetkastih nosača, njihova podjela, uvjeti geometrijske nepromjenjivosti i statičke određenosti te postupci analize pomoću grafičkih metoda. Naglašena je važnost konstrukcije trokuta u ravnini i tetraedra u prostoru kao osnovnih elemenata koji osiguravaju geometrijsku nepromjenjivost sustava. Opisani su Maxwellovo pravilo i metoda nultoga opterećenja kao kriteriji za ispitivanje statičke određenosti i nepromjenjivosti.

Grafički postupci – metoda čvorova, Culmannov postupak i Maxwell–Cremonin plan sila – teorijski su opisani i prikazani u praktičnim primjerima. Poseban je naglasak stavljen na prostorne rešetke, gdje se primjenjuju postupci nacrtne geometrije za konstruiranje poligona sila i provjeru ravnoteže. Primjer Schwedlerove kupole pokazuje specifičnost konstrukcije i načine na koje se grafičkim putem mogu odrediti sile u štapovima.

Rezultati provedenih analiza potvrđuju da grafičke metode, unatoč pojavi računalnih alata, i dalje imaju značajnu praktičnu vrijednost, jer omogućuju vizualno razumijevanje odnosa sila i konstrukcijske logike rešetkastih nosača.

SUMMARY

The paper deals with the basic characteristics of truss structures, their classification, the conditions of geometric invariability and static determinacy, as well as the procedures of analysis using graphical methods. The importance of the triangle in the plane and the tetrahedron in space is emphasized as the fundamental elements that ensure the rigidity of the system. Maxwell's rule and the method of zero load are described as criteria for examining static determinacy and invariability.

Graphical methods – the method of joints, Culmann's procedure, and the Maxwell–Cremona force diagram – are presented through theoretical description and practical examples. Special emphasis is placed on spatial trusses, where the principles of descriptive geometry are applied to construct force polygons and verify equilibrium. The example of the Schwedler dome illustrates the specific features of this structure and the ways in which forces in the members can be determined graphically.

The results of the conducted analyses confirm that graphical methods, despite the advent of computer tools, still possess significant practical value, as they provide a visual understanding of force relationships and the structural logic of trusses.

SADRŽAJ

ZAHVALE.....	i
SAŽETAK.....	ii
SUMMARY.....	iii
SADRŽAJ.....	iv
1. UVOD.....	1
2. RAVNINSKI I PROSTORNI REŠETKASTI NOSAČI.....	2
2.1. Karakteristike statički određenih rešetkastih nosača.....	3
2.2. Elementarna pravila koja vrijede općenito za rešetkaste nosače.....	11
3. GRAFIČKI POSTUPCI ODREĐIVANJA SILA U ŠTAPOVIMA.....	14
3.1. (Jednostavna) metoda čvorova.....	15
3.2. Culmannov postupak.....	19
3.3. Maxwell-Cremonin plan sila.....	21
3.4. Geometrijska konstrukcija ravnoteže za prostorne rešetke.....	30
4. PRIMJER.....	33
5. ZAKLJUČAK.....	46
POPIS LITERATURE.....	47
POPIS SLIKA.....	48

1. UVOD

Rešetkasti nosači jedan su od temeljnih tipova konstrukcija u građevinarstvu i strojarstvu. Njihova važnost proizlazi iz jednostavne, a istovremeno iznimno učinkovite geometrijske i statičke organizacije štapova međusobno povezanih u čvorovima. Takav način oblikovanja omogućuje racionalnu upotrebu materijala uz visoku nosivost i stabilnost. Tijekom razvoja inženjerske prakse rešetkaste su konstrukcije pronašle široku primjenu u mostovima, krovnim sustavima, kupolama i drugim prostornim strukturama.

Osnovni cilj ovoga rada jest prikazati temeljne principe oblikovanja i proračuna rešetkastih nosača, s naglaskom na statički određene sustave. Posebna pozornost posvećena je analizi ravninskih i prostornih rešetaka, te objašnjenju postupaka određivanja unutarnjih sila u štapovima metodama grafo - statike. Pritom su razrađeni i primjeri praktične primjene, među kojima posebno mjesto zauzima analiza Schwedlerove kupole kao reprezentativnog prostornog rešetkastog sustava.

2. RAVNINSKI I PROSTORNI REŠETKASTI NOSAČI

Nosač je naziv za svako kruto tijelo vezano za nepokretnu ravninu i opterećeno silama. Između ostalih, moguće su dvije podjele nosača. Prema prvoj, nosači se dijele na:

- ravninske i prostorne, ovisno o tome leže li os nosaca i njegovo opterećenje u jednoj ili u više ravnina.

Prema drugoj se podjeli nosači dijele na:

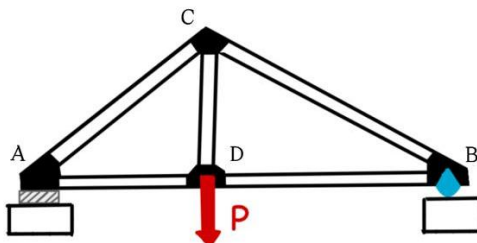
- rešetkaste i punostijene (gredne) nosače, ovisno o tome javljaju li se u njihovim elementima samo uzdužne sile ili uzdužne i poprečne sile i momenti savijanja i (u prostornom slučaju) torzije.

U ovom radu proučit ćemo rešetkaste nosače koji su statički određeni, tj. nosače u kojima se sve nepoznate sile mogu odrediti pomoću jednadžbi ravnoteži statike krutoga tijela.

Rešetkastim se nosačem (ili rešetkom) naziva struktura, odnosno konstrukcija načinjena od ravnih štapova međusobno zglobno spojenih u čvorovima tako da oblikuju nepromjenjiv sustav. Osnovna je pretpostavka kod rešetkastih nosača da vanjske sile djeluju samo u čvorovima, tako da u štapovima postoje samo uzdužne sile, vlačne ili tlačne; vlastita se težina pri tome zanemaruje. Proračun rešetkastih nosača provodi se određivanjem unutarnjih sila u štapovima nosača. Nalaženje nepoznatih sila u štapovima može se provoditi analitičkim ili grafičkim postupcima. U ovom će radu biti opisani načini nalaženja sila u štapovima ravninskih i prostornih rešetkastih nosača grafičkim postupcima.

2.1. Karakteristike statički određenih rešetkastih nosača

Rešetkasti je nosač jedan od osnovnih tipova inženjerskih konstrukcija. Tipičan ravninski rešetkasti nosač prikazan je na slici 1.

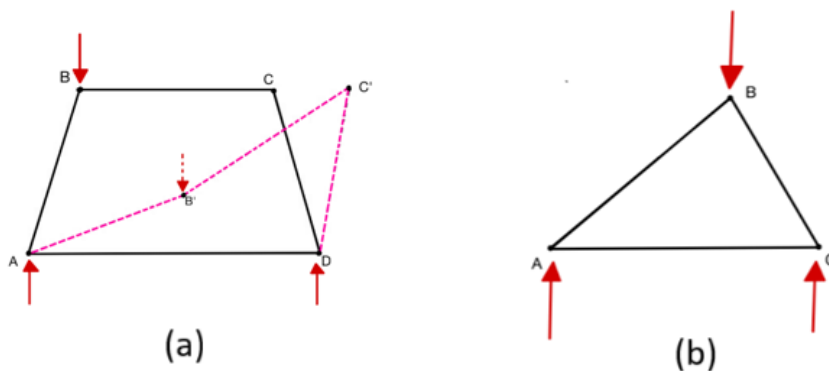


Slika 1.

Rešetka se sastoji od ravnih štapova zglobojno spojenih u čvorovima. Štapovi su spojeni samo na svojim krajevima; nijedan štap ne prolazi kroz čvor. Većina stvarnih konstrukcija sastoji se od više rešetaka povezanih u prostorni okvir.

Razmotrimo sada rešetku sa slike 2.a., koja se sastoji od četiri štapa spojena zglobovima u točkama A, B, C i D. Ako se opterećenje primijeni u točki B, ta će rešetka promijeniti oblik pomacima sklopa krutih tijela, bez deformacija štapova, i potpuno izgubiti izvorni oblik.

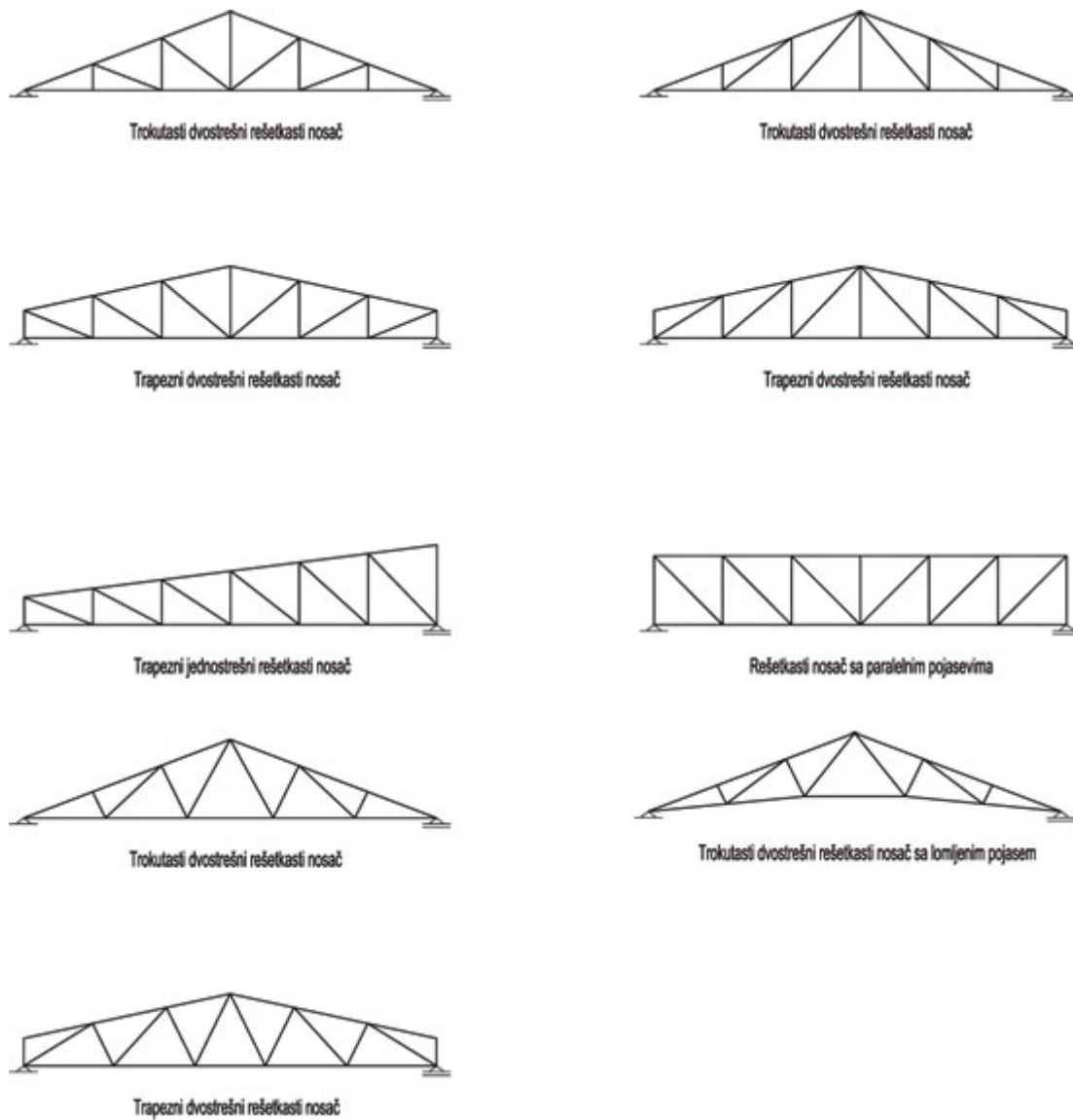
Nasuprot tome, rešetka sa slike 2.b. sastavljena je od tri štapa, spojena zglobovima u točkama A, B i C. Kada se ista sila primijeni u točki B, ova rešetka neznatno mijenja oblik samo zbog deformacija štapova.



Slika 2.

Prema tome zaključujemo da je najjednostavniji sklop rešetkastoga diska u ravni trokut. Formirajući trokut dobiva se kruta figura koja mijenja oblik samo zbog deformacija štapova (pomaci bez deformacija su nemogući). Takav sklop nazivamo geometrijski nepromjenjivim.

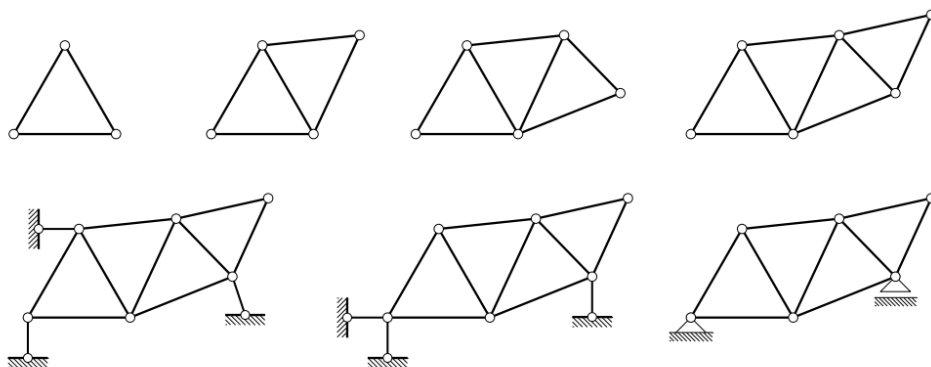
Nekoliko tipičnih rešetkastih konstrukcija prikazano je na slici 3.



Slika 3.

Rešetka je geometrijski nepromjenljiv sustav u ravni ako je načinjena od štapova spojenih tako da čine trokute. Geometrijska nepromjenjivost rešetke uvjetovana je ovisnošću između broja štapova i broja čvorova. Ovdje je prikazan najjednostavniji oblik geometrijske nepromjenjivosti rešetkastog diska, sastavljenog od najjednostavnijih geometrijskih nepromjenjivih sklopova tj. trokutova. Svakom nosaču odredi se karakterističan, odnosno polazni trokut. Od tog trokuta se može započeti konstrukcija postupnim dodavanjem novih

čvorova uz pomoć samo dva štapa. Ta dva štapa se vežu u čvor uz uvjet da ne leže na istom pravcu. Zatim slijedi spajanje tako sastavljenog tijela s podlogom kao na primjeru na slici 4.



Slika 4.

Neka je s broj štapova, a n broj čvorova.

Znači da su za ovaj prvi trokut potrebna tri štapa i tri čvora. Za svaki idući čvor (na primjer IV) potrebna su dva štapa za formiranje trokuta, tj. za

$n - 3$ čvora potrebna su $2 * (n - 3)$ štapova.

