UVOD U PRORAČUN KONSTRUKCIJA

H. Werner, Zagreb 1985.

Uvod

Pojam "konstrukcija" se u gradjevinarstvu primjenjuje na gradjevinu ili njen dio, kojemu je osnovna uloga održavanje oblika, ili kako se to još kaže "prijenos sila", pa je neophodno da se promatra MEHANIČKA SIGURNOST, t.j. sigurnost od SLOMA, PREVRTANJA i PREKOMJERNIH DEFORMACIJA. Za većinu gradjevinskih konstrukcija se, prema propisima, mehanička sigurnost mora dokazati odgovarajućim proračunom, koji će se ovdje nazivati PRORAČUN KONSTRUKCIJE. Taj proračun je dio tehničke dokumentacije prema kojoj se izvodi gradjevinski objekt.

Proračun konstrukcija se izradjuje postupcima tehničke mehanike u širem smislu, koji su uglavnom obuhvaćeni u slijedećim područjima: STATIKA TIJELA I SISTEMA, OTPORNOST MATERIJALA, GRADJEVNA STATIKA, TEORIJA ELASTIČNOSTI, DINAMIKA KONSTRUKCIJA, TEORIJA ELASTIČNE STABILNOSTI.

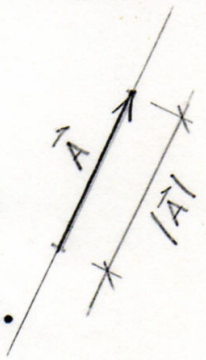
Ovdje će se obraditi uvodni dijelovi tih područja u onoj mjeri, koliko je za osnovni uvid u problematiku proračuna konstrukcija neophodno. Prikaz će sadržavati kratke napomene o nekim pojmovima i postupcima koji su uvedeni u kolegiju MATEMATIKA

HWPK-85-1

Osnovno o vektorima

Fizikalne veličine koje će se ovdje koristiti su trodimenzionalni vektori, koji se u pravilu prikazuju kao usmjerene dužine. Pogodno je da se postupci s vektorima, za ove potrebe, uvedu pomoću usmjerenih dužina, dakle geometrijski, i tek onda interpretiraju algebarski. Umjesto preciznog pojma "usmjerena dužina koja prikazuje promatranu fizikalnu veličinu" u tehnici se direktno koristi naziv te veličine ili u općenitijim razmatranjima, samo pojam "vektor".

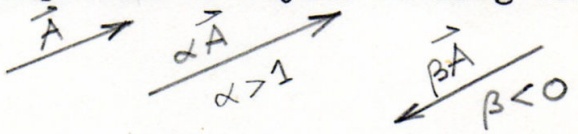
Odredjivanje vektora



Vektori će se geometrijski odredjivati na dva načina:
a) pomoću položaja početka i šiljka
b) pomoću početka, pravca, duljine i smjera.
Ovako odredjeni vektori nazivati će se VEZANI VEKTORI.
U MEhanici se još pojavljuju i:
KLIZNI VEKTORI kojima nije definiran početak, već samo: pravac, duljina i smjer.
SLOBODNI VEKTORI KOJIMA NIJE DEFINIRAN POČETAK NI ČVRSTI pravac, nego samo paralelnost s čvrstim pravcem, duljina i smjer.

Množenje vektora skalarom

Rezultat množenja vektora skalarom je vektor koji je paralelan sa zadanim vektorom, a njegova dujina se dobiva množenjem duljine zadanog vektora s apsolutnom vrijednosti skalara. Ako je skalar pozitivan, smjer umnoška je jednak smjeru zadanog vektora. Ako je skalar negativan smjer umnoška je suprotan od smjera zadanog vektora.



Jedinični vektor

Jedinični vektor ima duljinu 1 i obično se označava malim slovom latinice i indeksom "o". Jediničnim vektorom se može odrediti os, a specijalno se koordinatne osi pravokutnog sustava odredjuju pomoću jediničnih vektora koji se označavaju s i,j,k.

Paralelni vektori

Paralelni vektori leže na paralelnim pravcima i imaju jednak smjer.

HWPK-85-2

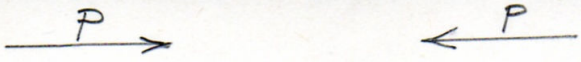
Tehnička notacija vektora

U tehničkim proračunima se često koristi notacija u kojoj se vektor prikazuje grafički. Uz sliku stoji oznaka koja se naziva VELIČINA VEKTORA i ona ne nosi strijelicu. Veličina vaktora je skalar. Veza s notacijom vektorske algebre dobiva se, ako se ucrtani vektor shvati kao jedinični, a zadani vektor kao umnožak tog jediničnog vektora i veličine, pa veličinu odredjuje implicitni izraz: $\vec{A} = \vec{a}_o A$

Očito je apsolutni iznos veličine jednak apsolutnom iznosu t.j. duljini vektora:

$$|A| = |\vec{A}|$$

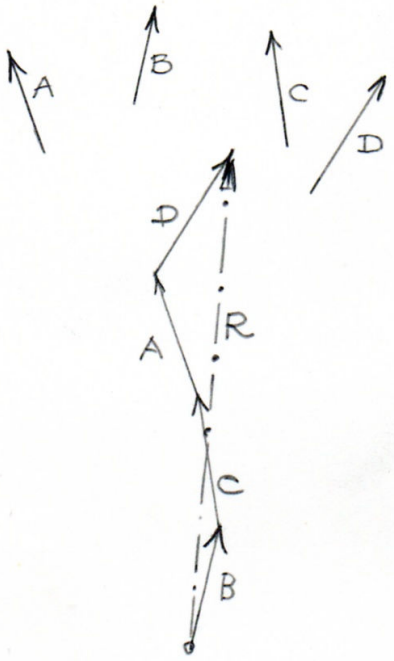
Razlika izmedju tehničke notacije; koja nužno sadrži sliku i notacije u vektorskoj algebri, koju se može ilustrirati slikom, može se dobro uočiti na primjeru SUPROTNIH VEKTORA. U tehničkoj notaciji se prikazuju s jednakim veličinama



a u ilustraciji izraza vektorske algebre označavaju se različitim predznacima



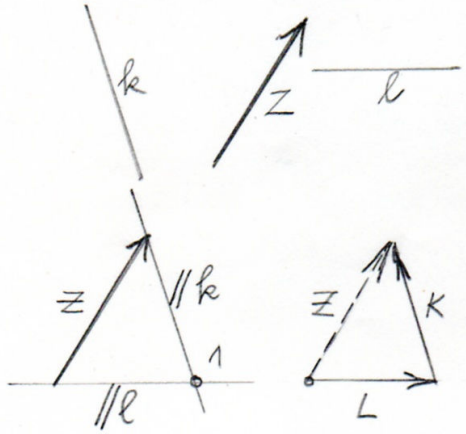
Zbrajanje (sastavljanje, kompozicija) konačnog broja vektora.

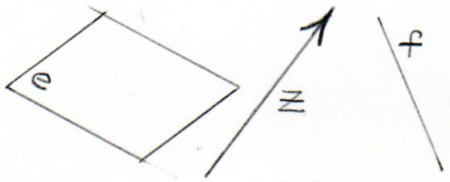


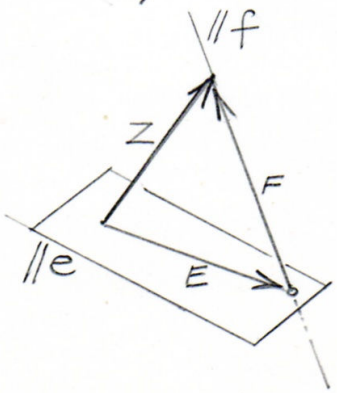
Rezultat vektorskog zbrajanja je novi vektor: REZULTIRAJUĆI VEKTOR (razlikovati će se od pojma "rezultanta" koji će se ovdje fizikalno definirati). Za geometrijsku konstrukciju vektorskog zbroja potrebno je odrediti početak rezultirajućeg vektora. Na taj početak se nanosi početak vektora paralelnog s jednim od pribrojnika. Na šiljak nanesenog paralelnog vektora, nanosi se početak vektora paralelnog s jednim od preostalih pribrojnika. Postupak se ponavlja, dok se ne nanesu paralele sa svim pribrojnicima. Šiljak rezultirajućeg vektora je odredjen šiljkom vektora, koji je posljednji nanesen. Dobiveni niz vektora paralelnih zadanim pribrojnicima, naziva se POLIGON VEKTORA.

HWPK-85-3

Rastavljanje (dekompozicija) vektora







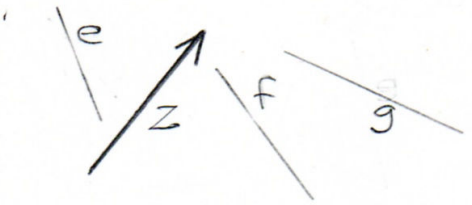
Rezultat rastavljanja su novi vektori, čiji je zbroj zadani vektor. Dobiveni vektori se nazivaju KOMPONENTE.

a) Rastavljanje na dva vektora koji leže na pravcima u ravnini zadanog vektora.