Dodamo li ovome prva tri štapa, tada je

$$s = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3.$$

Rešetke koje, dakle, ispunjavaju uvjet,

$$s = 2n - 3$$

iznutra su statički određene. Za

$$s > 2n - 3$$

rešetka je iznutra statički neodređena, a za

$$s < 2n - 3$$

rešetka je mehanizam i (u većini slučajeva) ne može služiti kao nosač. Dobiveni se sklop ponaša kao kruto tijelo koje u ravnini ima tri stupnja slobode. Za geometrijsku nepromjenjivost u odnosu na ravninu (za sprečavanje pomaka krutoga tijela) treba dobiveni disk spojiti s podlogom trima štapovima. Tada je

$$s = (2n - 3) + 3 = 2n.$$

Kao što trokut predstavlja osnovni element rešetkastog sistema u ravnini, u prostoru tu ulogu preuzima tetraedar. Na isti način kao što se povezivanjem trokuta dobiva ravninski

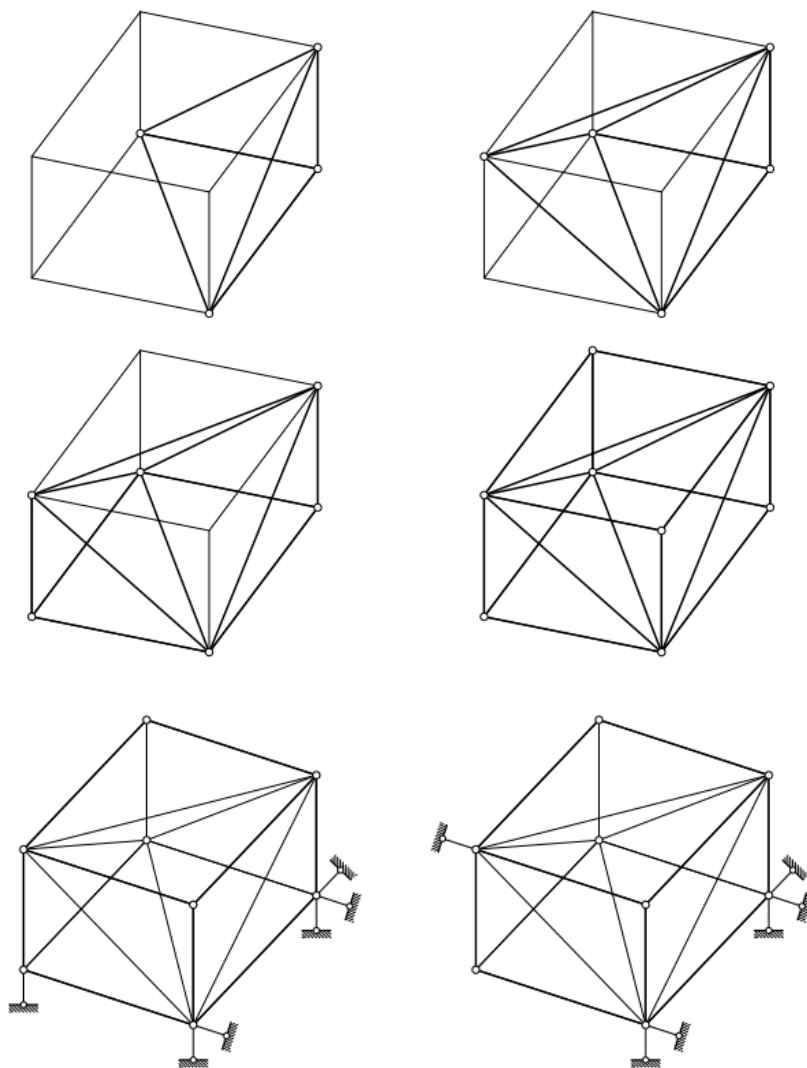
sustav, dodavanjem tetraedara možemo formirati prostorni sustav. Tetraedar sastavljen od štapova ima ukupno 4 čvora i 6 štapova. Ako želimo dodati novu točku i pri tome zadržati krutost i nepromjenjivost konstrukcije, tu točku moramo povezati s tri štapa na već postojeću strukturu. Na taj se način dobiva tijelo s 5 čvorova i 9 štapova, zatim s 6 čvorova i 12 štapova i tako dalje. Iz tog postupka proizlazi opći izraz:

$$s = 3n - 6s$$

gdje je n broj čvorova, a s broj štapova. Za povezivanje dobivenoga iznutra geometrijski nepromjenjivoga tijela s podlogom potrebno još 6 štapova, pa je konačni izraz:

$$s = 3n$$

Na sljedećim slikama prikazano je sastavljanje jednostavnoga ulančanog rešetkastog tijela kao sklopa tetraedara zglobnih štapova i spajanje tog tijela s podlogom.



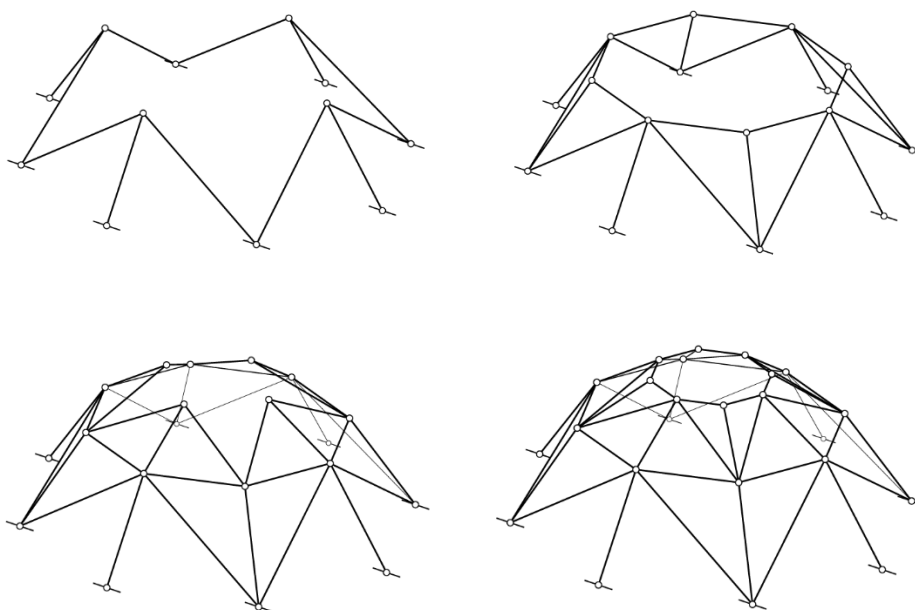
Slika 5.

Kod drugog načina sklapanja jednostavnih ravninskih rešetkastih nosača zglobne čvorove uzastopno s po dva zglobna štapa spajamo s podlogom i/ili s nepomičnim čvorovima (slika 6.). Veza između broja čvorova i štapova određena je Maxwellovim pravilom koje kaže da je broj štapova jednak dvostrukomu broju slobodnih čvorova.



Slika 6.

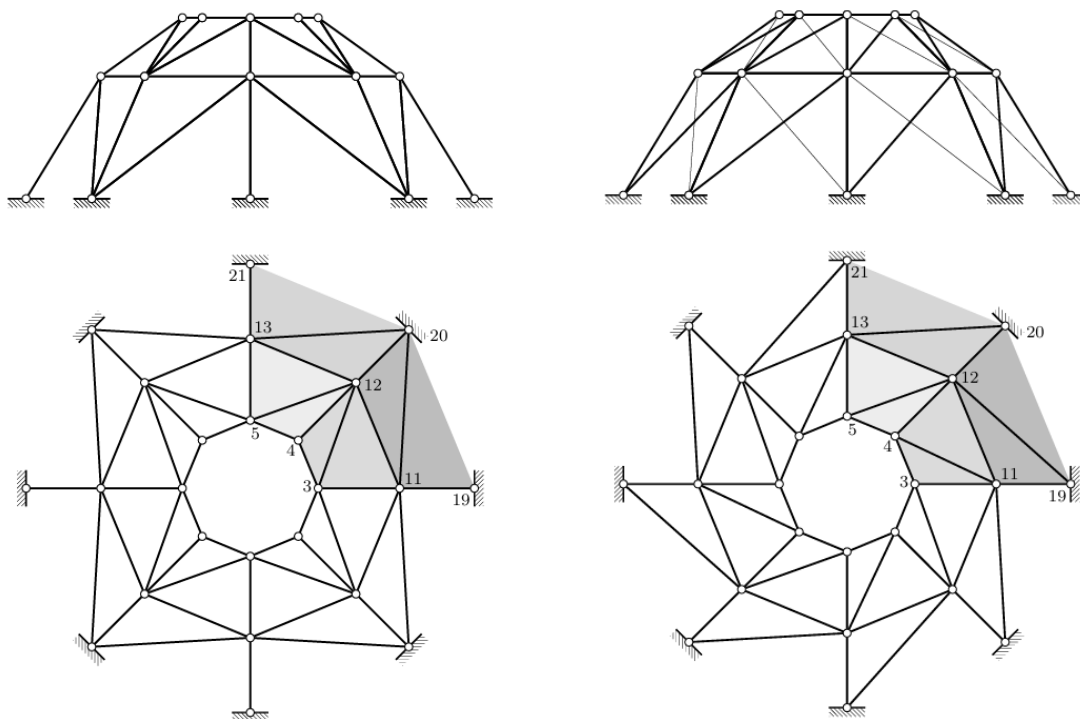
U skladu s time, drugi način oblikovanja rešetkastih nosača u prostoru izvodi se uzastopnim spajanjem čvorova s podlogom i/ili s prethodno sklopljenim geometrijski nepromjenjivim (pod)sistemom koji je vezan za podlogu s pomoću tri zglobna štapa, pri čemu osi tih štapova ne smiju ležati u jednoj ravlini. Rešetkasti nosač prikazan na slici 7. naziva se Schwedlerovom kupolom 1. vrste. Ovdje Maxwellovo pravilo kaže da za spajanje čvorova u prostorni geometrijski nepromjenjivi sistem koji sadrži podlogu treba tri puta više zglobnih štapova.



Slika 7.

Primjer je trećega načina sklapanja prostornih rešetki sklapanje Schwedlerove kupole druge vrste, koja će biti riješena kao primjer na kraju rada. Schwedlerova kupola druge vrste ne može se sklopiti ni prvim ni drugim elementarnim postupkom. Ne postoji ni jedan čvor koji je trima štapovima spojen za podlogu i(li) za ostatak sistema. Riječ je o rešetki koja je, kao

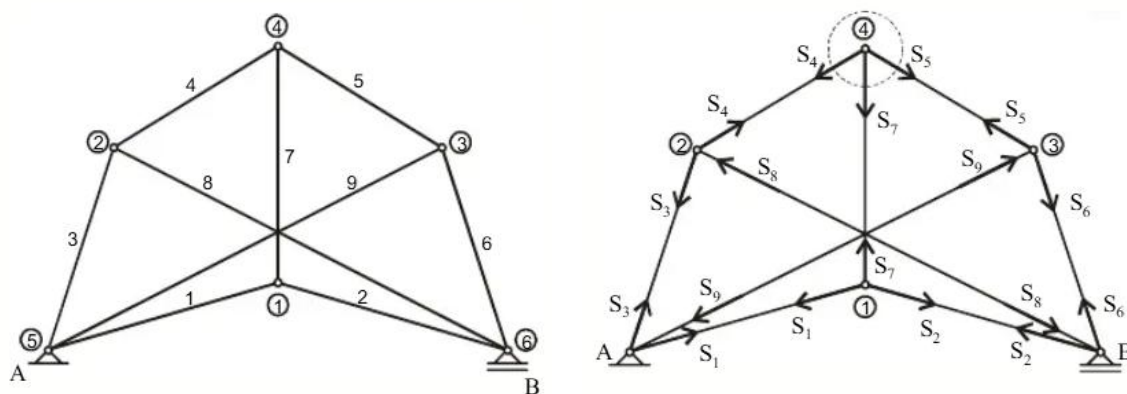
Schwedlerova kupola 1. vrste u drugom pogledu, sastavljena od ravninskih rešetaka. Možemo reći da je nastala iz kupole 1. vrste zamjenom određenih dijagonalnih štapova suprotno nagnutim dijagonalnim štapovima (slika 8.).



Slika 8.

Mogući su i mnogo složeniji nosači kod kojih se opisanom postupkom ne može dokazati njihova geometrijska nepromjenjivost. Takvi nosači nisu sastavljeni od trokutova, pa ni nema ni osnovnog trokuta od kojeg bi se moglo krenuti. To ne znači da je nosač geometrijski promjenjiv. Njegova geometrijska promjenjivost utvrđuje se na drugi način.

Kao primjer promatramo ravninski nosač prikazan na slici 9:



Slika 9.

Kako bismo ispitali geometrijsku nepromjenjivost ovog sistema upotrijebit ćemo metodu nultog opterećenja. Osnovna ideja metode je vrlo jednostavna: ako na statički određenu konstrukciju ne djeluje nikakva vanjska sila, jedino rješenje koje zadovoljava uvjete ravnoteže u svim čvorovima jest da su sile u svim štapovima jednake nuli. U tom slučaju sistem je geometrijski nepromjenjiv.

Suprotno tome, ako se može pronaći rješenje u kojem postoje unutarnje sile različite od nule, a da pritom svi čvorovi ostanu u ravnoteži, tada konstrukcija nije kruta nego je geometrijski promjenjiv sistem (koji sadrži neodređenost – sile u štapovima čine sustav sila prednapinjanja).

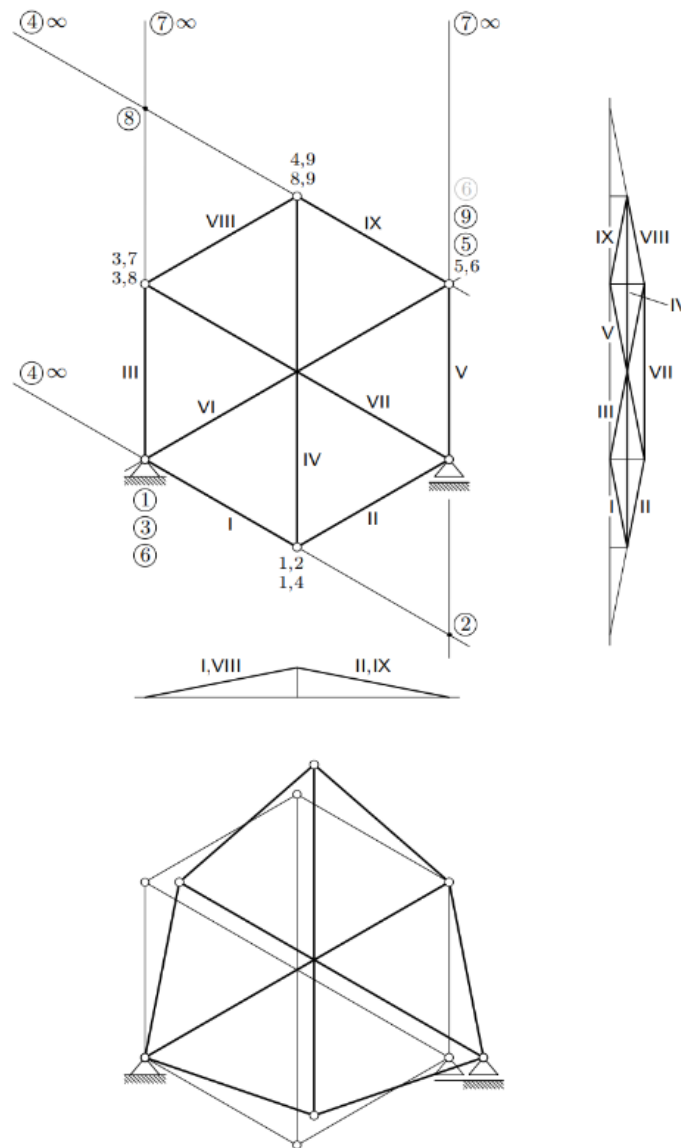
Treba naglasiti da sam broj štapova i čvorova nije dovoljan pokazatelj geometrijske nepromjenjivosti. On jest nužan uvjet, ali presudan je i njihov prostorni raspored. Na primjeru nosača koji na prvi pogled zadovoljava izraz za statičku određenost i geometrijsku nepromjenjivost, metodom nultog opterećenja može se pokazati pravo stanje.

Postupak se provodi tako da se pretpostavi postojanje sile u jednom štapu, npr. u štapu 7. Ta se sila unosi u prvi čvor u kojem se taj štap spaja s drugima (npr. čvor 1). Budući da je S_7 poznata, a preostale dvije sile u tom čvoru nepoznate, iz uvjeta ravnoteže dobivaju se sile u štapovima 1 i 2. Nakon toga prelazi se na susjedne čvorove (npr. A i B), u kojima se pomoću ranije određenih sila dobivaju sile u novim štapovima (3,6,8,9). Postupnim uravnoteživanjem prelazi se i na čvorove 2 i 3, gdje se određuju sile u štapovima 4 i 5.

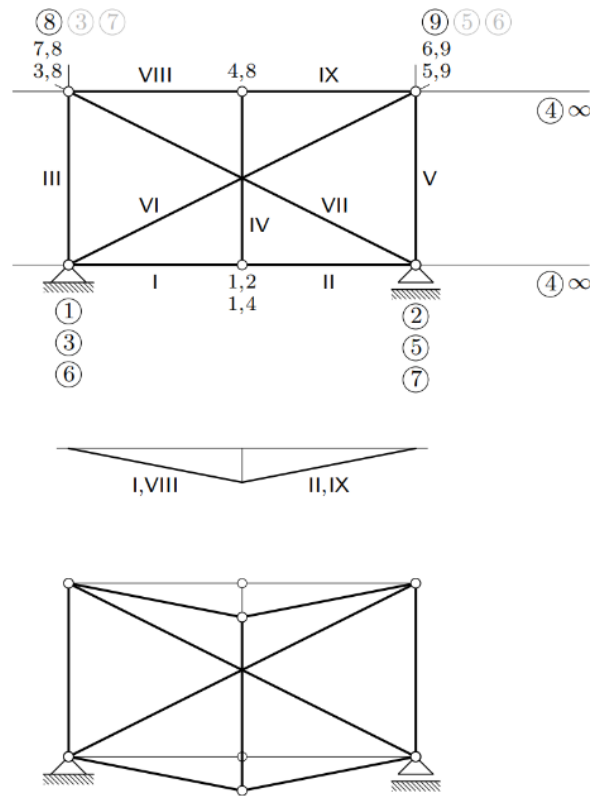
Na kraju se dolazi do kontrolnog čvora (npr. čvora 4), u kojem se sastaju već izračunate sile 4, 5 i 7. Ako te sile ne mogu zadovoljiti uvjete ravnoteže – primjerice, sve tri imaju projekcije u istom smjeru – jedino moguće rješenje je da sve budu jednake nuli. Tada su nula i sve

ostale sile u nosaču, čime se potvrđuje da je sustav geometrijski nepromjenjiv (rešetkasti nosač).

Ako su, međutim, čvorovi u „posebnom” položaju, na krivulji drugoga stupnja (pa i raspadnutoj, na dva pravca), ravnoteža će biti moguća i nosač je (trenutno) geometrijski promjenjiv (slike 10. i 11.).



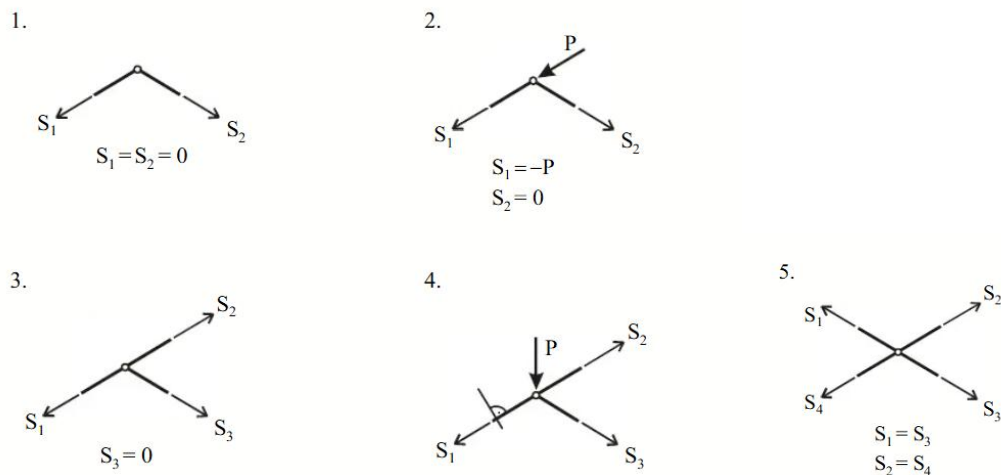
Slika 10.



Slika 11.

2.2. Elementarna pravila koja vrijede općenito za rešetkaste nosače

Za grafičko određivanje sila u štapovima rešetkastih nosača vrijede određena osnovna pravila koja uvelike mogu olakšati i ubrzati sam postupak. Posebno kod grafičkih metoda, gdje nije riječ samo o rješavanju jednačbi, već i o vizualnom sagledavanju međusobnih odnosa sila, primjena tih pravila doprinosi jasnijem uvidu u načela ravnoteže.



Slika 12.

1. Ako na čvor u kojem se sastaju dva štapa ne djeluje vanjsko opterećenje, sile u tim štapovima jednake su nuli (slika 12.1.).
2. Ako na čvor u kojem se sastaju dva štapa djeluje sila na pravcu koji se poklapa s jednim od štapova, sila je u drugom štapu jednaka nuli (slika 12.2.).
3. Ako se u čvoru na koji ne djeluje vanjsko opterećenje sastaju tri štapa i od njih dva leže na istom pravcu, sila je u trećem štapu jednaka nuli (slika 12.3.).
4. Ako na čvor u kojem se sastaju tri štapa, od kojih dva leže na istom pravcu, djeluje vanjska sila, sila se u trećem štapu može odrediti iz zbroja projekcija sila na os okomitu na pravac na kojem leže dva štapa (slika 12.4.).
5. Ako postoji neopterećeni čvor u kojem se sastaju četiri štapa od kojih po dva leže na istom pravcu, onda su sile u štapovima koji leže na istom pravcu međusobno jednake (slika 12.5.).

Za prostorne nosače:

1. Ako se u čvoru sastaju tri štapa čije se osi ne nalaze u istoj ravnini i ako na taj čvor ne djeluje nikakva vanjska sila, tada su sile u svim štapovima jednake nuli.
2. Ako se u čvoru sastaju tri štapa nekomplanarnih osi i ako na čvor djeluje vanjska sila čiji pravac ne leži ni u jednoj od ravnina razapetih parovima osi štapova, tada su sile u sva tri štapa različite od nule.
3. Ako se u čvoru sastaju tri štapa nekomplanarnih osi i ako vanjska sila djeluje u ravnini koju razapinju osi dvaju štapova (ali se ne podudara ni s jednom od tih osi), tada su sile u ta dva štapa različite od nule, dok je sila u trećem štapu jednaka nuli.

4. Ako se u čvoru sastaju tri štapa nekomplanarnih osi i ako vanjska sila djeluje upravo na osi jednoga od njih, tada je sila u tome štapu različita od nule, a sile u preostala dva štapa jednake su nuli.
5. Ako se u čvoru sastaju četiri štapa, pri čemu su tri u jednoj ravnini (a četvrti nije) i ako nema opterećenja, u četvrtom štapu nema sile, a prva tri tvore "čvor ravninske rešetke".

3. GRAFIČKI POSTUPCI ODREĐIVANJA SILA U ŠTAPOVIMA

Kod grafičkog određivanja sila u štapovima rešetkastih nosača osvrnut ćemo se na ove postupke:

- a) Jednostavna metoda čvorova,
- b) Culmannov postupak,
- c) Maxwell-Cremonin plan sila.
- d) Geometrijska konstrukcija ravnoteže za prostorne rešetke

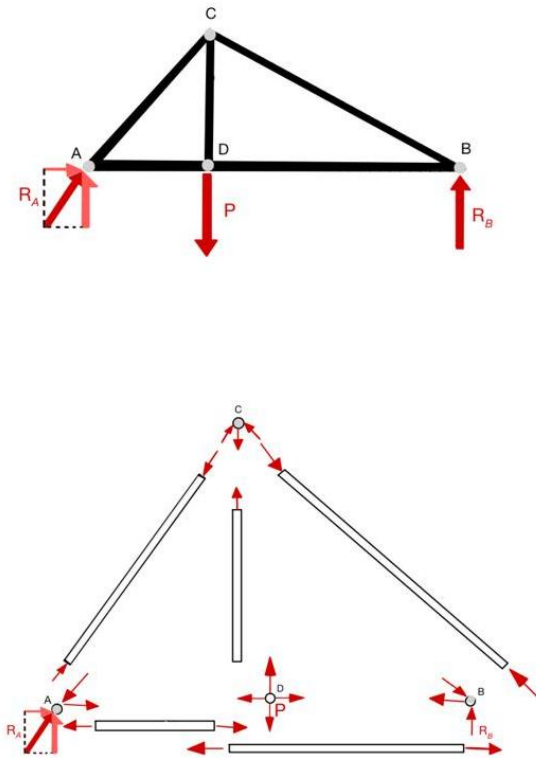
Odabir načina rješavanja rešetke ovisi o tipu nosača i cilju proračuna. Postoje mnoge vrste rešetkastih nosača, stoga moramo procijeniti karakteristike koje metode najbolje odgovaraju odabranom tipu nosača.

3.1. (Jednostavna) metoda čvorova

Metoda čvorova spada među najjednostavnije i najučestalije metode koje se upotrebljavaju za proračun sila u rešetkastim nosačima. Često se naziva i metodom ravnoteže čvorova ili metodom izoliranih čvorova. Osnovni pristup temelji se na tome da se pojedini čvorovi promatraju odvojeno od ostatka konstrukcije, a zatim se za svaki od njih posebno primjenjuju uvjeti ravnoteže.

U svakom se čvoru sve sile sastaju u jednoj točki, zbog čega se mogu primijeniti dvije ravnotežne jednačbe – recimo po jedna za horizontalnu i vertikalnu komponentu. Time je moguće u svakom čvoru izravno izračunati najviše dvije nepoznate sile. Zbog toga se analiza započinje s onim čvorovima u kojima je broj nepoznanica najmanji, idealno dva ili manje. Grafički, jedno (i samo jedno) rješenje zadatka geometrijskoga zatvaranja poligona s n stranica, kojem su poznati jedna stranica (pravac na kojem leži i duljina) i $n-1$ pravac s kojima su usporedne ostale stranice, postoji samo ako je $n = 3$. Ako je $n > 3$, postoji ∞^{n-3} rješenja, to jest, zadatak je (statički) neodređen.

Metoda se može provesti računski ili grafički. Kod grafičke se provedbe primjenjuje poligon sila koji prikazuje sve sile koje djeluju u čvoru tako da zajedno tvore zatvorenu liniju – što simbolizira ravnotežu. Sile se crtaju u mjerilu, prema smjeru i veličini, te se iz zatvorenog oblika poligona mogu očitati njihove vrijednosti i smjerovi djelovanja.



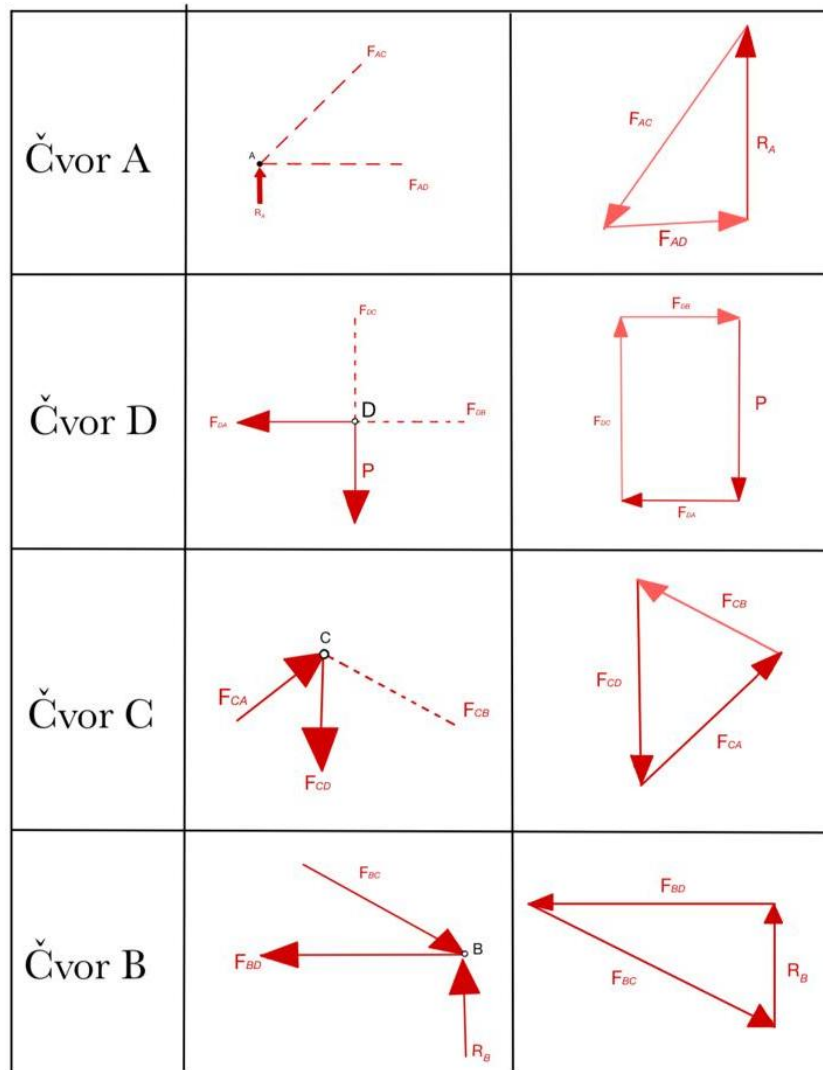
Slika 13.

U nastavku ćemo prikazati kako se, korak po korak, određuju sile u svim štapovima zadanog rešetkastog nosača sa slike 13. razmatranjem ravnoteže svakog čvora, počevši s čvorom koji sadrži samo dvije nepoznanice.

Međutim, u toj konkretnoj rešetki svi čvorovi imaju najmanje tri nepoznate sile. Stoga se najprije moraju odrediti reakcije u ležajevima, tretiranjem cijele rešetke kao jednog tijela i primjenom jednačbi ravnoteže za kruto tijelo.

Na taj način dobivamo da je reakcija R_A vertikalna, i određuju se veličine R_A i R_B .

Broj nepoznanica u čvoru A tada se smanjuje na dvije, pa se sile mogu odrediti ravnotežom tog čvora.



Slika 14.

Reakcija R_A i sile F_{AC} i F_{AD} , kojima na čvor A djeluju štapovi AC i AD, moraju tvoriti trokut sila. Najprije se nacrti R_A (vidi sliku 14); budući da su F_{AC} i F_{AD} djeluju na osima štapova, dovršava se konstrukcija trokuta i određuju veličina i smjer tih sila.

Budući da je F_{AC} usmjerena prema čvoru A, štap AC gura čvor – dakle, sila je u štapu tlačna. S druge strane, F_{AD} je usmjerena od čvora A, što znači da štap AD vuče čvor i da je sila u njemu vlačna.

Zatim se analizira čvor D, gdje su nepoznate sile F_{DC} i F_{DB} . Ostale sile u čvoru su poznate: vanjsko opterećenje P i sila F_{DA} , koja je jednaka i suprotna od F_{AD} (prema Newtonovu zakonu). Konstrukcijom poligona sila ili upotrebom jednadžbi ravnoteže $\sum F_x = 0$ i $\sum F_y = 0$ određuju se F_{DC} i F_{DB} . Budući da su obje sile usmjerene od čvora D, sila su u oba štapa vlačne.

Dalje se analizira čvor C, gdje su sile F_{DC} i F_{CA} već poznate iz prethodnih koraka, a jedina nepoznanica je F_{CB} . Trokut sila pokazuje da je F_{CB} usmjerena prema čvoru C, pa štap CB gura čvor i sila je njemu tlačna. Također se provjerava da je sila F_{CB} paralelna s osi štapa CB – što potvrđuje točnost postupka.

U čvoru B sve su sile već poznate. Budući da se i taj čvor nalazi u ravnoteži, trokut sila mora biti zatvoren, čime se dobiva još jedna provjera točnosti.

Budući da se svaki štap povezuje s dva čvora, njegova se sila pojavljuje u dva različita poligona sila, što može dovesti do nakupljanja grafičkih pogrešaka ako se skice ne crtaju precizno.

Kako bi se te pogreške minimalizirale, svi se poligoni mogu objediniti u jedinstveni grafički prikaz, u kojem se svaka sila pojavljuje samo jednom. Takav prikaz naziva se Maxwell–Cremonin plan sila, koji će biti detaljno objašnjen u poglavlju 3.3.

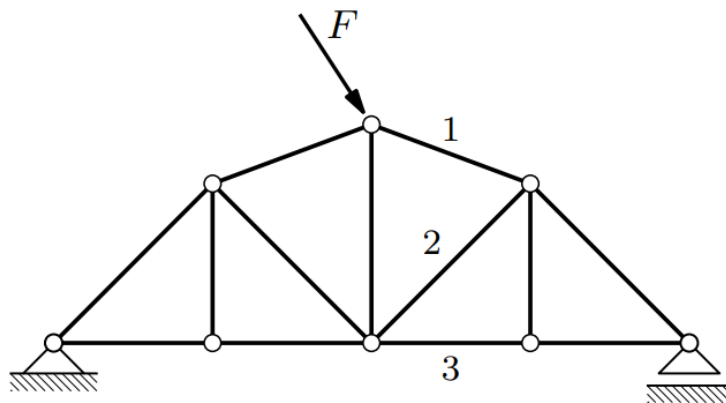
Pri crtanju na računalu točnost nije problem. Postupak Maxwella i Cremona i recipročni odnos geometrijskoga oblika sistema i cjelovitoga plana sila danas nalazi primjenu u nalaženju i optimizaciji oblika vlačnih, tlačnih i vlačno–tlačnih konstrukcija prema načelu „oblik slijedi silu“.

3.2. Culmannov postupak

Culmannov je postupak grafička metoda određivanja unutarnjih sila u štapovima rešetkastih nosača. Temelji se na ravnoteži četiriju sila koje djeluju u ravnini. Četiri su sile u ravnoteži ako rezultanta dviju sila leži na istom pravcu kao i rezultanta druge dvije, pri čemu te rezultante moraju biti jednake po intenzitetu, ali suprotne orijentacije. Taj pravac naziva se Culmannovim pravcem.

U praktičnoj primjeni, Culmannov se postupak koristi kada je poznata jedna sila (poznat je njezin smjer, intenzitet i orijentacija), a poznati su i smjerovi djelovanja ostalih triju sila. Cilj je tada grafički odrediti intenzitete i orijentacije tih triju sila. Postupak uključuje razdvajanje nosača zamišljenim presjekom kroz najviše tri štapa s nepoznatim vrijednostima sila, čime se promatrani dio nosača odvaja od ostatka konstrukcije. Na temelju poznatih sila određuje se njihova rezultanta, a zatim se primjenjuju uvjeti ravnoteže kako bi se odredile preostale nepoznate sile.

Culmannov postupak omogućuje jednostavno i jasno rješavanje statički određenih konstrukcija i koristan je u slučajevima kada nije potrebno određivati sile u svim štapovima nosača, već samo u odabranima.



Slika 15.