Radi preglednosti se konstrukcija provodi na zasebnom crtežu. Iz šiljka vektora paralelnog sa zadanim nanosi se paralela s jednim pravcem, a iz početka paralela s drugim pravcem. Presjecište pravaca odredjuje poligon dobivenih komponenti. Zadatak je rješiv uz uvjet da PRAVCI NISU PARALELNI.

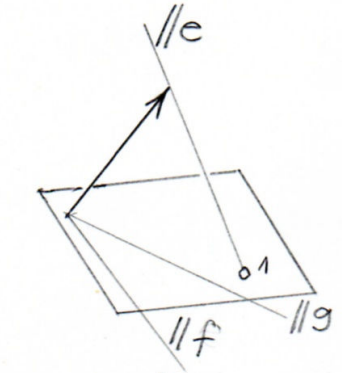
b) RASTAVLJANJE na komponentu u zadanoj ravnini i komponentu na zadanom pravcu.

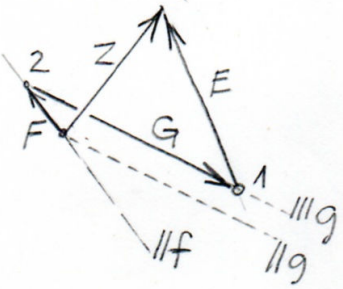
Iz šiljka se nanosi paralela sa zadanim pravcem, a iz početka zadanog vektora se nanosi ravnina paralelna zadanoj ravnini. Probodište pravca na ravnini odredjuje poligon komponenti.



Zadatak je rješiv uz uvjet da PRAVAC I RAVNINA NISU PARALELNI.

c) Rastavljanje na tri komponente, koje leže na zadanim pravcima



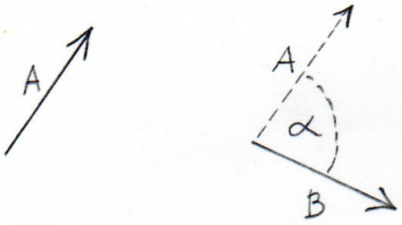


Rješenje se dobiva kombinacijom postupaka iz a) i b). Iz šiljka se nanosi paralela s jednim od zadanih pravaca, a iz početka paralele s preostala dva pravca. Paralele kroz početak odredjuju ravninu. Probodište paralele kroz šiljak s ravninom koja prolazi početkom odredjuje POČetak prve komponente /1/. Kroz probodište se polaže paralela s jednim od dva preostala pravca i odredjuje presjecište s paralelom s trećim pravcem i time je poligon komponenti definiran.

Zadatak je rješiv uz uvjet da pravci NISU PARALELNI S ISTOM RAVNINOM.

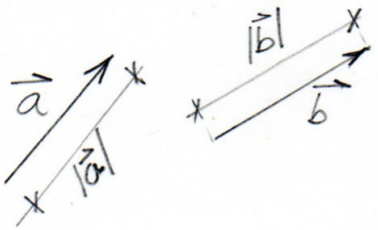
HWPK-85-4

Kut izmedju dva vektora



Kut izmedju dva vektora definiran je kao najmanji kut kojim se paralela s jednim vektorom nanesena na početak drugog vektora, može zaorotirati i dovesti do poklapanja s drugim vektorom. Kut se definira kao pozitivan, pa vrijedi: $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$

Skalarni produkt dvaju vektora



Rezultat operacije je skalar koji je odredjen umnoškom duljina vektora i cosinusom kuta izmedju njih:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

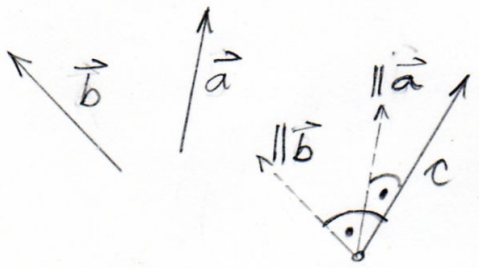
Simbol za operaciju je uveden samo u vektorskoj algebri: u tehničkoj notaciji nije uveden.

Geometrijski se može dokazati da vrijedi: $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
t.j. skalarni produkt zbroja jednak je zbroju skalarnih produkata pojedinih pribrojnika.

Može se dokazati da vrijedi i: $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Vektorski produkt



Rezultat vektorskog produkta je novi vektor, kojemu je pravac okomit na pravce zadanih vektora; duljina jednaka umnošku duljina zadanih vektora i sinusa kuta izmedju njih:

$$|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\alpha$$

Smjer rezultata vektorskog produkta je odredjen zahtjevom, da sa zadanim vektorima čini desni koordinatni sustav (NE MORA BITI PRAVOKUTAN) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

U vektorskoj algebri je uveden simbol za vektorski produkt.

Geometrijski se može dokazati da vrijedi:

$$\vec{a} \times (\vec{e} + \vec{f}) = \vec{a} \times \vec{e} + \vec{a} \times \vec{f}$$

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = a \times (\alpha\vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Postupci s vektorima

Za rješavanje konkretnih zadataka s trodimenzionalnim vektorima, mogući su geometrijski, računski i kombinirani postupci. Geometrijski postupci se mogu realizirati grafički i modelski.

HWPK-85-5

Grafički postupci

Na crtežu se prikazuje tehnički objekt koji se proračunava i svi potrebni vektori, pa treba odabrati dva mjerila:

MJERILO POLOŽAJA služi za prikazivanje objekta i prikazuje omjer duljina u općem obliku: $1 : X$

MJERILO VEKTORA služi za prikazivanje duljina vektora i nosi naziv konkretne fizikalne veličine (npr. MJERILO SILA) u općem obliku:

$$1\ cm :: X\ J$$

pri čemu je X mjerini broj, a J opća oznaka za jedinicu konkretne fizikalne veličine (npr $1\ cm :: 10\ N$).

Grafički postupak se može provesti na jednom crtežu, što može biti nepregledno; ili pomoću dva povezana crteža, koji se nazivaju:

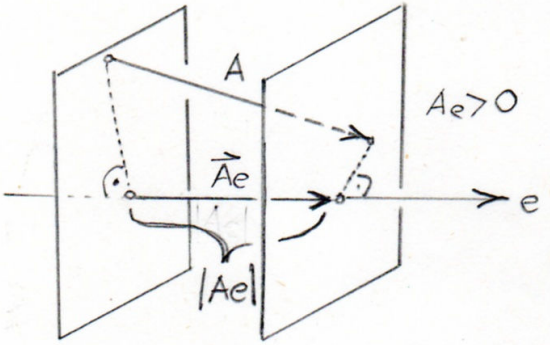
PLAN POLOŽAJA sadrži objekt i vektore koji geometrijski odredjuju objekt. Vektori fizikalnih veličina su ucrtani s pravcem i smjerom, proizvoljnom dužinom, uz oznaku (tehnička notacija).

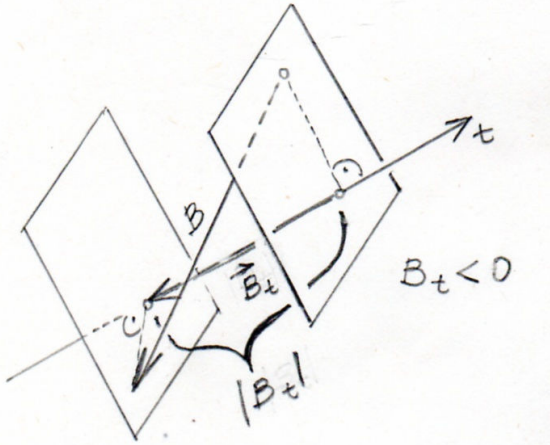
PLAN VEKTORA (konkretno: PLAN SILA itd) sadrži vektorske poligone koji se crtaju u MJERILU VEKTORA

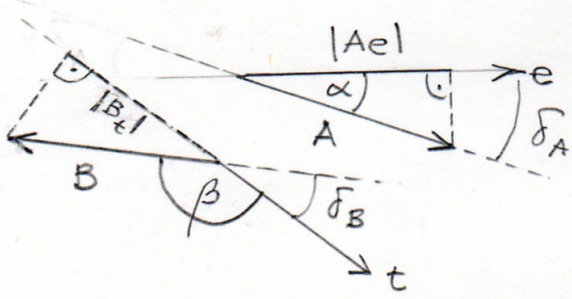
Računski postupci

Računski postupci uglavnom sadrže plan položaja, a vektori se odredjuju pomoću odgovarajućeg broja skalara, s kojima se provodi proračun. Vektor je u trodimenzionalnom prostoru odredjen uredjenom trojkom skalara. Ovdje će ti skalari biti ORTOGONALNE PROJEKCIJE vektora na TRI NEKOMPLANARNE OSI.