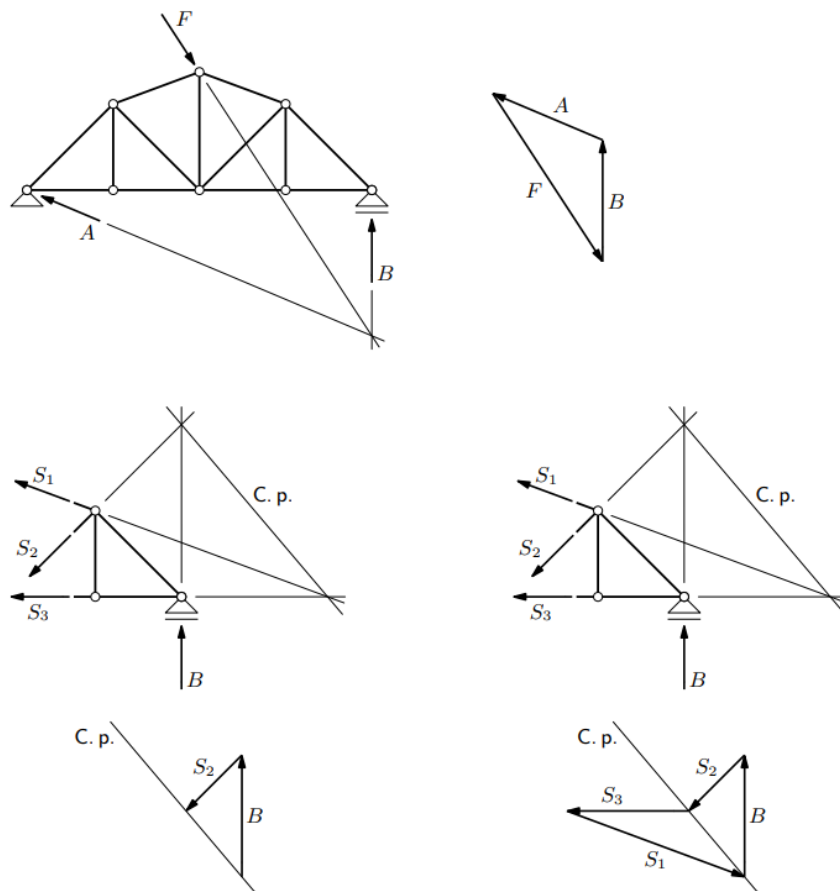
Kao primjer pronaći će se sile u štapovima S_1 , S_2 i S_3 u rešetkastom nosaču sa slike 15. Prvo treba odredi reakcije. Reakcije i sila vanjskoga opterećenja tvore trokut sila. Nakon određivanja reakcija gleda se koje se sile u nosaču traže, te kako će se taj nosač presjeći. U zadanom primjeru nosač se siječe kroz štapove u kojima nas zanimaju sile. Presjekom se nosač podijelio na dva dijela. Sljedeći korak je odabir jednoga dijela nosača, a drugi se dio odbacuje. Odabire se onaj dio na kojem je lakše doći do rješenja. U primjeru odabire se desni dio presječenoga nosača, dok se lijevi dio odbacuje.

Sila F je zadana (pravac djelovanja, intenzitet i orijentacija), a zadan je i pravac djelovanja sile u ležaju B . Iz uvjeta ravnoteže triju sila u ravni saznajemo pravac djelovanja sile A koji mora prolaziti sjecištem pravaca djelovanja sile B i F .

Na desnom dijelu presječenoga nosača kao vanjska sila pojavljuje se samo reakcija B , a tri nepoznate sile su sile u štapovima S_1 , S_2 i S_3 .

Treba pronaći dvije točke kroz koje će prolazi Culmannov pravac. Poznati su pravci djelovanja četiriju sila. Traže se sjecišta dviju sila; ta su sjecišta dvije točke Culmannova pravca. U našem slučaju sijeku se pravci sile S_2 i B te S_1 i S_3 .

Dobiveni Culmannov pravac izdvaja se izvan nosača. Na njega se postavljaju sile. Prvo se postavlja poznata sila (iznos i smjer djelovanja), te se na poznatu silu (u ovom primjeru silu B) postavlja pravac djelovanja sile koja se siječe s prethodnom nanesenom silom (sila S_2). Vrijednost sile S_2 se očitava od kraja sile B pa do Culmannova pravca. Zatim se iz uvjeta ravnoteže četiriju sila dobivaju preostale dvije sile u štapovima. Na kraj sile S_2 nanese se pravac djelovanja sile S_3 , a na početak sile B nanese se pravac djelovanja sile S_1 . Zatvaranjem poligona sila mogu se očitati vrijednosti sila S_3 i S_1 .

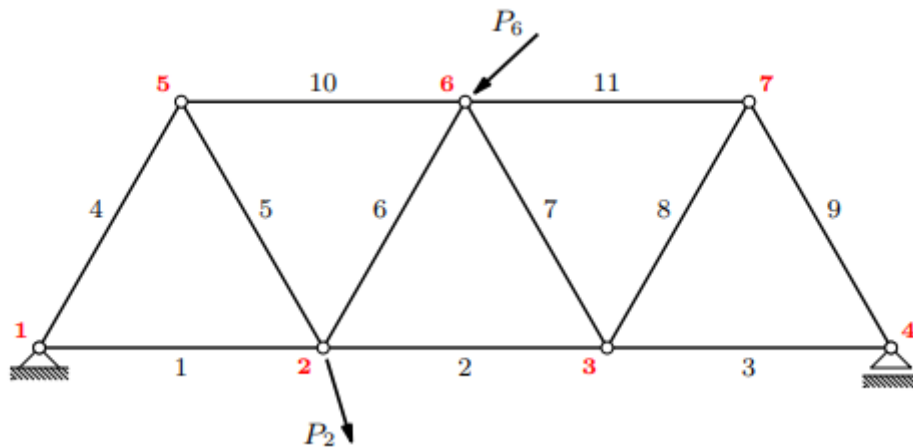


Slika 16.

3.3. Maxwell-Cremonin plan sila

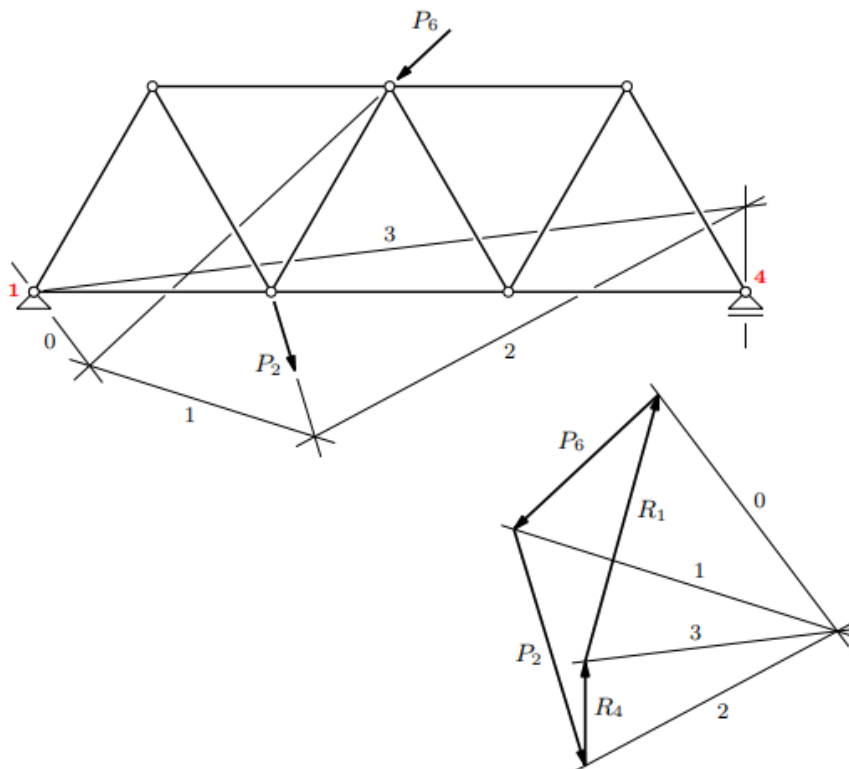
Kako smo već spomenuli, pri određivanju unutrašnjih sila u štapovima rešetke na osnovi zatvaranja poligona sila za svaki čvor – svaka se sila u štapu pojavljuje dva puta. Kako bismo dobili pregledniji plan sila i smanjili mogućnost grešaka koristimo Maxwell-Cremonin plan sila. Poligoni sila za sve čvorove slažu se u jedinstveni plan u kojem se svaka sila pojavljuje jedanput. Zbog tog razloga treba najprije zatvoriti poligon sila koji čine vanjske aktivne i reaktivne sile tako da se sile nanose onim redom kako na njih nailazimo obilazeći rešetku u smjeru kretanja kazaljke na satu ili suprotno njemu.

Proučit ćemo detaljnije M-C postupak na primjeru rešetkastog nosača opterećenog vanjskim silama kako je prikazano na slici 17.



Slika 17.

Prvi je korak određivanje reakcija čiji pravac djelovanja, intenzitet i smisao u ležaju određujemo pomoću verižnoga poligona (slika 18.). (Budući da pravac djelovanja reakcije u nepomičnom zglobnom ležaju nije poznat, stranica 0 verižnoga poligona prolazi kroz taj ležaj.) Sada znamo sve vanjske sile koje djeluju na rešetku.



Slika 18.

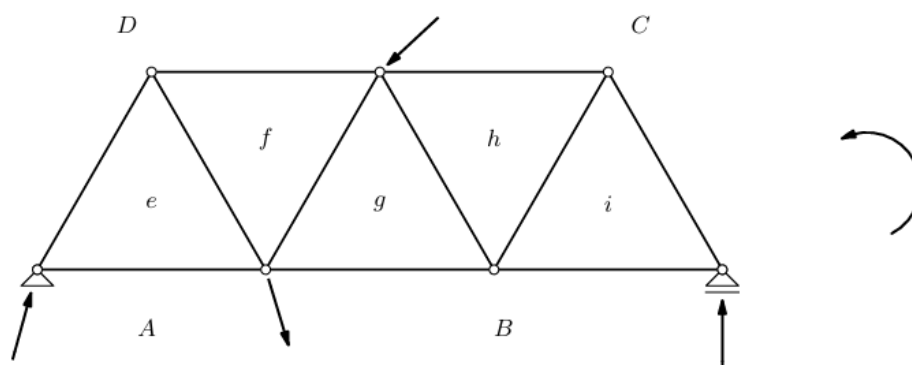
Nadalje, kako bi rešetkasti nosač bilo moguće riješiti ovim postupkom, moraju biti zadovoljeni određeni uvjeti.

1. Svakom polju rešetkastog nosača odgovara u M-C planu sila jedna točka.

Primijenit ćemo Bowov način obilježavanja (prilagođenu verziju iz udžbenika prof. Simovića). Nosač se sastoji od unutarnjih polja (omeđenih štapovima) i vanjskih polja (omeđenih štapovima i vanjskim silama). Vanjska polja obično se označuju velikim slovima, a unutarnja malim.

Primjerice, na slici 19. unutarnje polje omeđeno štapovima 1, 4 i 5 označeno je slovom *e*. U M-C planu to polje predstavlja točku u kojoj se sijeku pravci djelovanja sila u tim štapovima. Vanjsko polje A omeđeno je silom u štapu 1 te pravcima djelovanja sila A i P_2 ; u planu sila to odgovara točki u kojoj se sijeku upravo ti pravci.

Između dvaju polja nalazi se ili štap (sila u štapu) ili vanjska sila, tako da u recipročnom crtežu spojnice između točaka odgovaraju tim silama. Za ovaj primjer dogovoren je smjer obilaska čvorova suprotan smjeru vrtnje kazaljke na satu.



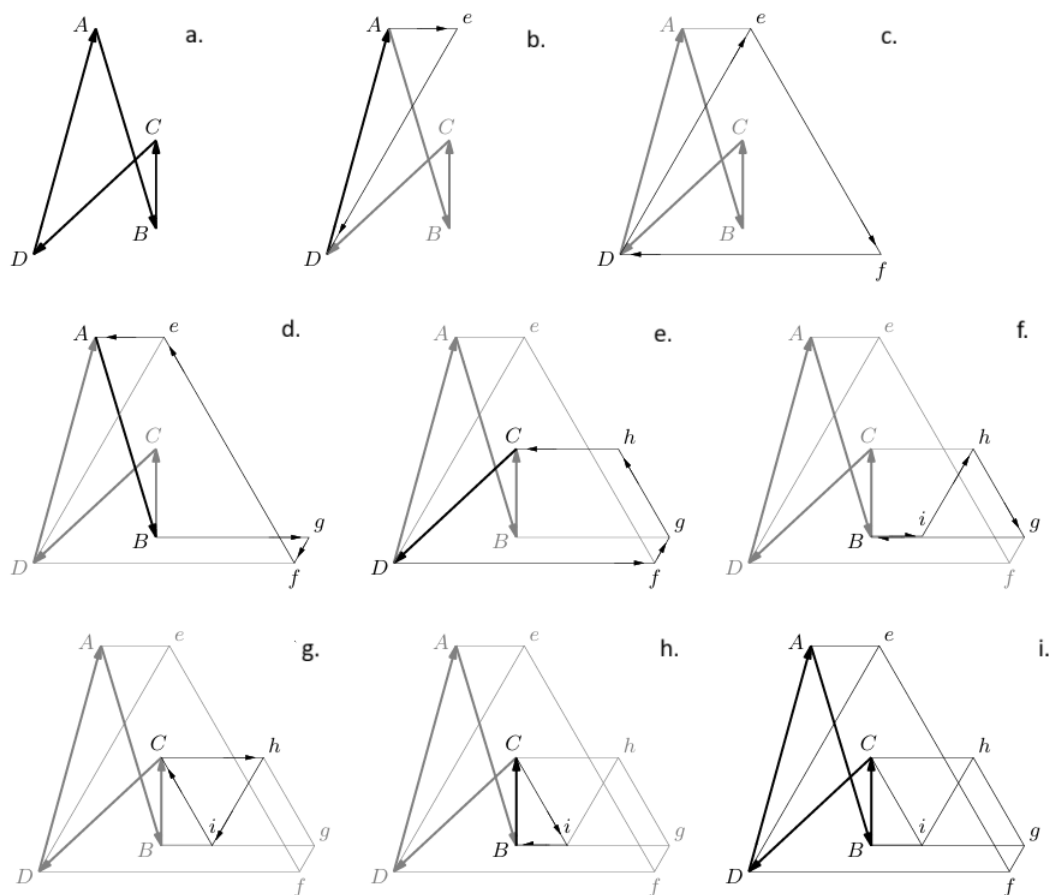
Slika 19.

Nove oznake sila P_2 , P_6 , R_1 i R_4 tada su AB, CD, DA i BC; primjerice, obilazeći čvor 1 u odabranom smislu preko sile R_1 ćemo prijeći prelazeći iz polja D u polje A. Oznaka čvora niz je oznaka polja koja ga okružuju, redoslijedom odabranoga smisla obilaženja, pa ćemo, primjerice, čvor 1 označiti s DAe.

Vanjske sile (zadane i reakcije) treba u poligonu sila nacrtati redoslijedom u kojem se na njih nailazi pri obilaženju oko nosača u istome smislu u kojem ćemo obilaziti oko čvorova. U našem je primjeru redoslijed DA, AB, BC i CD (slika 20.b.).

2. Svaki pojedini čvor rešetkastog nosača prikazuje se u M–C planu kao zaseban poligon.

Stranice poligona recipročnog crteža paralelne su s pravcima djelovanja sila koje se sastaju u čvoru. Kod konstrukcije plana povlačimo pravce paralelne sa štapovima nosača i pravcima vanjskih sila. Za svaki čvor dobivamo zatvoreni poligon koji predstavlja uravnotežen sustav sila tog čvora.



Slika 20.

U prvom čvoru, označenom kao DAe, poznata je reakcija DA, dok su sile koje u njega dovode štapovi 1 i 4 nepoznate. Polazimo od poznate reakcije DA te obilazimo čvor u odabranom

smjeru, suprotnom od vrtnje kazaljke na satu. To znači da iz polja D prelazimo u polje A, zatim iz polja A preko štapa 1 u polje e, a potom iz polja e preko štapa 4 natrag u polje D.

Kako bismo konstruirali trokut sila, potrebno je iz točke A povući paralelu s pravcem štapa 1, odnosno linijom koja spaja polja A i e, a iz točke D paralelu u smjeru štapa 4, koji povezuje polja e i D. Sjecište ovih paralela daje vrh e trokuta DAe. Time se trokut zatvara i statički i geometrijski, pa su sve tri sile u čvoru u ravnoteži.

Iz smjera zatvaranja trokuta iščitavamo da sila eD djeluje prema čvoru, dok sila Ae djeluje od njega, što znači da je u štapu 4 prisutna tlačna sila, a u štapu 1 vlačna (slika 20.b.).

Prelazimo na čvor Def u kojem su sada nepoznate sile u štapovima 5 i 10 (ef i fD), jer je sila u štapu 4 određena iz prethodno uravnoteženog čvora. Postupak je identičan kao i u prethodnom čvoru. Polazeći od poznate sile De (u smislu suprotnom od smisla vrtnje kazaljke na satu), uravnotežuje se čvor Def i dobivaju se preostale dvije nepoznate sile u štapovima toga čvora iz četverokuta sila (slika 20.c.).