Projekcija vektora na os







Pod PROJEKCIJOM će se ovdje podrazumijevati ORTOGONALNA SKALARNA PROJEKCIJA VEKTORA NA OS, odredjena geometrijski na slijedeći način:

Kroz početak i kroz šiljak vektora postavljaju se ravnine okomite na zadanu os. Time je prirodno definirana VEKTORSKA PROJEKCIJA. Skalarna projekcija ili ovdje samo "projekcija" je skalar čiji je apsolutni iznos jednak duljini vektorske projekcije, a PREDZNAK je pozitivan ako je vektorska projekcija usmjerena kao i os, a negativan ako je vektorska projekcija usmjerena suprotno od osi.

Projekcija se OZNAČAVA istim slovom kao vektor s indeksom koji odgovara oznaci osi. (npr. A_e, B_t)

Važno je uočiti da svi vektori kojima početak leži na odabranoj okomitoj ravnini, a šiljak na drugoj okomitoj ravnini imaju jednaku projekciju.

Ako se zadani vektor paralelno pomakne tako da mu početak leži na osi, činiti će zajedno s projekcijom i okomicom pravokutni trokut, pa je vidljivo da vrijedi:

$$A_e = s \cdot A \cdot \cos \delta_A$$

pri čemu je δ kut izmedju pravaca vektora i osi, a s je predznak odredjen gornjim pravilom (Kut izmedju dva pravca: $0 < \frac{\pi}{2} < \delta$)

Veza izmedju projekcije na os i veličine vektora preglednije se može izraziti pomoću kuta izmedju vektora i osi:

$$A_e = A \cdot \cos\alpha, \qquad B_t = B \cdot \cos\beta$$

U vektorskoj algebri se projekcija vektora na os odredjuje kao skalarni produkt zadanog vektora i jediničnog vektora odredjenog zadanom osi: $A_e = \vec{A} \cdot \vec{e}_o$

HWPK-85-6

Na osnovi prikazanog, može se geometrijski dokazati, da vrijedi:

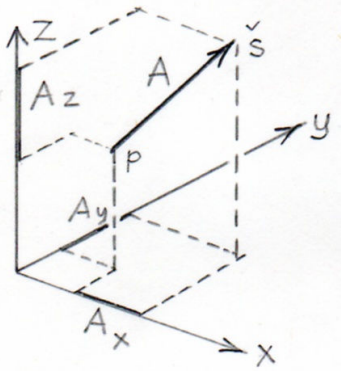
PROJEKCIJA ZBROJA VEKTORA JEDNAKA JE ZBROJU PROJEKCIJA PRIBROJNIKA, t.j. ako vrijedi $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ slijedi da je: $A_x + B_x = C_x$

PROJEKCIJA VEKTORA POMNOŽENOG SKALAROM JEDNAKA JE UMNOŠKU SKALARA I PROJEKCIJE VEKTORA, t.j. ako vrijedi: $\vec{A} = \alpha \vec{B}$ slijedi da je: $A_x = \alpha B_x$

Vektori u desnom koordinatnom sustavu.

Vezani vektor je potpuno odredjen s početkom i tri projekcije na koordinatne osi. Klizni vektor je odredjen s točkom s pravca djelovanja i tri projekcije na koordinatne osi. Slobodni vektor je potpuno odredjen samo sa svoje tri projekcije na koordinatne osi.

a) Projekcije izražene pomoću koordinata početka i šiljka

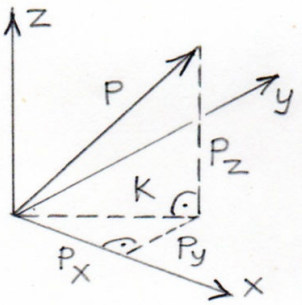


Kako se koordinate i projekcije odredjuju polaganjem okomitih ravnina na osi može se direktno zaključiti:

$A_x = x_š - x_P$; $A_y = y_š - y_P$; $A_z = z_š - z_P$

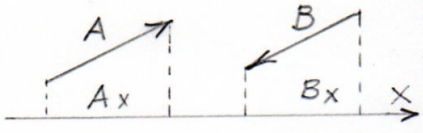
Ako se vektor translatira početkom u ishodište, projekcije vektora su jednake odgovarajućim koodrinatama šiljka.

b) Duljina vektora izražena projekcijama



Promatranjem pravokutnih trokuta K, P_z, P i P_x, P_y, K dobiva se uz korištenje Pitagorinog poučka: $|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$

c) Veza veličine i projekcija

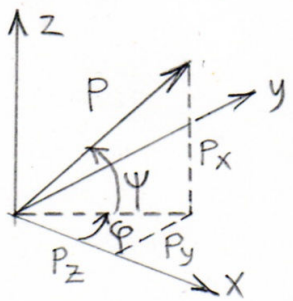


Istim projekcijama odgovaraju dva prikaza istog vektora u tehničkoj notaciji: sa suprotnim strijelicama i veličinama različitog predznaka. Prema tome projekcije i veličinu povezuje izraz:

$P = s\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$

pri čemu može biti $+1$ ili -1.

Ako su vektori A,B na skici paralelni i vrijedi A = -B /veličine!/ onda vrijedi $A_x = B_x$.



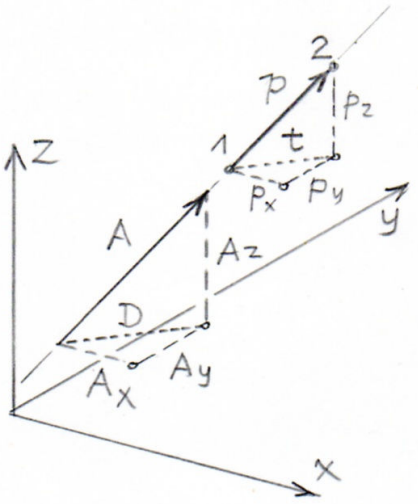
d) Projekcije odredjene veličinom i s dva orjentirana kuta

Pravac i smjer vektora s početkom u ishodištu mogu se odrediti s dva orjentirana kuta φ i ψ. U tom slučaju vrijedi:

$P_x = P \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi$ $P_y = P \cos\psi \sin\varphi$

$P_z = P \cdot \sin\psi$

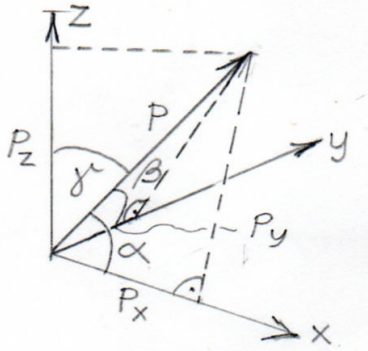
HWPK-85-7



e) Projekcije vektora zadanog veličinom, smjerom i dvije točke s pravca

Izmedju zadanih točaka se uvodi pomoćni vektor, koji je usmjeren kao zadani. Projekcije svakog vektora odredjuju dva pravokutna trokuta. Zbog paralelnosti su odgovarajući trokuti slični: A_x, A_y, D sa p_x, p_y, t. odnosno: D, A_z, P sa t, p_z, p

Predznaci odgovarajućih projekcija su jednaki, jer su vektori paralelni i jednako usmjereni. Na osnovi sličnosti se dobiva: $A_x = \frac{p_x}{p} A$ itd uz $p_x = x_2 - x_1$, a $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$



f) Projekcije vektora zadanog veličinom i tri kuta izmedju vektora i jediničnih vektora osi.

Kod vektora koji počinje u ishodištu, mogu se spajanjem šiljka i njegovih projekcija postaviti tri pravokutna trokuta, u kojima su kutevi izmedju vektora i projekcije upravo zadani kutevi izmedju vektora i jediničnih vektora osi, pa vrijedi:

$$P_x = P \cdot \cos\alpha; \quad P_y = P \cdot \cos\beta; \quad P_z = P \cos\gamma$$

Izrazi prikazani pod d) i e) imaju očito isti oblik, pa vrijedi:

$$\cos\alpha = \cos\psi \cos\varphi = \frac{p_x}{p}$$

Nadalje će se u općim razmatranjima koristiti samo izrazi f).

HWPK-85-8

Postupci s vektorima izraženi pomoću projekcija

Postupci **s trodimenzionalnim vektorima** u kojima se pojavljuje zbrajanje **i množenje skalarom,** mogu se opisati pomoću tri jednadžbe projekcija.

U specijalnom slučaju kada su svi vektori paralelni s jednom ravninom odabrati će se dvije osi u toj ravnini i postupak se opisuje s dvije pripadne jednadžbe projekcija, jer je treća jednadžba trivijalna.

U specijalnom slučaju kada su svi vektori paralelni s jednim pravcem, na kojem se i odabire os, postupak je odredjen samo jednom jednadžbom, jer su dvije preostale trivijalne.

Zbrajanje vektora

Zadani su vektoriA, B, C, i traži se njihov zbroj,t.j. rezultirajući vektor koji će se označiti s R. Pokazano je da je zbroj projekcija jednak projekciji zbroja, pa vrijedi:

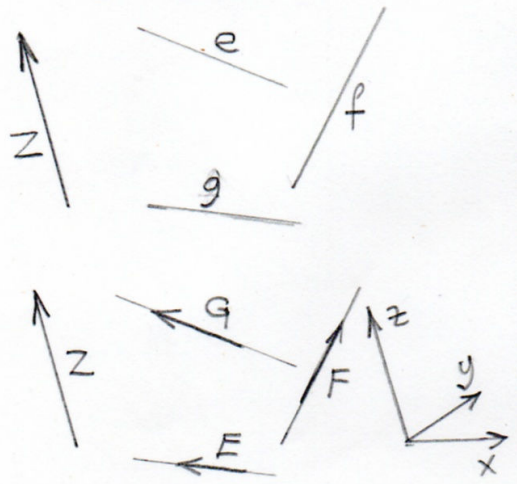
$$R_x = A_x + B_x + C_x, \qquad R_y = A_y + B_y + C_y, \qquad R_z = A_z + B_z + C_z$$

Zbrajanje vektora se u vektorskoj algebri označava sa:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

pa semože uočiti da se gornje tri skalarne jednadžbe projekcija, mogu iz vektorske jednadžbe dobiti uzastopnim množenjem s jediničnim vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ koji odgovaraju osima x, y, z .

Rastavljanje vektora na tri komponente koje leže na zadanim pravcima



Zadan je vektor /z/ i tri pravca e,f,g. Traže se vektori čije su veličine E,F,G takovi, da njihov zbroj bude jednak zadanom vektoru.
Na zadanim pravcima ucrtati će se po volji vektori / to je plan položaja/, a njihove veličine za sada još nisu odredjene. Kako su smjerovi odabrani mogu se odrediti veze zasada nepoznatih vektora i njihovih veličina, npr: $E_x = E \cdot \cos\alpha_E$,

$$E_y = E \cdot \cos\beta_E, \qquad G_z = G \cdot \cos\gamma_z$$

Zbroj traženih komponenti E, F, G mora biti jednak zadanom vektoru, a to mora vrijediti i za projekcije na svaku os zasebno:

$$\cos\alpha_E \cdot E + \cos\alpha_F \cdot F + \cos\alpha_G \cdot G = Z_x$$

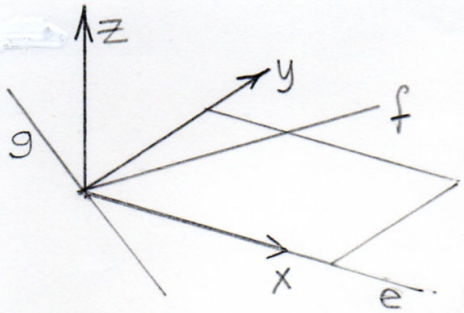
$$\cos\beta_E \cdot E + \cos\beta_F \cdot F + \cos\beta_G \cdot G = Z_y$$

$$\cos\gamma_E \cdot E + \cos\gamma_F \cdot F + \cos\gamma_G \cdot G = Z_z$$

Dobiven je sistem od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice E,F,G, koji će imati rješenje, ako je determinanta koeficijenata uz nepoznanice različita od nule. U ovom slučaju se u determinanti pojavljuju cosinusi. Uvjet da determinanta bude različita od nule očito je ekvivalentan uvjetu da pravci nisu paralelni s istom ravninom. Rješavanjem sistema, dobivaju se veličine E,F, G. Ako je neka od dobivenih veličina NEGATIVNA znači da je ustvari traženi vektor suprotan od unaprijed ucrtanoga. Ako se zbog preglednosti želi ucrtati stvarni smjer, treba nacrtati novu sliku i uz vektore kojima je ucrtan novi smjer označiti kao veličinu apsolutni iznos (npr. $|E|$) ili sam numerički podatak.
npr.

137 →

HWPK-85-9

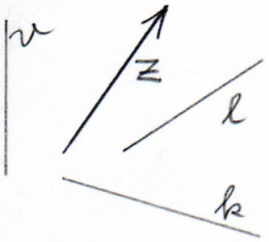


Pogodnim izborom koordinatnih osi može se postići trokutna shema koeficijenata, npr: os x leži na pravcu e, a os y leži u ravnini odredjenoj pravcima e,f. U tom slučaju vrijedi:

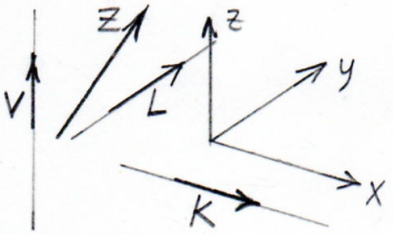
$\cos\beta_E = 0;\quad \cos\gamma_E = 0;\quad \cos\gamma_F = 0$

Time je odredjivanje veličina E,F,G bitno olakšano.

Rastavljanje vektora na tri medjusobno okomite komponente



Promatra se specijalni slučaj kada su pravci medjusobno okomiti. Koordinatni sustav će se odabrati tako da svaka os bude paralelna s jednim od pravaca. Ako se strijelice (kojima se prema tehničkoj notaciji označavaju vektori) zasada nepoznatih komponenti usmjere kao odgovarajuće osi, svodi se se sistem linearnih jednadžbi na najjednostavniji;tzv. dijagonalni oblik:



$$K = Z_x = Z\cos\alpha_z$$
$$L = Z_y = Z\cos\beta_z$$
$$V = Z_z = Z\cos\gamma_z$$

Samo u tom slučaju su veličine komponenti zadanog vektora jednake njegovim projekcijama na odgovarajuće osi. Druga je mogućnost, da se strijelice komponenti usmjere tako da veličine komponenti budu pozitivne, što na crtežu djeluje prirodnije, ali će u tom slučaju vrijediti samo: $K = |Z_x|;\quad L = |Z_y|;\quad V = |Z_z|$

Rastavljanje vektora na dvije komponente koje leže u istoj ravnini s zadanim vektorom

To je specijalni slučaj rastavljanja na tri komponente: čim su dvije u istoj ravnini s zadanim vektorom treća iščezava. Prirodno je, da se koordinatni sustav odabere tako, da dvije osi leže u promatranoj ravnini, pa treba promatrati samo dvije odgovarajuće jednadžbe i odrediti preostale dvije veličine. Zaključci o specijalnim slučajevima vrijede i ovdje.

Rastavljanje vektora na komponentu u zadanoj ravnini i komponentu na zadanom pravcu

U zadanoj ravnini se odabiru dva neparalelna pravca, na kojima se, zajedno s zadanim pravcem, na poznati način mogu odrediti

HWPK-85-10

tri komponente. Tražena komponenta u zadanoj ravnini dobiva se zbrajanjem komponenti dobivenih na odabranim pravcima.

Rastavljenje vektora u vektorskoj algebri

Pokazano je da je opći slučaj rastavljanja, na koji se svi ostali mogu svesti; rastavljanje na tri komponente na zadanim pravcima. Na pravcima će se odabrati jedinični vektori $\vec{e}_o$, $\vec{f}_o$, $\vec{g}_o$, pa će se tražene komponente svakako moći prikazati u obliku:

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e}_o ; \qquad \vec{F} = F \cdot \vec{f}_o ; \qquad \vec{G} = G \cdot \vec{g}_o$$

Zbroj komponenti mora dati zadani vektor $\vec{Z}$, a to izriče jednadžba:

$$\vec{E} + \vec{F} + \vec{G} = \vec{Z}$$

uvrštavanjem izraza za komponente, dobiva se jednadžba:

$$E \vec{e}_o + F \cdot \vec{f}_o + G \vec{g}_o = \vec{Z}$$

u kojoj su nepoznati samo skalari E, F, G. Za provedbu konkretnih proračuna treba postaviti tri skalarne jednadžbe, kojima je gornja vektorska jednadžba ekvivalentna. te će se jednadžbe formalno dobiti tako, da se vektorska jednadžba zasebno pomnoži skalarno jediničnim vektorima odabrane baze, npr. s jediničnim vektorima pravokutnog koordinatnog sustava $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. U tom će se slučaju dobiti upravo jednadžbe projekcija prikazane u .
Pogodno je uočiti, da će se i uz proizvoljne, ali dakako nekomplanarne vektore na zadanim pravcima e, f, g, dobiti dijagonalni sistem linearnih jednadžbi, ako se za projekcije odabere specijalna baza $\vec{p}_o$, $\vec{q}_o$, $\vec{r}_o$, odredjena izrazima:

$$\vec{p}_o = \vec{f}_o \times \vec{g}_o ; \qquad \vec{q}_o = \vec{e}_o \times \vec{g}_o ; \qquad \vec{r}_o = \vec{e}_o \times \vec{f}_o$$

Odredjivanje vektora pomoću koordinata

Računski postupci s vektorima odredjenih pomoću projekcija prikazani su u tehničkoj notaciji i s izrazima vektorske algebre. Za formalno prikazivanje često se koristi drugi pristup: odredjivanje vektora pomoću koordinata. Za taj postupak treba odabrati bazu, najčešće normiranu, a to su u trodimenzionalnom prostoru tri nekomplanarna jedinična vektora, npr $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.
Svaki će se vektor rastaviti na vektore baze, t.j. prikazati u obliku:

$$\vec{P} = P_1 \cdot \vec{e}_1 + P_2 \cdot \vec{e}_2 + P_3 \cdot \vec{e}_3$$

pri čemu se skalari P_1, P_2, P_3 nazivaju KOORDINATE vektora u bazi $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Može se dokazati da vrijedi:
SVAKA KOORDINATA ZBROJA JEDNAKA JE ZBROJU ODGOVARAJUĆIH KOORDINATA ZADANIH PRIBROJNIKA, t.j. ako vrijedi: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$
slijedi da je: $A_1 + B_1 = C_1$; $A_2 + B_2 = C_2$; $A_3 + B_3 = C_3$