Sljedeći čvor za koji se konstruira poligon sila je čvor ABgfe. Iz tog poligona dobiju se sile u štapovima 2 i 6 (Bg i gf) jer su sile u štapovima 1 i 3 dobivene iz prethodno uravnoteženih čvorova. Dalje se može nastaviti konstruiranje poligona sila za čvor Cdfgh, zatim za čvor Bihg i čvor Chi. Na kraju će se pokazati je li grafička konstrukcija ispravno provedena, kad se dođe do čvora B (ležaj). Kako se u tom čvoru sastaju tri sile (sile u štapovima 3 i 9 te reakcija B) koje su prethodno određene, te tri sile moraju zatvarati trokut sila. Na slici 20.i. prikazana je konačna konstrukcija M-C plana sila.

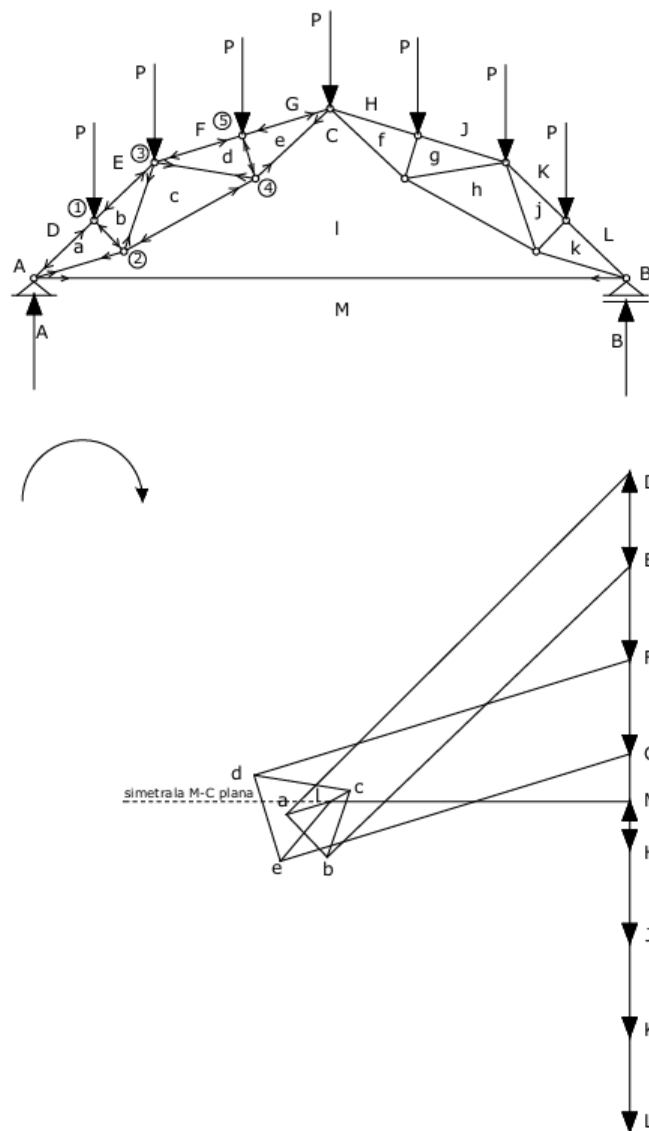
U grafičkim metodama određivanja sila može se dogoditi da se trokut sila ne zatvori, što upućuje na moguću pogrešku u prethodnom postupku. Najčešći uzrok su sitne pogreške u preciznosti pri ručnom crtanju trokutima i šestarom koje se tijekom konstrukcije postupno akumuliraju. Umjesto točke zatvaranja poligona, pojavljuje se mali trokutić, poznat kao trokut pogreške.

Mali trokutić pogreške može se tolerirati ako ne utječe na točnost rezultata, ali veće odstupanje zahtijeva ponavljanje postupka. Rizik od pogrešaka raste ako se konstrukcija vodi samo s jedne strane nosača, pa je kod složenih sustava preporučljivo postupak provoditi simetrično ili s obje strane.

Kao što kod (jednostavnije) metode čvorova rješavanje započinjemo u čvoru u kojem se sastaju samo dva štapa (dvije nepoznate sile), tako je i kod M-C plana nužno da u nosaču postoji barem jedan takav čvor. Bez tog uvjeta konstrukcija se ne može započeti.

Ako se u zadanom nosaču ne može pronaći čvor s najviše dvije nepoznate sile, ili se tijekom postupka naiđe na čvorove s tri ili više nepoznatih sila, treba provjeriti postoji li mogućnost za prethodnu intervenciju kojom bi se uvjeti ispunili. Intervencija može biti uvođenje pomoćnoga elementa, izračunavanje sile u određenom štapu ili privremeno tretiranje štapa kao vanjske sile.

Promotrit ćemo rešetkasti nosač na slici 21.

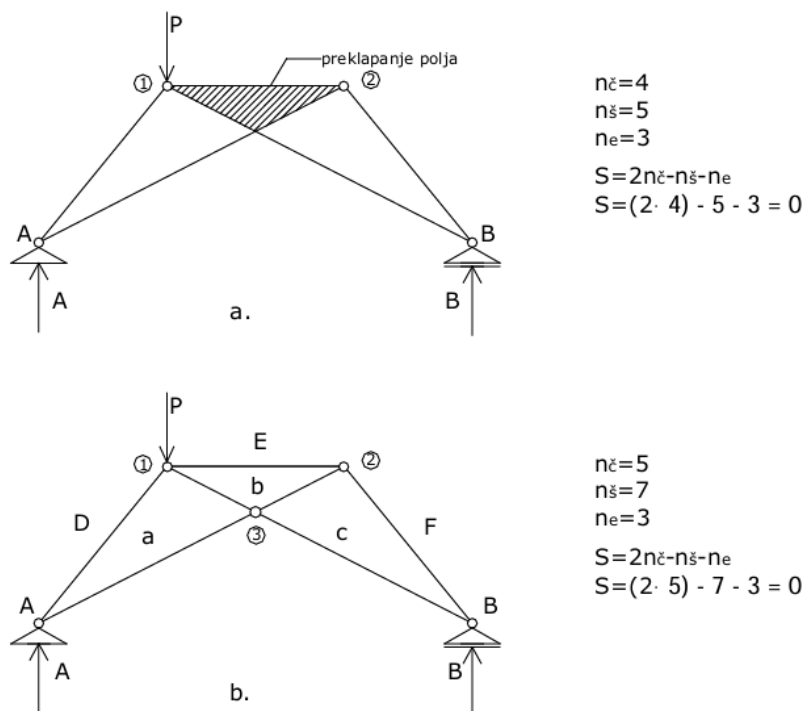


Slika 21.

Prikazan je nosač u kojem na prvi pogled ne postoji početni čvor za konstrukciju M-C plana. Ako ga promatramo kao sustav sa zategom AB, iz uvjeta da je moment u zglobu C jednak nuli možemo odrediti silu u štapu AB. Ta se sila zatim tretira kao vanjska sila i unosi u poligon sila zajedno s ostalim vanjskim opterećenjima. Nakon toga je moguće odabrati smisao obilaska (u ovom primjeru u smjeru kazaljke na satu) i započeti crtanje recipročnog crteža. Zbog simetrije opterećenja i konstrukcije, plan je dovoljno crtati samo do osi simetrije.

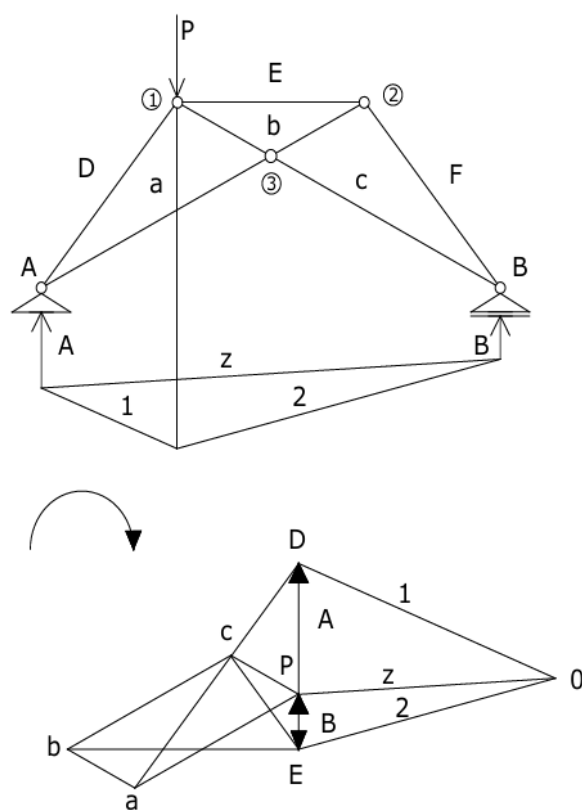
3. Ako površina rešetkastog nosača s vanjskim silama ne može biti jasno podijeljena na odvojena polja omeđena pravcima djelovanja sila, odnosno ako se polja međusobno preklapaju, tada nije moguće izraditi Maxwell–Cremonin plan sila.

U takvim slučajevima treba provjeriti križanja štapova. Ako se na određenom mjestu križaju samo dva štapa, moguće je pretpostaviti da su oni u zglobnoj vezi (slika 22.). Na taj način se konstrukcija pojednostavljuje, a sustav ostaje statički određen i geometrijski nepromjenjiv.



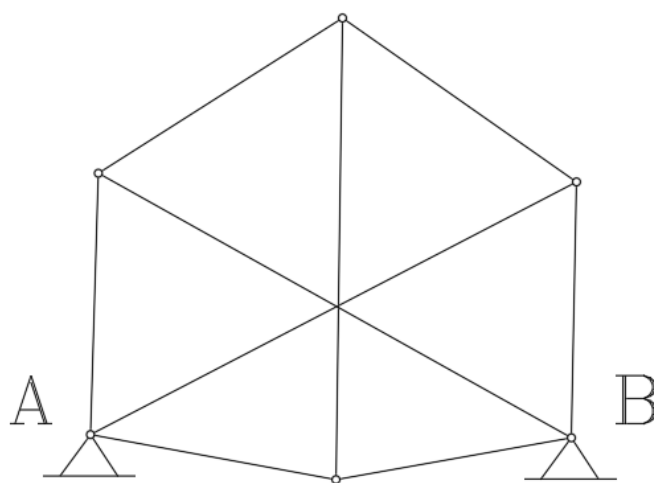
Slika 22.

Postupak rješavanja nosača sa slike 22. nastavlja se kao što smo već objasnili u prethodnim primjerima (slika 23.).



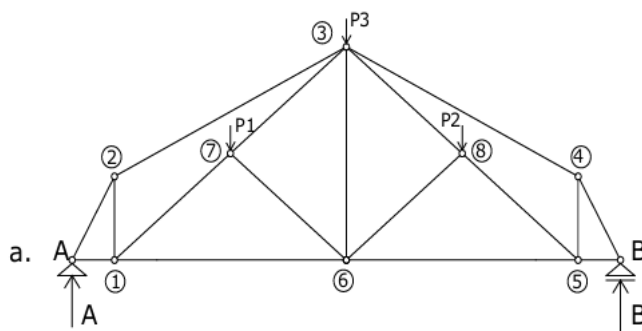
Slika 23.

Međutim, ako se u jednoj točki sastaje tri ili više štapova, prekidanje i uvođenje zgloba nije dopušteno, jer bi se time promijenio tip konstrukcije i sustav bi postao statički neodređen (slika 24.).



Slika 24.

Obradit ćemo još jedan primjer nosača kod kojeg su opterećeni unutarnji čvorovi, a unutarnja i vanjska polja se preklapaju. Rješenje je dodavanje pomoćnih štapova (npr. 7–7' i 8–8') u pravcima djelovanja vanjskih sila P_1 i P_2 te uvođenje novih čvorova 7' i 8'. Na taj način nosač ostaje statički određen i geometrijski nepromjenjiv, a geometrija polja postaje pogodna za crtanje recipročnoga plana. Nakon što se proračun završi, sile u pomoćnim štapovima postavljaju se na nulu, a početna konstrukcija se vraća u izvorni oblik (slika 25.).



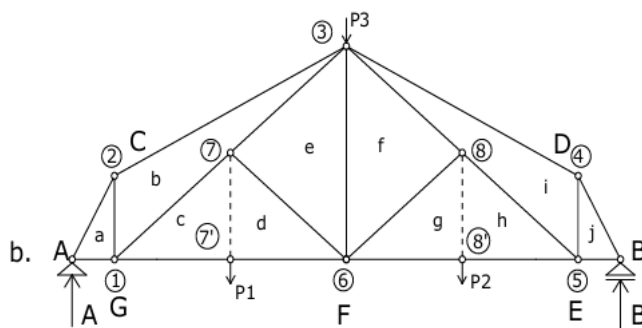
$$n_{\check{c}}=10$$

$$n_{\check{s}}=17$$

$$n_e=3$$

$$S=n_{\check{c}} - n_{\check{s}} - n_e$$

$$S=(2 \cdot 10) - 17 - 3=0$$



$$n_{\check{c}}=12$$

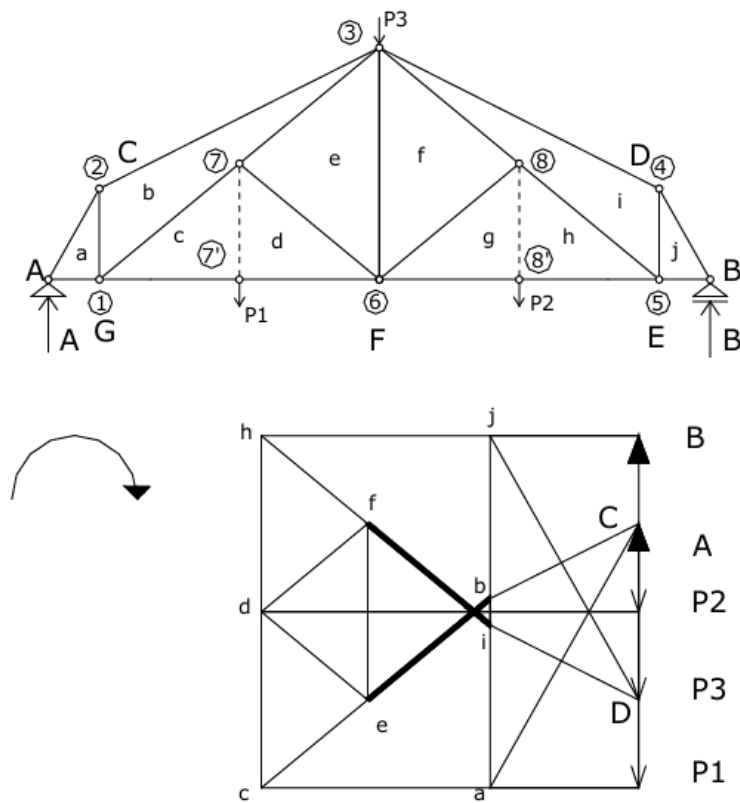
$$n_{\check{s}}=21$$

$$n_e=3$$

$$S=n_{\check{c}} - n_{\check{s}} - n_e$$

$$S=(2 \cdot 12) - 21 - 3=0$$

Slika 25.



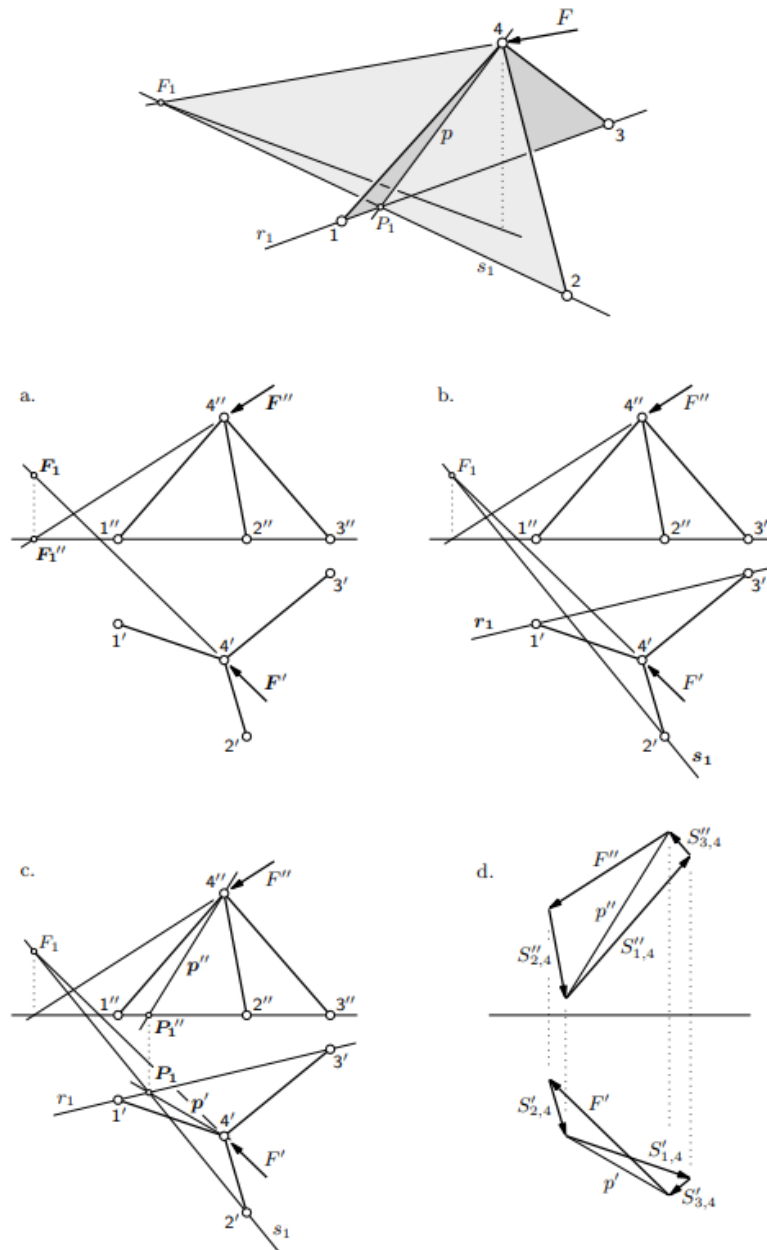
Slika 26.