Nadalje vrijedi: KOORDINATE VEKTORA POMNOŽENOG SKALAROM JEDNAKE SU ODGOVARAJUĆIM KOORDINATAMA ZADANOG VEKTORA POMNOŽENIM SKALAROM, t.j. ako vrijedi: $\vec{B} = \alpha \vec{A}$, slijedi da je:

$B_1 = \alpha A_1$; $B_2 = \alpha A_2$; $B_3 = \alpha A_3$

Ako je baza ortogonalna, t.j. njeni vektori medjusobno okomiti, koordinate su jednake projekcijama na odgovarajuće osi, pa će se i jednako označavati: $\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$

Koordinate proizvoljnog jediničnog vektora $\vec{e}_o$ u bazi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ će biti cosinusi kuteva izmedju $\vec{e}_o$ i vektora baze, t.j.:

$$\vec{e} = \cos\alpha_e \vec{i} + \cos\beta_e \vec{j} + \cos\gamma_e \vec{k}$$

Izračunavanje vektorskog i skalarnog produkta, te promjena baze mogu se pregledno izvesti pomoću prikazivanja u koordinatama.

a) Vektorski produkt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

b) Skalarni produkt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Za skalarni kvadrat će očito vrijediti: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |a|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

pa se dobiva veza duljine i koordinata: $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Zbog jednakosti koordinata i projekcija, u ovom specijalnom slučaju, dobivena je veza koja je već u geometrijski izvedena za projekcije.

Povezivanjem geometrijske definicije skalarnog produkta i izraza pomoću koordinata, dobiva se direktno izraz za cosinus kuta izmedju dva vektora:

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

c) Promjena baze. Vektor $\vec{P}$ je zadan u proizvoljnoj bazi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Zadani su kutevi izmedju vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i vektora baze $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. pa se svaki vektor prve baze može prikazati u bazi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, prema:

$$\vec{e}_1 = \cos\alpha_1 \vec{i} + \cos\beta_1 \vec{j} + \cos\gamma_1 \vec{k}$$

$$\vec{e}_2 = \cos\alpha_2 \vec{i} + \cos\beta_2 \vec{j} + \cos\gamma_2 \vec{k}$$

$$\vec{e}_3 = \cos\alpha_3 \vec{i} + \cos\beta_3 \vec{j} + \cos\gamma_3 \vec{k}$$

Ovi će se izrazi uvrstiti u izraz $\vec{P} = P_1 \vec{e}_1 + P_2 \vec{e}_2 + P_3 \vec{e}_3$

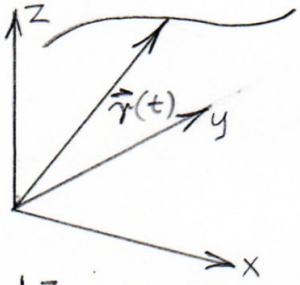
kojim je vektor $\vec{P}$ pdredjen u bazi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Nakon sredjivanja se dobiva: $P_x = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3$;

$P_y = P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + P_3 \cos\beta_3$; $P_z = P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + P_3 \cos\gamma_3$

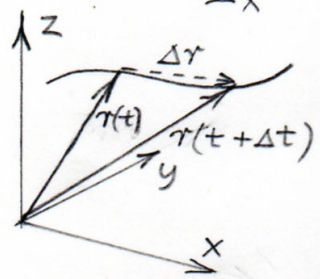
HWPK-85-12

Napomena o kinematici točke

Kinematika je grana mehanike koja proučava geometriju gibanja. Geometrijsko ili matematičko opisivanje gibanja moguće je samo ako se odredjeni dijelovi materije idealiziraju kao točke. Dio materije čije su dimenzije bitno manje od svih ostalih dimenzija koje se u nekom postupku pojavljuju, idealizirati će se kao točka.



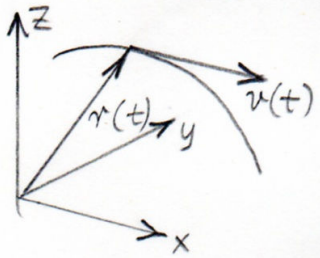
Za opis gibanja točke treba odabrati koordinatni sustav. TRAJEKTORIJA je krivulja koju točka pri gibanju opisuje u odabranom koordinatnom sustavu. Trajektorija će se odrediti radijvektorom kao funkcijom vremena:



Prosječna brzina u vremenskom intervalu $(t,\ t+\Delta t)$ definira se:

$$\vec{v}_s(t,\ t+\Delta t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

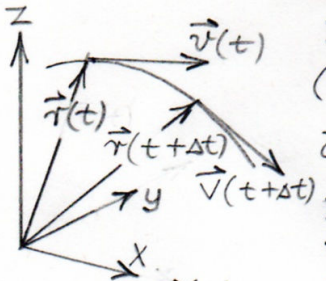
Prosječna brzina je paralelna s prirastom radijvektora. Prirast radijvektora $\Delta \vec{r}$ spaja početnu i završnu točku pripadnog dijela trajektorije.



Trenutna brzina je limes prosječne brzine, t.j. derivacija radijvektora po vremenu:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_s(t,\ t+\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

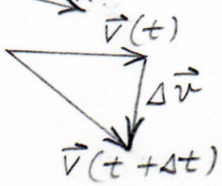
Paralelna je s tangentom na tarjektoriju.



Prosječno ubrzanje u vremenskom intervalu $(t,\ t+\Delta t)$ definira se:

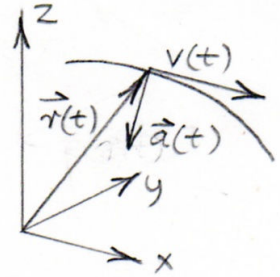
$$\vec{a}_s(t,\ t+\Delta t) = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Prosječno ubrzanje je paralelno s prirastom vektora brzine. Prikazan je poligon $\vec{v}(t) + \Delta\vec{v} = \vec{V}(t+\Delta t)$ odnosno: $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$

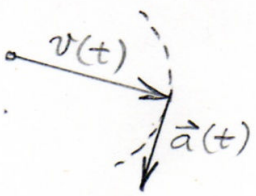


Trenutno ubrzanje je limes prosječnog ubrzanja t.j. derivacija trenutne brzine po vremenu ili druga derivacija radijvektora po vremenu:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_s(t,\ t+\Delta t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



Paralelno je s tangentom na krivulju koju čine šiljci vektora brzina naneseni iz iste točke.



HWPK-85-13

Newtonovi aksiomi

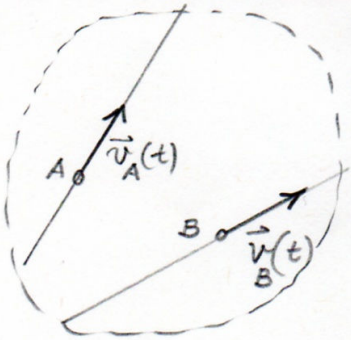
U Newtonovim aksiomoma se navodi pojam"tijelo", koji se u današnjoj terminologiji mora shvatiti kao "materijalna točka". Materijalna točka je tijelo bez dimenzija, koje ima neka fizikalna svojstva. Koordinatni sustav u kojemu **vrijede Newtonovi aksiomi,naziva se INERCIJALNI SUSTAV.**

1. aksiom: Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravocrtnog gibanja, dok ga neko drugo tijelo ne prisili da to stanje ne promijeni.
2. Promjena količine gibanja u vremenu proporcionalna je sili i ima smjer sile.
3. Svakoj akciji jednaka je i suprotno usmjerena reakcija.

"Promjena količine gibanja u vremenu" je derivacija umnoška vektora brzine i mase: $\frac{d}{dt}(mv)$ .U fizici su jedinice odabrane tako, da je faktor proporcionalnosti u drugom aksiomu upravo 1. U trećem aksiomu pojam jednakosti akcije i rekacije ima smisao jednakosti duljine vektora i pravca vektora.

Zakonitosti koje su opisane Newtonovim aksiomima mogu se prikazati pomoću izoliranog sistema koji sadrži samo dvije materijalne točke, znači da se zamišlja situacija u kojoj su moguća mehanička djelovanja samo izmedju te dvije točke.

HWPK-85-14



Ukoliko izmedju tih točaka ne postoji djelovanje, dakle zamišlja se da ne djeluje niti gravitacija, gibati će se te točke po pravcima. To stanje se kinematski opisuje sa:

$$\vec{v}_A(t) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = CONST_A$$

$$v_B(t) = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = CONST_B$$



Ako se pojavi neko djelovanje, npr gravitacija, točke će se početi ubrzano gibati; u općem slučaju po krivuljama, ali će njihovo gibanje sadržavati zakonitost: vektori trenutnih ubrzanja će biti suprotni, paralelni trenutnoj spojnici točaka, a umnožak duljine vektora i mase biti će jednak za obje točke:

$$m_A|\vec{a}_A| = m_B|\vec{a}_B|$$

Uvedena je pretpostavka da se mase ne mijenjaju. Za taj općeniti slučaj će vrijediti:

$$\frac{d}{dt}\left[m_A(t)\cdot\vec{V}_A(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[m_B(t)\cdot\vec{V}_B(t)\right]$$

Umnožak mase i akceleracije definira se kao sila. Ta definicija sadrži pretpostavku o konstantnosti mase. općenitija definicija sile je derivacija umnoška mase i brzine po vremenu.

Ukupnu informaciju o vezi ma/sa i ubrzanja promatranih točaka daje izraz:

$$m_A \cdot \vec{a}_A = - m_B \cdot \vec{a}_B$$

Kod promatranog djelovanja pojavile su se dvije sile:

$$\vec{F}_A = m_A \cdot \vec{a}_A \qquad \vec{F}_B = m_B \cdot \vec{a}_B \; ; \quad \vec{F}_A = - \vec{F}_B$$

Jedinica za silu je izvedena 1 Newton $= 1N = \frac{kgm}{sek^2}$

Opisano djelovanje koje odredjuju dvije sile naziva se i MEHANIČKA INTERAKCIJA ili medjudjelovanje. Interakcija može biti privlačna ili odbojna. U istom smislu se i sile dijele na privlačne i odbojne. Kako će se promatrati i sile koje djeluju na konačne dijelove tijela, sile koje djeluju na točke nazivaju se KONCENTRIRANE Prema tome: koncentrirana sila je vektor.

Djelovanje većeg broja sila na točku. Ravnoteža.

Koncentrirana sila je vektor, pa će se djelovanje većeg broja sila na točku svesti na vektorsko zbrajanje, što se poklapa se rezultatima eksperimenata. Povijesni tok je bio obrnut: zakonitosti uočene pri pokusima s zajedničkim djelovanjem sila doprinijele su formuliranju vektorskog računa.

U specijalnom slučaju vektorski zbroj sila koje djeluju na točku može iščeznuti - kaže se da su sile koje djeluju na točku uravnotežene ili; da je sistem sila koje djeluju na točku u ravnoteži. Pojam ravnoteže će se uvesti i za tijela: Ravnoteža je mirovanje tijela uz djelovanje sila. Pojam mirovanja je relativan, pa se mirovanje može odnositi samo na neki inercijalni sustav. Za većinu tehničkih potrebaće se koordinatni sustav vezan na Zemlju smatrati inercijalnim.

Podjela sila prema dometu

Za prikazivanje postupaka mehanike konstrukcija koriste se dva modela za prikazivanje mehaničkih svojstava materije: diskretni i kontinuirani.
U diskretnom modelu se materija prikazuje pomoću čestica, izmedju kojih djeluju sile. Pojavljuju se dva tipa sila: sile dalekog dometa i sile kratkog dometa.

a) Sile dalekog dometa se mogu pojaviti izmedju svakog para čestica, a njihova veličina je obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti izmedju čestica. Primjeri su: gravitacione sile, magnentne sile, elaktrostatske sile.

HWPK-85-15

b) Sile kratkog dometa djeluju samo izmedju susjednih čestica. Primjeri su: kontaktne sile i unutarnje sile u čvrstim tijelima t.j. tijelima u krutom agregatnom stanju.

Kontaktne sile se mogu kvalitativno opisati na slijedeći način: Postoji odredjena, vrlo mala udaljenost izmedju čestica koje pripadaju čvrstom tijelu i vanjskih čestica kod koje počinje djelovanje kontaktnih sila. Sile su odbojne i rastu s daljnjim smanjenjem razmaka. Gledano u cijelini; kontaktne sile pretstavljaju otpor težnji prodora materije u čvrsto tijelo.

Unutarnje sile se mogu kvalitativno opisati na slijedeći način: Postoji odredjena, vrlo mala udaljenost izmedju dvije susjedne čestice unutar čvrstog tijela, na kojoj unutarnje sile izmedju te dvije čestice iščezavaju. Taj će se razmak nazvati "osnovni razmak". Ako razmak izmedju čestica postane veći od osnovnog pojavljuje se privlačna sila, a ako razmak postane manji od osnovnog pojavljuje se odbojna sila. Apsolutna veličina sile raste s odstupanjem od osnovnog razmaka. Unutarnje sile teže održavanju osnovnog razmaka izmedju čestica. Gledano u cijelini unutarnje sile teže održavanju osnovnog oblika i volumena tijela.
Pretpostavlja se, da postoji osnovni volumen i oblik tijela pri kojemu iščezavaju unutarnje sile u cijelom tijelu.
Promjena oblika i /ili volumena tijela nazivati će se deformacija tijela.

Zakonitosti koje su opisane u ovom modelu ne će se ispitivati kvantitativno; taj model treba samo olakšati usvajanje zakonitosti na kojima se zasniva proračun konstrukcija.

HWPK-85-16

Statika tijela. Djelovanje koncentriranih sila i momenata

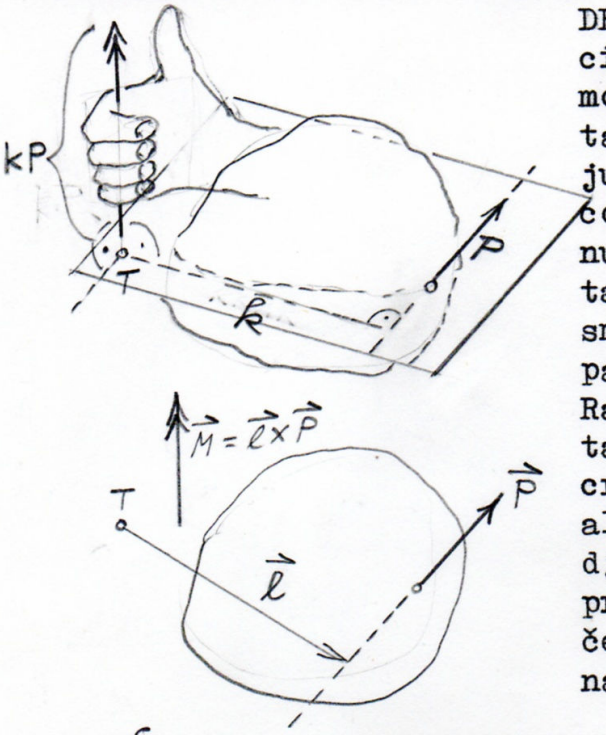
Statika je grana mehanike koja proučava zakonitosti ravnoteže.
Pojam"tijelo" će se ovdje odnositi na čvrsto tijelo t.j. tijelo u krutom agregatnom stanju.
HVATIŠTE je točka u kojoj koncentrirana sila djeluje na tijelo.
PRAVAC DJELOVANJA SILE ili samo PRAVAC SILE je pravac odredjen silom i hvatištem.
Modelski se djelovanje koncentrirane sile na tijelo može prikazati djelovanjem tanke napete niti koja je pričvršćena na tijelo.

TIJELO JE U RAVNOTEŽI AKO JE SVAKI NJEGOV DIO U RAVNOTEŽI.

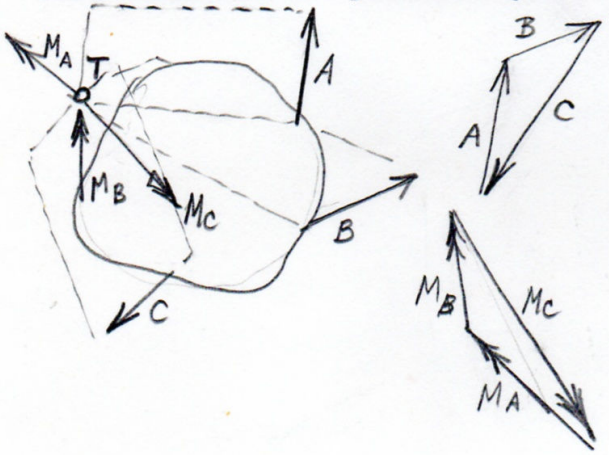
Ako se zamišlja da se tijelo sastoji od čestica, mora svaka čestica biti u ravnoteži.

Najsažetiji opis ravnoteže tijela je vektorski. Za takovo postavljanje uvjeta ravnoteže treba uvesti pojam VEKTORA MOMENTA SILE NA TOČKU. Za odredjivanje vektora momenta treba u prostoru odabrati neku točku koja će se nazivati TOČKA REDUKCIJE.
Udaljenost pravca sile od točke redukcije naziva se KRAK SILE.