Tijekom postupka moglo se naslutiti da postoji geometrijski odnos između nosača s opterećenjem i plana sila. Uvođenjem Bowovog načina obilježavanja pojednostavljuje se konstruiranje Maxwell-Cremonina plana sila. Naime, taj plan sila je geometrijska konstrukcija koja je recipročna zadanom nosaču s opterećenjem.

3.4. Geometrijska konstrukcija ravnoteže za prostorne rešetke

U prostoru materijalna točka ima tri (translacijska) stupnja slobode. Da bi materijalna točka bila nepomična, moramo je za podlogu ili za geometrijski nepromjenjivi (pod)sistem spojiti s pomoću najmanje tri štapa osi kojih nisu u jednoj ravnini. Broj nepoznanica je jednak broju štapova. Grafički način rješavanja prostorne rešetke koristi nacrtnu geometriju, primjerice aksonometrijski ili Mongeov sustav projekcija, da bi prikazao i analizirao prostorne odnose na ravnini. Bez toga ne bi bilo moguće pravilno konstruirati poligone sila i dijagrame

potrebne za analizu unutarnjih sila u štapovima. Nacrtogeometrijski postupak rješavanja opisat ćemo na sljedećem primjeru.



Slika 27.

Točke 1, 2 i 3 su u tlocrtnoj ravnini, dok je točka 4 iznad nje. Na čvor 4 djeluju zadana sila F i sile S_1 , S_2 i S_3 u štapovima (1,4), (2,4) i (3,4). Ravnotežu ostvarujemo tako da rezultanta sila F i S_2 bude kolinearne s rezultantom sila S_1 i S_3 , te da su te dvije rezultante jednake po intenzitetu, ali suprotno orijentirane.

Budući da su točke 1, 2 i 3 u tlocrtnoj ravnini, one su prva probodišta pravaca duž kojih djeluju sile S_1 , S_2 i S_3 (odnosno osi pripadajućih štapova).

Ravnina određena silama F i S_2 prolazi kroz njihova prva probodišta – potrebno je zato odrediti prvo probodište F_1 pravca djelovanja sile F (slika 27.a.).

Zatim se konstruira prvi trag ravnine s_1 , definirane silama F i S_2 , koji prolazi kroz točke F_1 i 2. Drugi prvi trag, r_1 , pripada ravnini definiranoj silama S_1 i S_3 , i prolazi kroz točke 1 i 3 (slika 27.b.).

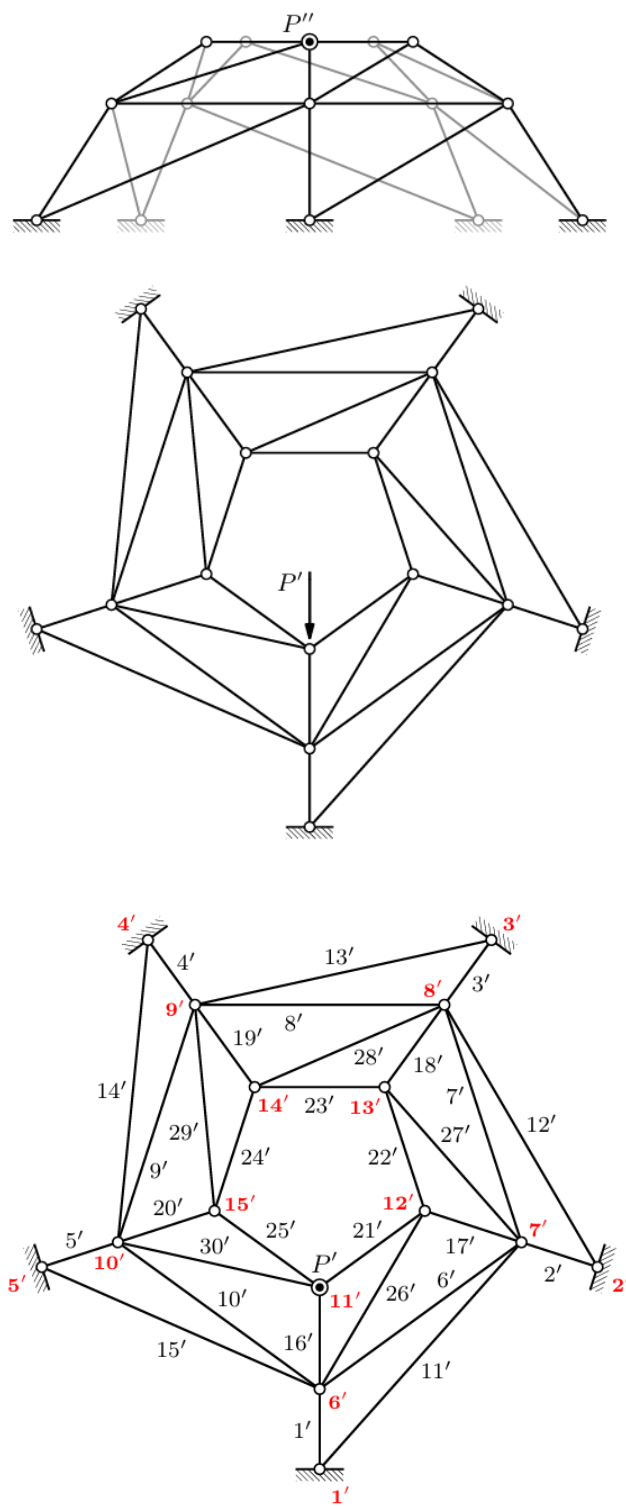
Presjecište ovih dviju ravnina daje pravac p , čije se prvo probodište označava kao P_1 . Tlocrt tog pravca p' dobiva se spajanjem točke P_1 s tlocrtnom projekcijom točke 4 ($4'$). Nacrt tog pravca (p'') određuje se spajanjem nacrta točke P_1'' (koja se nalazi na osi x_1x_2) s nacrtom projekcijom točke 4 ($4''$) (slika 27.c.).

Silu F u tlocrtu i nacrtu poligona sila prikazujemo kao pravce paralelne s projekcijama njezinog smjera djelovanja. Kako prave duljine u standardnim projekcijama nisu vidljive, primjenjuje se prevaljivanje pravca u ravninu paralelnu s tlocrtom: razlika visina dvaju karakterističnih pravaca prenosi se okomito na tlocrtni pravac. Na tom prevaljenom pravcu odmjerava se duljina proporcionalna intenzitetu sile F (u mjerilu), te se dobivena točka prenosi natrag na tlocrt i nacrt.

Nakon što su poznate projekcije sile F (F' i F'') te projekcije pravca sile S_2 , moguće je konstruirati prvi trokut sila pomoću paralelnih pravaca. Tako se u tlocrtu i nacrtu prikazuje rezultanta sila $F + S_2$, koja je ujedno (uz obrnut smjer) rezultanta sila $S_1 + S_3$.

Kako su poznati i smjerovi djelovanja sila S_1 i S_3 , možemo konstruirati i drugi trokut sila. Konačne orijentacije svih projekcija (S_1 , S_2 , S_3) određuju se tako da vektorski poligon koji ih povezuje – uz silu F – mora biti i geometrijski i statički zatvoren u obje projekcije (slika 27.d.).

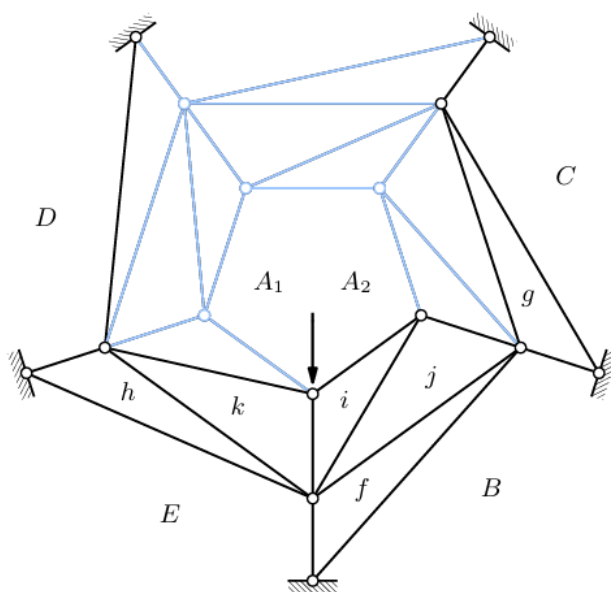
Opisani je postupak dualan Culmannovom postupku u ravnini.



Slika 28.

U prvom koraku ćemo pronaći štapove u kojima nema sile (slika 29.). U svim čvorovima gornjega prstena sastaju se po četiri štapova. Osi tri štapova leže u jednoj ravnini, a os četvrtoga izlazi iz nje. Ako je čvor neopterećen (čvorovi 12, 13, 14, 15), u tom četvrtom štapu ne može postojati sila. Čvor 11 sada je obični prostorni čvor u kojem se sastaju tri štapova s nepoznatim vrijednostima sile, pa te vrijednosti znamo odrediti. U čvorovima 13, 14 i 15 sastaju se sada (nakon uklanjanja četiri štapova gornjega prstena) po dva štapova s nepoznatim vrijednostima sile. Kako se osi tih parova štapova ne poklapaju, čvor u koji su priključeni ne može biti u ravnoteži ako u njima postoje sile. Čvor 12 ravninski je čvor u kojem se sastaju dva štapova s nepoznatim vrijednostima sile i jedan štap u kojem je vrijednost sile poznata. Prema tome, nepoznate vrijednosti znamo odrediti.

U čvorovima 8 i 9 sastaje se po šest štapova, pri čemu su u četiri vrijednosti sile nepoznate, dok u ostala dva nema sile. Kako os jednoga od četiri štapova s nepoznatim vrijednostima sile izlazi iz ravnine u kojoj leže osi ostala tri štapova, u njemu ne može postojati sila. Nakon uklanjanja ta dva štapova u čvoru 9 ostaju dva štapova kojima se osi ne poklapaju, pa ni u njima ne mogu postojati sile.



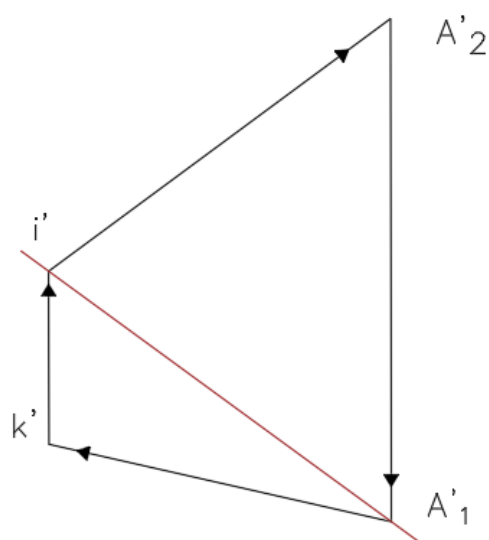
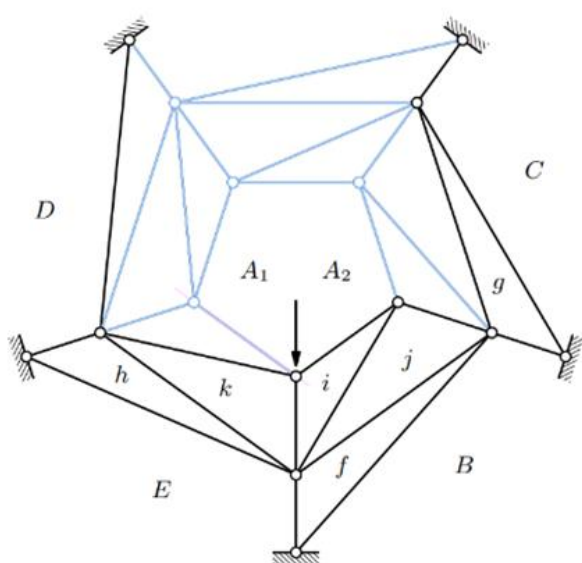
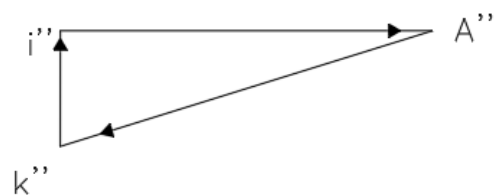
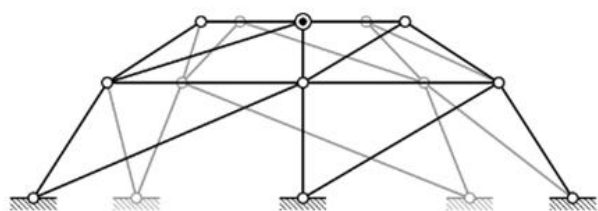
Slika 29.

Pri obilježavanju polja rešetke Bowovim načinom zanemarit ćemo štapove u kojima nema sila – dva polja između kojih je štap bez sile povezat ćemo u jedno. Oko čvorova obilazit ćemo u tlocrtu, u smislu suprotnom od vrtnje kazaljke na satu.

Postupak započinjemo uravnoteživanjem čvora u kojem djeluje vanjska sila – A_2A_1ki . Silu A_2A_1 (u nacrtu A, jer je okomita na nacrtanu ravninu) uravnotežujemo silama koje na čvor A_2A_1ki prenose susjedni štapovi. To činimo tako da pronađemo pravac na kojem djeluju dvije rezultante: prva dolazi od sila u štapovima A_1k i ki , a druga od sile u štapu iA_2 i sile A_2A_1 . Budući da se te rezultante međusobno poništavaju, moraju ležati na istom pravcu.

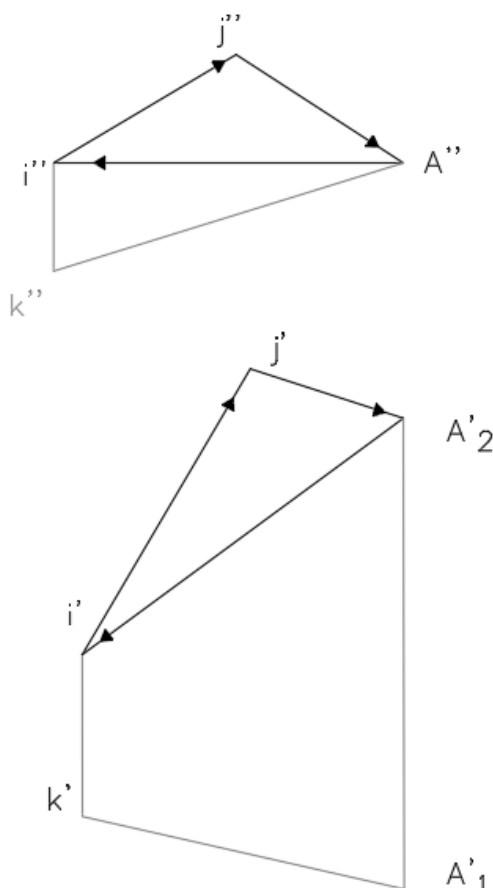
Kako su os štapa iA_2 i smjer sile A_2A_1 vodoravni, njihova je ravnina horizontalna i prolazi kroz promatrani čvor. Os štapa kh pak pripada ravnini zajedno s osima štapova A_1k i ki , pa je pravac usporedan osi kh , kroz čvor, ujedno i tražena presječna tih dviju ravnina.

Na taj se način sila A_2A_1 uravnotežuje s rezultantom u štapovima A_1k i ki , te sa silom u štapu iA_2 . U prostornom poligonu sila to se prikazuje povlačenjem paralela u smjerovima presječnice i osi iA_2 , a njihovo sjecište daje položaj točke i . Sila A_1i , koja je pritom dobivena, dalje se rastavlja u komponente uzduž osi štapova A_1k i ki , čime se određuje i točka k (slika 30.).



Slika 30.

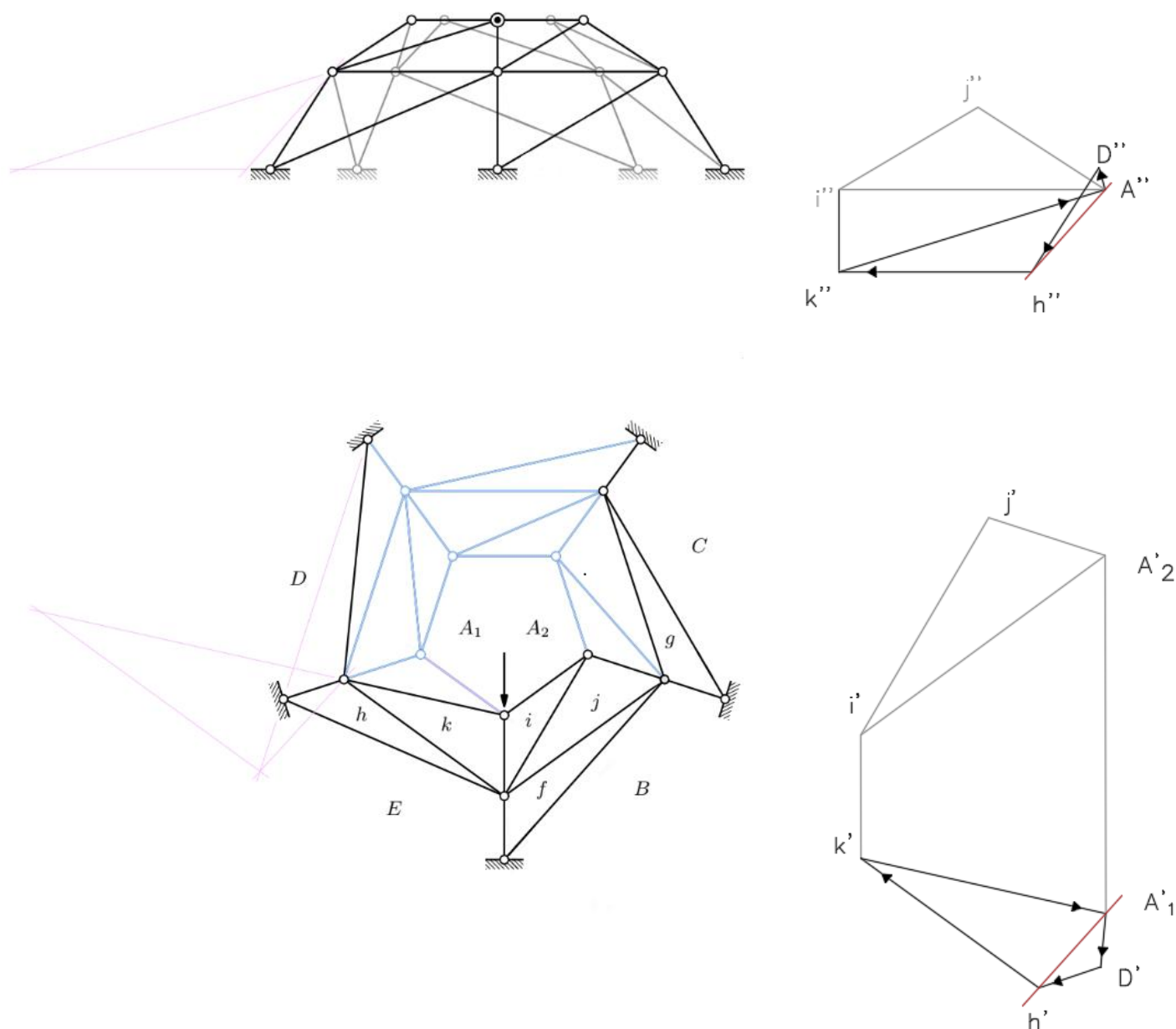
Čvor A_2 je ravninski je čvor. Na njega djeluju tri sile čije su osi u jednoj ravnini i intenzitet različit od nule. Poznati su intenzitet i orijentacija sile A_2i . Slijed je polja pri obilaženju čvora u smislu suprotnom od vrtnje kazaljke na satu $A_2 - i - j - A_2$. Vrh j sjecište je paralela s osima stapova ij i jA_2 kroz vrhove i i A_2 (slika 31.).



Slika 31.

U čvoru A_1Dhk poznata je vrijednost sile kA_1 kojom štap kA_1 na njega djeluje, dok su vrijednosti sila kojima djeluju preostala tri štapa nepoznate. Da bi se odredile sile u preostalim štapovima, treba konstruirati smjer rezultante. U tu svrhu promatraju se dvije ravnine: prva ravnina razapeta je osima štapova Dh i hk , a druga ravnina određena je osi štapa kA_1 i pravcem poznate sile A_1k . Presjek tih dviju ravnina daje pravac djelovanja rezultante. Jedna je točka presječnosti čvor A_1Dhk , a za drugu ćemo točku sada uzeti sjecište prvih tragova tih ravnina. (Postupak smo detaljnije opisali uz sliku 11.) Točke u kojima su stapovi A_1D i Dh spojeni s podlogom prva su probodišta njihovih osi, pa je spojnica tih točaka prvi trag ravnine određene tim osima. Os štapa hk usporedna je s tlocrtnom ravinom, pa je ta os sutražnica prve skupine ravnine određene njome i osi štapa kA_1 . Prvi je trag ravnine

usporedan sa sutražnicom, a prolazi prvim probodištem osi štapa kA_1 . Tlocrt je presječne ravnina spojnica sjecišta prvih tragova i tlocrta čvora A_1Dhk , a nacrt joj je spojnica nacрта sjecišta prvih tragova (na osi x) i nacрта toga čvora. Obilazeći čvor u odabranom smislu prolazimo kroz polja $k - A_1 - D - h - k$. Za sada tražimo samo rezultantu A_1h . Vrh h sjecište je paralele s presječnicom ravnina (na kojoj djeluje rezultanta A_1h) kroz vrh A_1 i paralele s osi štapa hk kroz vrh k . Preostaje još da rezultantu A_1h rastavimo u komponente A_1D i Dh , pa će vrh D biti sjecište paralele s osi štapa A_1D kroz vrh A_1 i paralele s osi štapa Dh kroz vrh h slika (32.).



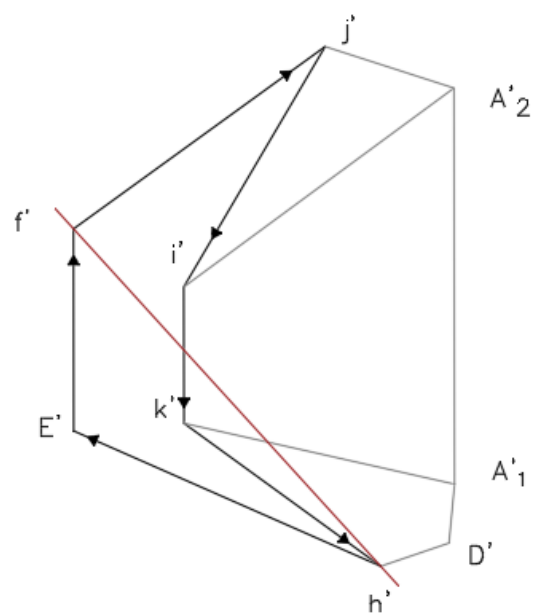
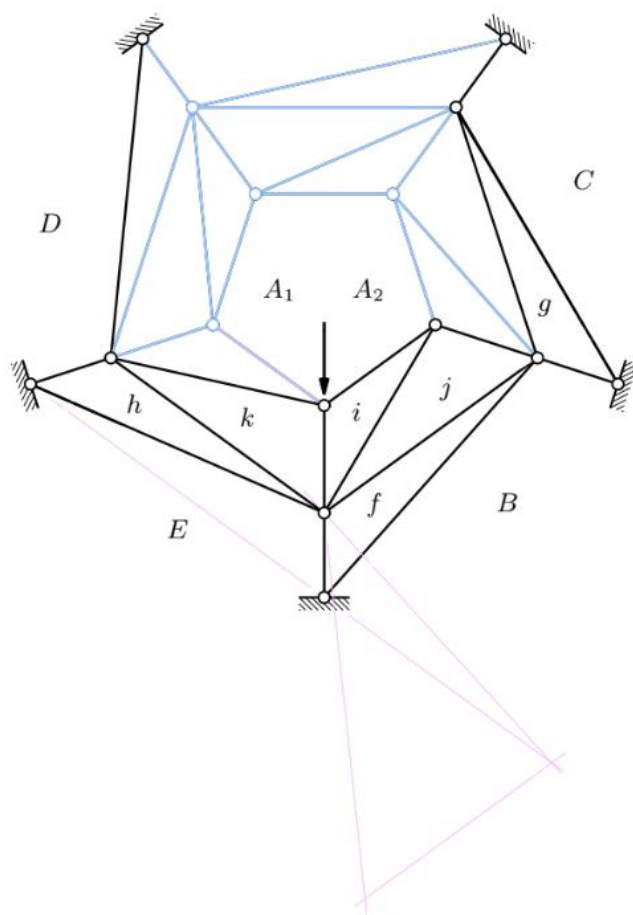
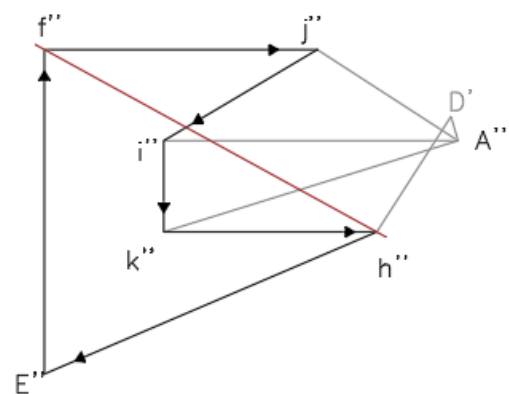
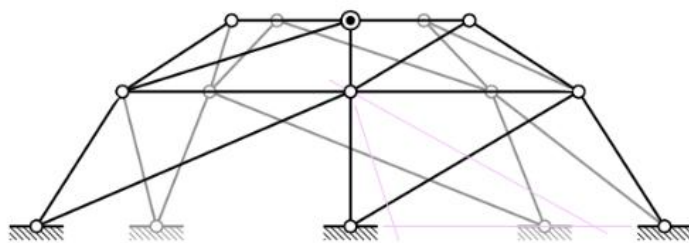
Slika 32.

Čvor $khEfji$ je složen, jer u njega ulazi više od tri štapa – konkretno, štapovi kh , hE , Ef , fj , ji i ik . Budući da sve osi ne leže u jednoj ravnini, riječ je o prostornom čvoru. Pri obilasku čvora u smjeru suprotnom od vrtnje kazaljke na satu slijed polja je $k - h - E - f - j - i - k$.

Prvi je korak grupiranje sila koje su već poznate. Na čvoru su poznate sile u štapovima ji , ik i kh . Te tri sile možemo zamijeniti njihovom rezultantom. U poligonu sila konstruira se zatvoreni četverokut; vektor koji ga zatvara daje rezultantu jh . Dalje, za uravnoteženje tog čvora treba pronaći smjer djelovanja rezultante sila hE i Ef i rezultante sile fj i poznate rezultante jh . Odabiru se dvije ravnine: prva ravnina određena je osima štapa hE i Ef , a druga ravnina osi štapa fj i pravcem rezultante jh . Presječna tih dviju ravnina daje traženi pravac. Postupak je analogan postupku uravnoteženja prethodnoga čvora. Prvi trag prve ravnine dobiva se spajanjem ležajeva štapa hE i Ef . Os štapa fj sutražnica je prve skupine ravnine određene njome i pravcem djelovanja sile jh . Prvi trag te ravnine prolazi prvim probodištem pravcem djelovanja sile jh , a usporedan je sa sutražnicom (prvo probodište nalazimo pomoću nacrtanja pravca). Spojnica sjecišta prvih tragova i čvora $khEfji$ presječna je ravnina.

Slijed vrhova poligona sila koji odgovara slijedu polja kojima prolazimo obilazeći čvor u smislu suprotnom od vrtnje kazaljke na satu, bio bi $j - i - k - h - e - f - j$. U poligonu sila postupak izgleda ovako: kroz vrh koji označava kraj rezultante jh povuče se paralela u smjeru presječnice, a kroz vrh koji označava početak iste rezultante paralela u smjeru osi štapa fj . Njihovo sjecište daje vrh f kojim su određene rezultanta sila hE i Ef i s .

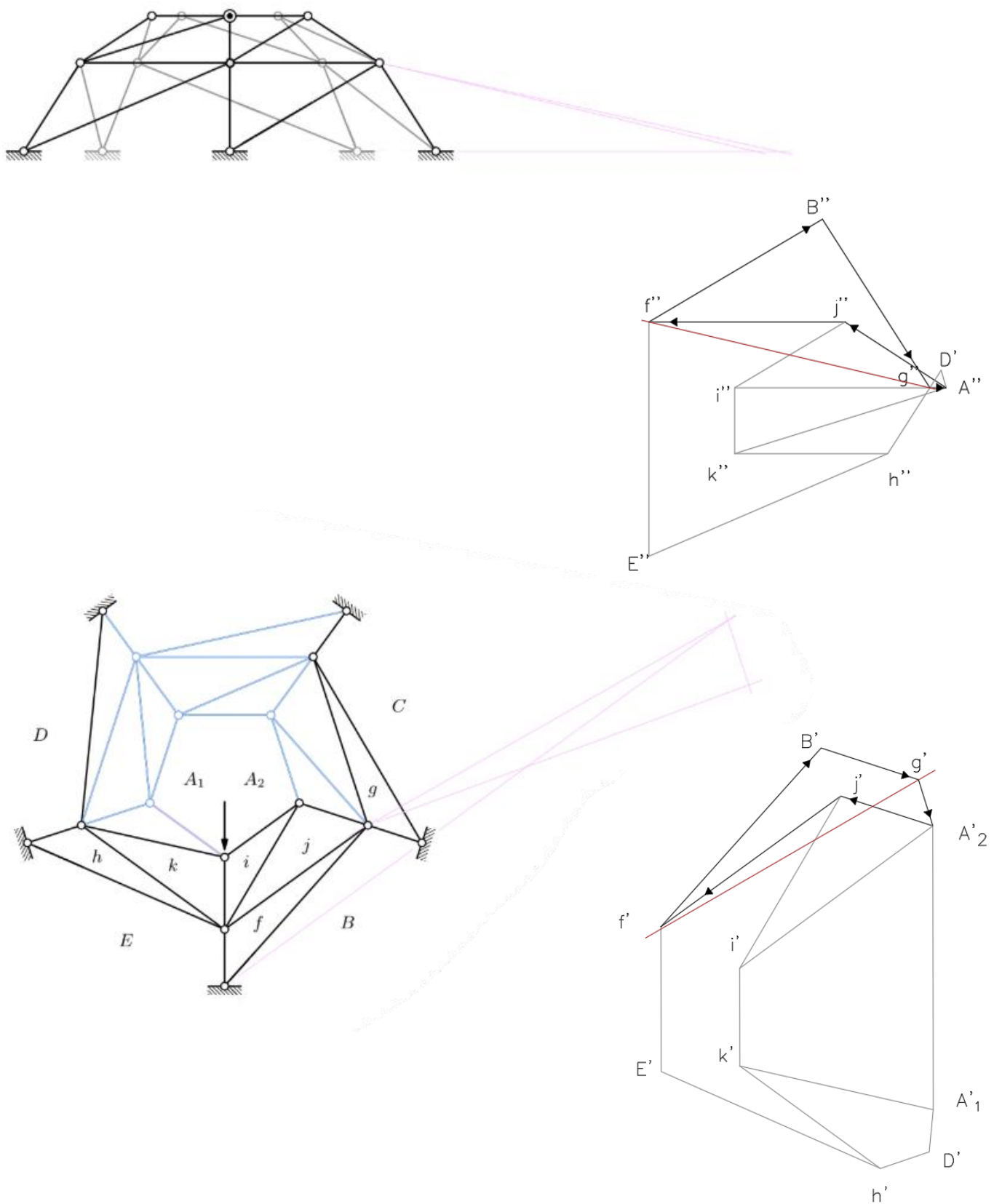
Konačno, rezultantu sila hE i Ef treba rastaviti u komponente. U poligonu se kroz vrhove rezultante povuku paralele s osima štapa hE i Ef , a njihovo sjecište određuje vrh E . Tako se grafički očitavaju intenziteti i orijentacije sila u štapovima hE , Ef i fj , dok su intenziteti u štapovima ji , ik i kh poznati iz ranijih koraka. Time je čvor $khEfji$ uravnotežen (slika 33.).



Slika 33.