Ravnina odredjena pravcem sile i točkom redukcije naziva se RAVNINA MOMENTA. PRAVAC VEKTORA MOMENTA je okomit na ravninu momenta. DULJINA VEKTORA MOMENTA jednaka je umnošku kraka i veličine sile. SMJER VEKTORA MOMENTA odredjuje se prema pravilu DESNE RUKE ZA ROTACIJU: U točki redukcije zamišlja se os okomita na ravninu momenta oko koje se tijelo može okretati. Odredjuje se smisao vrtnje koju bi izazvala sila odredjena strijelicom tehničke notacije sile. Zamišljenu os treba desnom rukom obuhvatiti tako, da vrhovi prstiju sugeriraju smisao ustanovljene vrtnje. Ispruženi palac odredjuje smjer vektora momenta. Radi preglednosti se u tehničkoj notaciji strijelice vektora momenta crtaju s dva šiljka. U vektorskoj algebri je vektor momenta sile odredjen vektorskim produktom $\vec{\ell} \times \vec{P}$ pri čemu je $\vec{\ell}$ bilo koji vektor s početkom u točki redukcije, a s šiljkom na pravcu djelovanja sile.



VEKTORSKI UVJETI RAVNOTEŽE tijela na koje djeluju koncnetrirane sile glase: Iščezava zbroj svih sila i Iščezava zbroj svih vektora momenta na proizvoljno odabranu točku redukcije.



Geometrijska formulacija glasi: Tijelo je u ravnoteži, ako je zatvoren poligon sila i poligon vektora momenata.

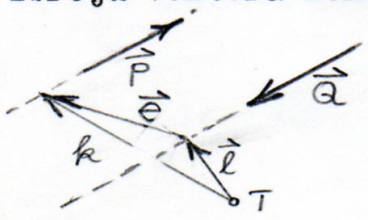
U vektorskoj algebri se uvjeti ravnoteže mogu zapisati:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{O}$$
$$\vec{\ell}_A \times \vec{A} + \vec{\ell}_B \times \vec{B} + \vec{\ell}_C \times \vec{C} = \vec{O}$$

HWPK-85-17

Spreg sila

SPREG SILA ili samo SPREG, čine dvije sile na praalelnim pravcima,, koje imaju jednake duljine i suprotne smjerove. Spregovi se pojavljuju u statičkim razmatranjima, a njihov doprinos uvjetima ravnoteže je specifičan: doprinos zbroju sila iščezava, a doprinos zbroju vektora momenata ne ovisi o položaju točke redukcije:

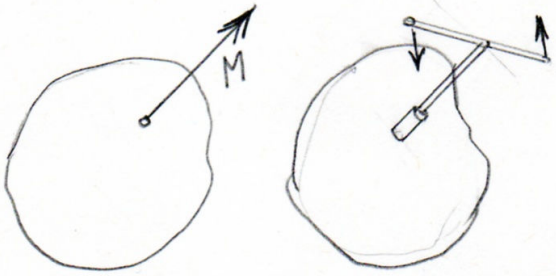


$\vec{M}_{sp} = \vec{k} \times \vec{P} + \vec{\ell} \times \vec{Q}$. Ako se uvrsti:
$\vec{Q} = -\vec{P}$ i $\vec{k} = \vec{\ell} + \vec{e}$, slijedi:
$\vec{M}_{sp} = \vec{\ell} \times \vec{P} + \vec{e} \times \vec{P} + \vec{\ell} \times (-\vec{P}) = \vec{e} \times \vec{P}$

pri tome je $\vec{e}$ bilo koji vektor što spaja pravac sile $\vec{Q}$ s pravcem sile $\vec{P}$. Udaljenost pravaca sprega naziva se KRAK SPREGA. Duljina vektora momenta sprega je umnožak kraka sprega i duljine sile.

Geometrijski se vektor momenta sprega najlakše odredjuje tako, da se na jednom od pravaca odabere točka redukcije.

KONCENTRIRANI MOMENT

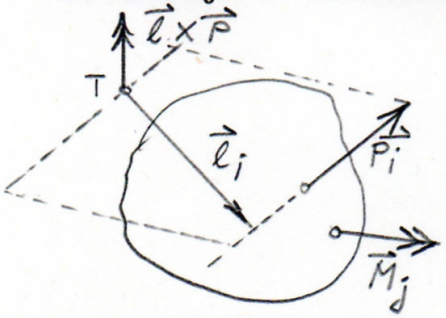


Koncentrirani moment je granični slučaj sprega kojemu je krak proizvoljno malen, a sile proizvoljno velike, pri čemu je moment sprega konačan i stalan. Očito bi naziv "koncentrirani spreg"bio pogodniji. Modelski se djelovanje koncentriranog momenta može realizirati ključem za vijke koji djeluje direktno na promatrano tijelo i to na dio koji je bitno manji od dimenzija tijela.
Koncentrirani moment se simbolički prikazuje vektorom momenta, dakle njegovim doprinosom uvjetima ravnoteže.
Hvatište koncnetriranog momenta postoji, ali njegov položaj nije bitan za doprinos uvjetima ravnoteže.

HWPK-85-18

VEKTORSKI UVJETI RAVNOTEŽE TIJELA NA KOJE DJELUJU KONCENTRIRANE SILE I KONCENTRIRANI MOMENTI sadrže dva uvjeta:
UVJET ZA SILE: Zbroj svih sila (vektorski) koje djeluju na tijelo mora iščezavati.
UVJET ZA VEKTORE MOMENATA: Zbroj vektora momenata svih sila na proizvoljnu točku redukcije i vektora svih koncentriranih momenata mora iščezavati.

Geometrijski se ti uvjeti svode na zatvoren poligon sila i zatvoren poligon koji sadrži vektore momenata sila na proizvoljnu točku redukcije i vektore koncentriranih momenata.



U vektorskoj algebri se ti uvjeti mogu općenito zapisati:

$$\sum_i \vec{P}_i = \vec{0}$$

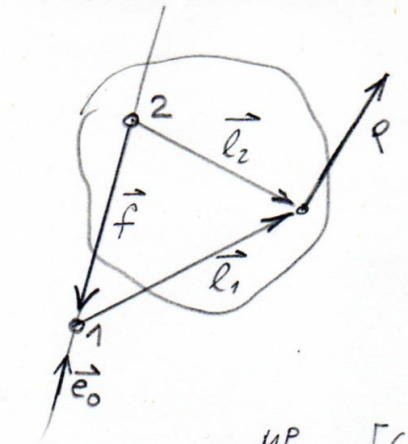
$$\sum_i \vec{\ell}_i \times \vec{P}_i + \Sigma \vec{M}_j = \vec{0}$$

Zasebnim skalarnim množenjem s jediničnim vektorima baze, može se svakom od dva vektorska uvjeta pridružiti po tri skalarna uvjeta ravnoteže, pa se tako dobiva ukupno ŠEST NEZAVISNIH SKALARNIH UVJETA RAVNOTEŽE TIJELA. Ti se uvjeti mogu nazvati i RAČUNSKI UVJETI.

Pri izricanju tih uvjeta pogodno je poznavati jednu zakonitost koja se pojavljuje kod projiciranja vektora momenata na osi.

Moment oko osi

MOMENT OKO OSI je projekcija vektora momenta na os koja prolazi točkom redukcije. Uz zadanu silu i os, moment oko osi je konstantan, dakle ne ovisi o izboru točke redukcije na istoj osi, što se pregledno dokazuje pomoću vektorske algebre. Moment na os $\vec{e}_o$ od sile $\vec{P}$ označiti će se M^P_e. U dokazu će se posebno označiti i točka redukcije. Moment oko osi na točku 1 jest:



$$M^P_{e,1} = (\vec{l}_1 \times \vec{P}) \cdot \vec{e}_o$$

Moment oko osi na točku 2 jest:

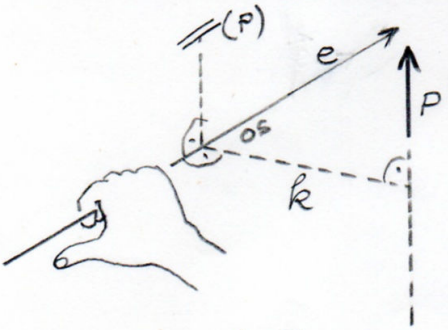
$$M^P_{e,2} = (\vec{l}_2 \times \vec{P}) \cdot \vec{e}_o$$

Ako se u taj izraz uvrsti $\vec{l}_2 = \vec{l}_1 + \vec{f}$

slijedi: $$M^P_{e,2} = [(\vec{l}_1 + \vec{f}) \times \vec{P}] \cdot \vec{e}_o = (\vec{l}_1 \times \vec{P}) \cdot \vec{e}_o + (\vec{f} \times \vec{P}) \cdot \vec{e}_o = M^P_{e,1}$$

i to zato jer član $(\vec{f} \times \vec{P}) \cdot e_o$ iščezava; naime $\vec{f}$ je paralelan s $\vec{e}_o$, pa je $\vec{f} \times \vec{P}$ okomit na $\vec{e}_o$ i njihov skallarni produkt iščezava.