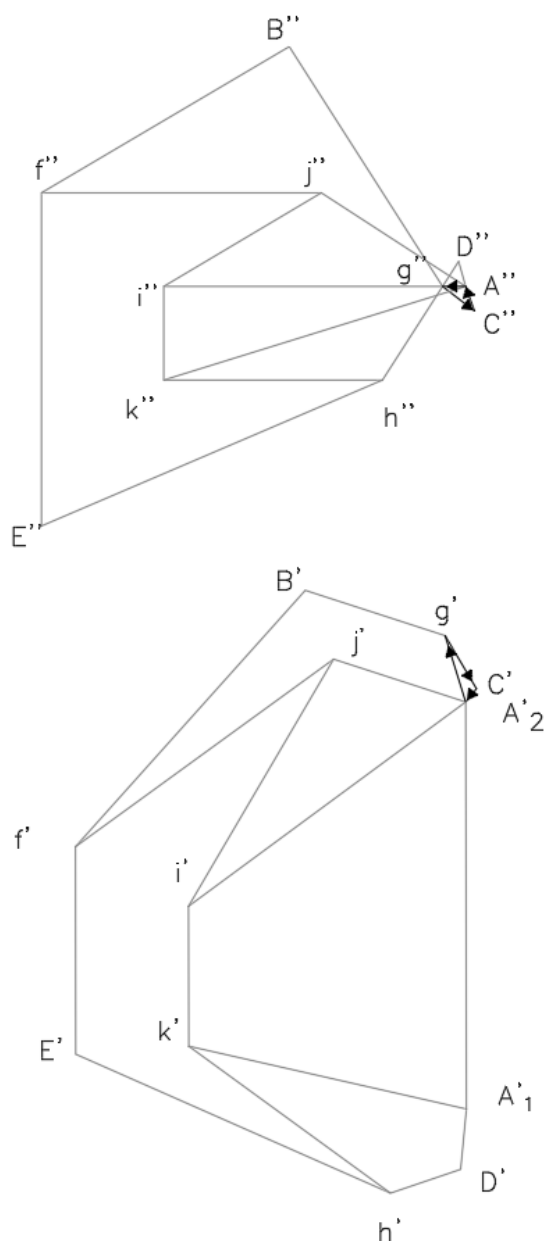
I kod pretposljednjeg (posljednjeg prostornog) čvora imamo već viđeni postupak. U čvor A_2fBg priključeno je pet štapova od kojih su u dvama sile poznate – A_2j i jf . Intenzitet, orijentaciju i smjer pravca djelovanja njihove rezultante A_2f nalazimo u poligonu sila. Pri obilasku čvora u smjeru suprotnom od vrtnje kazaljke na satu slijed polja glasi $A_2 - j - f - B - g - A_2$. U tlocrtu se presjek dobiva konstruiranjem sutražnjice: prvi trag prve ravnine jest spojnica ležajeva štapova fB i Bg , a prvi trag druge ravnine spojnica ležaja štapa gA_2 i probodišta pravca A_2f . Sjecište tih tragova daje prvu točku presječnosti, a druga je točka čvor A_2jfBg . U poligonu sila kroz vrh koji označava kraj vektora A_2f povlači se paralela u smjeru presječnosti, a kroz njegov početak paralela u smjeru osi štapa gA_2 . Njihovo sjecište određuje vrh g kojim su određene rezultanta sila fB i Bg i sila gA_2 .

Na kraju se rezultanta sila fB i Bg rastavlja u komponente. U poligonu se kroz vrhove te rezultante povuku paralele uz osi štapova fB i Bg . Njihovo sjecište određuje vrh B , a time se dobiju intenziteti i orijentacije sila u štapovima fB i Bg . Zajedno s već konstruiranom rezultantom A_2f čvor A_2jfBg nalazi se u ravnoteži (slika 34.).



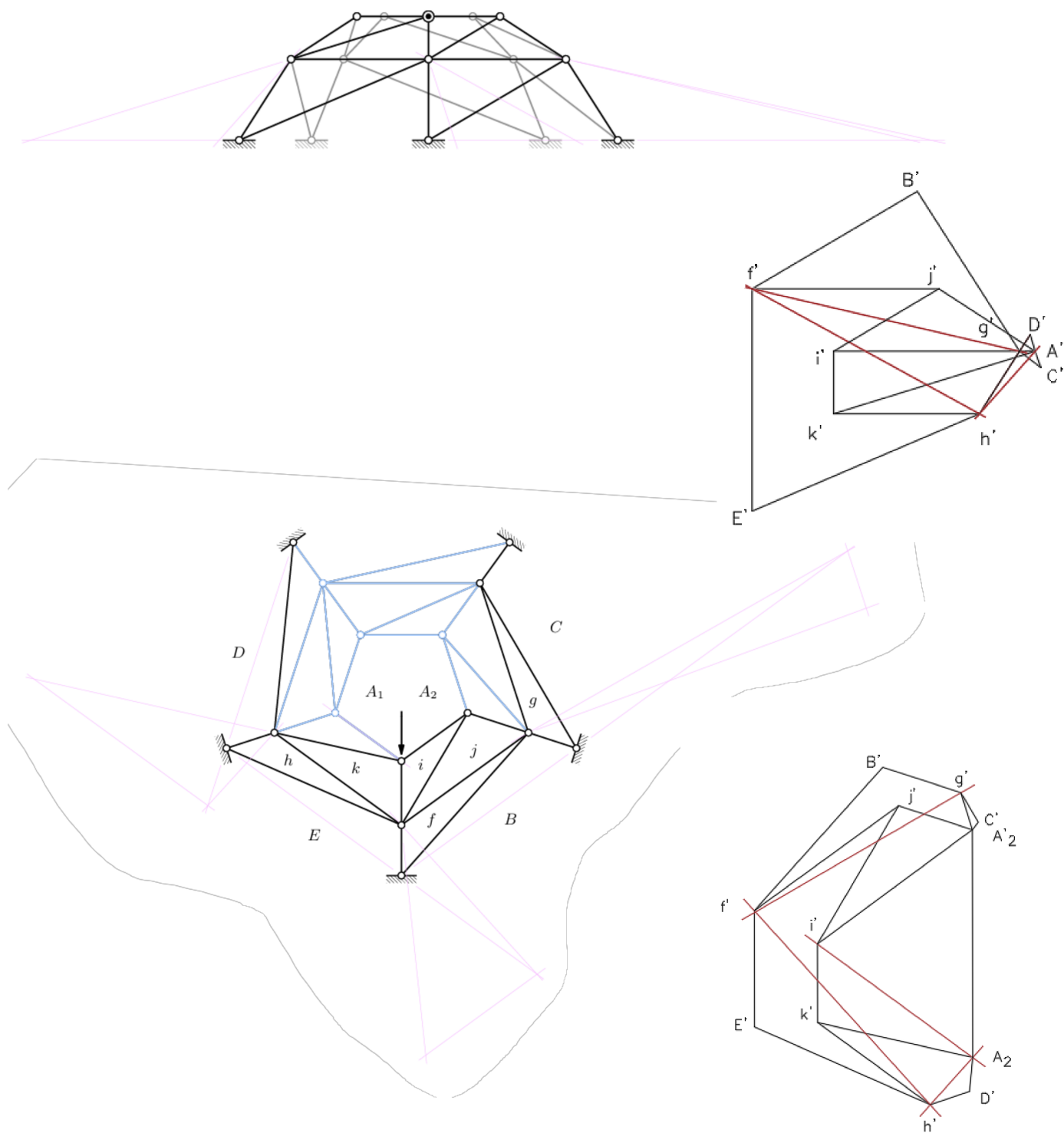
Slika 34.

I za kraj, ravninski čvor A_2gC . Vrijednost je sile A_2g poznata, a ostale dvije nepoznate sile dobit ćemo zatvaranjem trokuta sile. Pri obilasku čvora u smjeru suprotnom od vrtnje kazaljke na satu slijed polja glasi $A_2 - g - C - A_2$. U poligonu sile polazi se od poznatog vektora (dobivenog iz prethodnog čvora), pa je vrh C sjecište paralela s osima stapova gC i CA_2 kroz vrhove g i A_2 (slika 35.).



Slika 35.

Na slici 36. prikazan je cjeloviti plan sila na jednom crtežu.

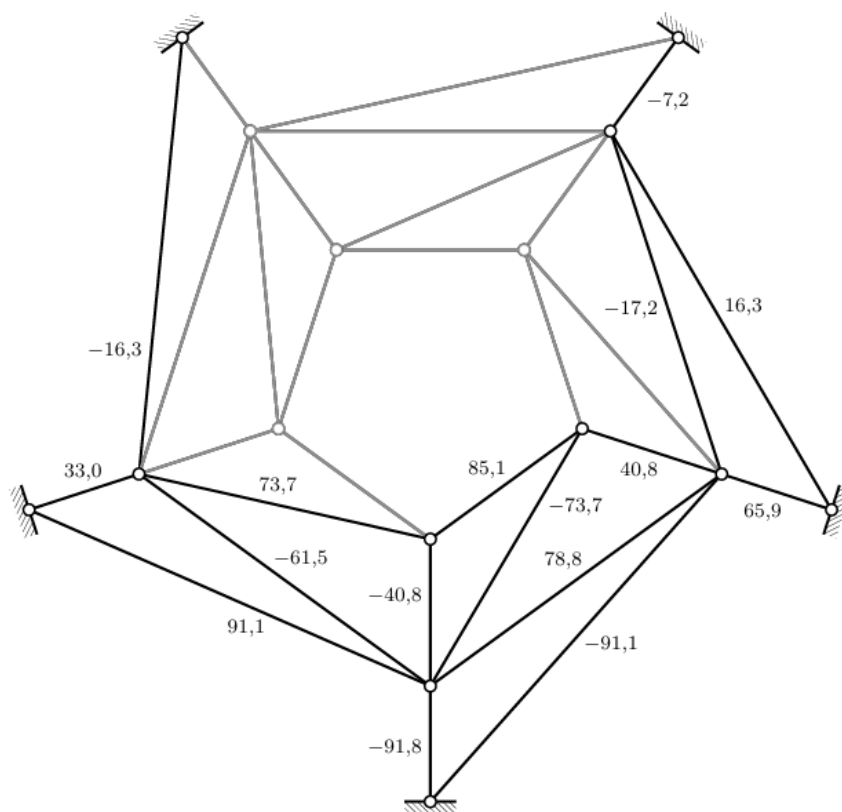


Slika 36.

Intenzitete sila u štapovima izračunat ćemo prema izrazu

$$S_i = \sqrt{S_{i,xy}^2 + S_{i,z}^2},$$

gdje su $S_{i,xy}$ i $S_{i,z}$ duljine tlocrta vektora sila i duljine njihovih komponenta koje su usporedne s osi z, koje ćemo izmjeriti u nacrtu. Poligoni sila crtani su u mjerilu sila 1 cm :: 20 kN, a vrijednost je sile $P = 100$ kN. Intenziteti sila s predznacima koji označavaju tlak (-) i vlak (+) prikazani su na crtežu 37.



Slika 37.

5. ZAKLJUČAK

Rešetkaste konstrukcije zauzimaju značajno mjesto u građevinarstvu zahvaljujući svojoj jednostavnoj geometriji, velikoj nosivosti i racionalnoj uporabi materijala. Provedena analiza potvrdila je važnost poznavanja osnovnih pravila statičke određenosti i geometrijske nepromjenjivosti.

Grafičke metode, poput metode čvorova i Maxwell–Cremoninog plana sila, pokazale su se kao vrijedan alat u obrazovanju i praktičnom radu, jer omogućuju jasnu vizualizaciju odnosa sila i provjeru ravnoteže. Na primjeru Schwedlerove kupole prikazano je da se i složene prostorne konstrukcije mogu analizirati grafičkim postupcima, pri čemu su dobiveni rezultati konzistentni s teorijskim očekivanjima.

Zaključno, može se reći da grafičke metode rješavanja rešetkastih konstrukcija, iako danas često potisnute računalnim metodama, imaju trajnu vrijednost kao temelj razumijevanja statike i logike konstrukcijskog sustava.

POPIS LITERATURE

- [1] Veselin Simović: *Građevna statika 1*, Građevinski institut Zagreb, 1988.
- [2] Josip Brnić: *Mehanika i elementi konstrukcija*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
- [3] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., John T. DeWolf and David F. Mazurek: *Statics and mechanics of materials*, McGraw-Hill, New York, 2011.
- [4] William F. Baker and Allan McRobie (eds.): *The Geometry of Equilibrium. James Clerk Maxwell and 21st-Century Structural Mechanics*, Cambridge University Press, 2025.
- [5] Masoud Akbarzadeh: *3D Graphical Statics Using Reciprocal Polyhedral Diagrams*, Doctoral thesis, ETH Zürich, 2016.,
<https://www.research-collection.ethz.ch/bitstreams/b2aebee4-179b-4be7-8e04-657b907353d3/download>
- [6] Krešimir Fresl: *Građevna statika 1. Predavanja*, skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2017.,
<https://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/gs1.pdf>
- [7] Krešimir Fresl: *Statički određeni prostorni rešetkasti nosači*, prezentacija predavanja, GF SuZ, 2020.,
<https://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/p-pr.pdf>
- [8] Krešimir Fresl: *Jednostavni statički određeni rešetkasti nosači*, sažetak predavanja, GF SuZ, 2018.,
<https://master.grad.hr/nastava/gs/meh1/jsor.pdf>
- [9] Krešimir Fresl: *Statika točke*, poglavlje za skripta iz Mehanike 1., GF SuZ, 2024.,
<https://master.grad.hr/nastava/gs/gs3d/st.pdf>
- [10] Krešimir Fresl: *Maxwell, Cremona & Bow i Schwedler, Maxwell, Cremona & Bow*, dodatna poglavlja za skripta [6], GF SuZ, 2025.,
<https://master.grad.hr/nastava/gs/gs3d/cremona4.pdf>
<https://master.grad.hr/nastava/gs/gs3d/schw-mcb.pdf>

POPIS SLIKA

Slika 1. Tipičan ravninski rešetkasti nosač (prema [3]).....	3
Slika 2. Rešetka sastavljena od četiri i od tri štapa (primjer deformacije) (prema [3]).....	4
Slika 3. Tipične rešetkaste konstrukcije (preuzeto s https://www.drvene-konstrukcije.hr/)...5	
Slika 4. Konstrukcija polaznog trokuta rešetke (iz [8]).....	6
Slika 5. Ulančani prostorni sustav tetraedara (iz [8]).....	8
Slika 6. Maxwellovo pravilo – veza između broja čvorova i štapova (iz [8]).....	9
Slika 7. Schwedlerova kupola 1. vrste (iz [7]).....	10
Slika 8. Schwedlerova kupola 2. vrste (iz [7]).....	11
Slika 9. Ravninski nosač za provjeru geometrijske nepromjenjivosti (iz [1]).....	12
Slika 10. Geometrijska promjenjivost (poseban položaj čvorova) (prema skici kf-a).....	12
Slika 11. Geometrijska promjenjivost (drugi primjer) (prema skici kf-a).....	12
Slika 12. Elementarna pravila za rešetkaste nosače (iz [1]).....	13
Slika 13. Rešetkasti nosač za metodu čvorova (prema [3]).....	14
Slika 14. Trokut sila u čvoru A (prema [3]).....	15
Slika 15. Nosač za Culmannov postupak (iz [8]).....	18
Slika 16. Culmannov poligon sila (iz [8]).....	19
Slika 17. Nosač za Maxwell–Cremonin plan (iz [10]).....	20
Slika 18. Verižni poligon (iz [10]).....	21
Slika 19. Oznake polja u Bowovom načinu (iz [10]).....	22
Slika 20. Primjeri poligona sila (iz [10]).....	23
Slika 21. Nosač s dodatnom zategom AB (iz [1]).....	25
Slika 22. Nosač sa zglobnim spojem (iz [1]).....	26
Slika 23. Konstrukcija recipročnog plana (iz [1]).....	27
Slika 24. Nedopušteno prekidanje štapova (iz [1]).....	27
Slika 25. Dodavanje pomoćnih štapova (iz [1]).....	28

Slika 26. Recipročni plan (iz [1]).....	28
Slika 27. Geometrijska konstrukcija ravnoteže za prostornu rešetku (iz [7]).....	30
Slika 28. Schwedlerova kupola (početni prikaz) (iz [10]).....	33
Slika 29. Određivanje štapova bez sila (iz [10]).....	34
Slika 30. Uravnoteženje čvora A2A1ki (prema [10]).....	35
Slika 31. Uravnoteženje čvora A2ij (prema [10]).....	36
Slika 32. Uravnoteženje čvora A1Dhk (prema [10]).....	37
Slika 33. Uravnoteženje čvora khEfji (prema [10]).....	39
Slika 34. Uravnoteženje čvora A2jfBg (prema [10]).....	41
Slika 35. Uravnoteženje čvora A2gC (prema [10]).....	42
Slika 36. Cjeloviti plan sila (iz [10]).....	43
Slika 37. Intenziteti sila u štapovima (iz [10]).....	45