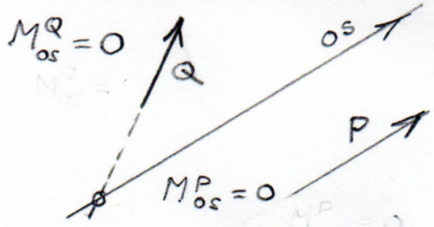
MOMENT OKO OSI OD KONCENTRIRANOG MOMENTA je projekcija vektora koncentriranog momenta na os.



$$M_e = s \cdot k \cdot P$$

Važno je uočiti dva specijalna slučaja:

MOMENT OKO OSI SILE KOJA JE OKOMITA NA OS jednak je umnošku udaljenosti pravca sile od osi i veličine sile, uz predznak koji se odredjuje po pravilu desne ruke: desna ruka obuhvaća os tako, da prsti sugeriraju smisao vrtnje strijelice sile oko osi. Ako je ispruženi palac usmjeren kao os predznak je pozitivan: $S = 1$. Ako je ispruženi palac usmjeren suprotno od osi, predznak je negativan: $S = -1$. Vidljivo je da se ova formulacija odnosi na tehničku notaciju.



MOMENT OKO OSI SILE KOJA JE PARALELNA S OSI ILI SIJEČE OS, JEDNAK JE NULI. U tom je slučaju vaktor momenta za bilo koju točku redukcije na osi, okomit na os, pa njegova projekcija mora iščezavati.

Moment oko osi izražen koordinatama vektora. Za pravokutni koordinatni sustav X, Y, Z će vrijediti:

$$M^P_e = \vec{e}_o \cdot (\vec{l} \times P) = e_{ox}(l_y P_z - l_z P_y) + e_{oy}(l_z P_x - l_x P_z) + e_{oz}(l_x P_y - l_y P_x)$$

Moment oko osi može se izraziti i pomoću veličine sile i cosinusa kuteva koje njen jedinični vektor (u tehničkoj notaciji strijelica) zatvara s osima:

$$M^P_e = [\cos\alpha_e (l_y \cos\gamma_P - l_z \cos\beta_P) + \cos\beta_e (l_z \cos\alpha_P - l_x \cos\gamma_P) + \cos\gamma_e (l_x \cos\beta_P - l_y \cos\alpha_P)] \cdot P$$

HWPK-85-19

Skalarni (računski) uvjeti ravnoteže tijela

SKALARNI UVJETI RAVNOTEŽE TIJELA NA KOJE DJELUJU KONCENTRIRANE SILE I KONCENTRIRANI MOMENTI se mogu formulirati na više načina: formulacija koja se dobiva direktno iz vektorske formulacije naziva se OSNOVNA, a daljnje formulacije će se nazivati ALTERNATIVNE.

Osnovna formulacija skalarnih (računskih) uvjeta ravnoteže sadrži 6 uvjeta koji se podijeljeni u dvije grupe:

TRI UVJETA SILA: Zbroj projekcija svih sila mora iščezavati za svaku od tri nekomplanarne osi.

TRI MOMENTNA UVJETA: Zbroj momenata oko osi svih koncentriranih sila i koncentriranih momenata mora ičšezavati za svaku od tri nekomplanarne osi.

Osnovna formulacija skalarnih uvjeta ravnoteže tijela u pravokutnom koordinatnom sustavu x, y, z glasi:

$$\sum_i P_{xi} = 0; \qquad \sum_i P_{yi} = 0; \qquad \sum_i P_{zi} = 0 \qquad \text{UVJETI SILA}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_i (l_{yi} \cdot P_{zi} - l_{zi} \cdot P_{yi}) + \sum_j M_{xj} &= \phi \\ \sum_i (l_{zi} \cdot P_{xi} - l_{xi} \cdot P_{zi}) + \sum_j M_{yj} &= \phi \\ \sum_i (l_{xi} \cdot P_{yi} - l_{yi} \cdot P_{xi}) + \sum_j M_{zj} &= \phi \end{aligned}\right\} \text{MOMENTNI UVJETI}$$

pri tome su l_x, l_y, l_z projekcije bilo kojeg vektora koji spaja točku redukcije s ishodištem.
M_{xj}, M_{yj}, M_{zj} su projekcije vektora koncentriranih momenata na osi. *

HWPK-85-20

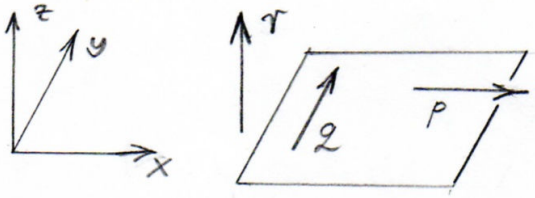
Alternativne formulacije skalarnih uvjeta ravnoteže.

Može se pokazati da će uvjeti ravnoteže biti valjani i ako se uz tri uvjeta sila, tri uvjeta momenata odrede pomoću osi koje ne prolaze istom točkom. Nadalje, uvjeti ravnoteže se mogu formu irati tako, da se postavi 4, 5 ili 6 momentnih uvjeta, a uz njih dva, jedan ili nijedan uvjet sila. Pri tome raspored osi pomoću kojih se uvjeti postavljaju mora zadovoljavati neke geometrijske uvjete. Navesti će se po jedan primjer za svaku kombinaciju broja uvjeta sila i uvjeta momenata. Zbog preglednosti će se osi pomoću kojih se postavljaju jednadžbe sila označavati sa x, y, z , osi pomoću kojih se postavljaju jednadžbe momenata označavati će se sa p, q, r, s, t, u .
Valjanost uvjeta ravnoteže može se provjeriti tako, da ne postoji mogućnost da samo jedna sila ili jedan moment djeluje na tijelo, a da su pri tome uvjeti ravnoteže zadovoljeni.

---

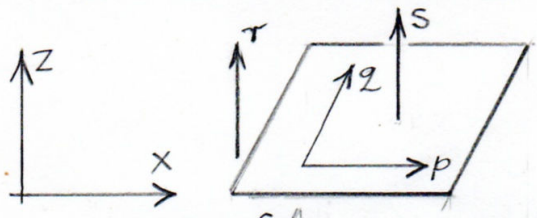
* Momentni uvjeti se mogu shvatiti i kao momenti oko osi koje su paralelne s koordinatnim osima, a prolaze točkom redukcije. Ako je točka redukcije u ishodištu, momentni uvjeti su ujedno i momenti oko koordinatnih osi, a l_{xi}, l_{yi}, l_{zi} su koordinate točke, koja je proizvoljno odabrana na pravcu djelovanja sile.

a) Tri uvjeta sila i tri uvjeta momenata oko osi koje ne prolaze istom točkom . Neka vrijedi: $p \parallel x$, $q \parallel y$, $r \parallel z$.

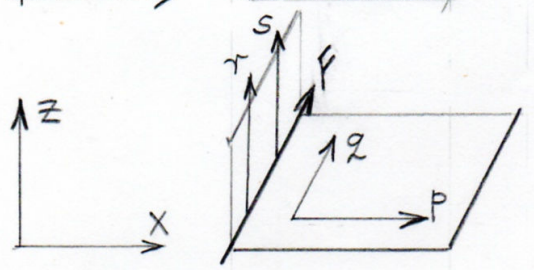


Koncentrirana sila ne može djelovati uz zadovoljene uvjete ravnoteže x, y, z. Koncentrirani moment nemože djelovati uz zadovoljene uvjete ravnoteže p, q, r, jer iščezavanje njegovih projekcija osiguravaju i osi koje ne prolaze točkom.

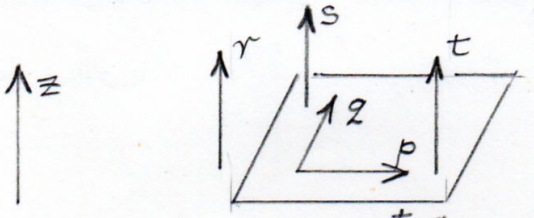
b) Dva uvjeta sila i četiri uvjeta momenata. Neka vrijedi: $p \parallel x$, $q \perp p$ z, r, s okomiti na ravninu p, q. Ravnina r, s ne smije biti okomita na x.



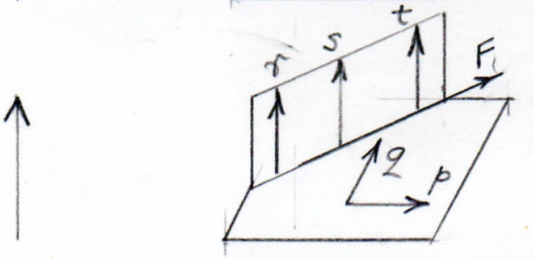
Pretpostaviti će se da je ravnina r, s okomita na x. U tome slučaju bi se na presječnici ravnine r, s i ravnine p, q mogla pojaviti sila (na skici označena s F), a da pri tome svi, tako formulirani uvjeti budu zadovoljeni, pa oni ne mogu biti uvjeti ravnoteže.



c) Jedan uvjet sila i pet uvjeta momenata. Neka vrijedi: $p \perp q$, a z, r, s, t okomiti na ravninu p, q. Uvjet rasporeda osi u ovom slučaju glasi: r, s, t ne smiju ležati u istoj ravnini.



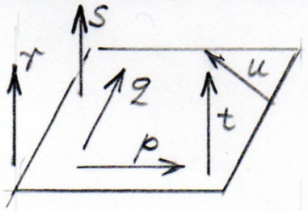
Pretpostaviti će se da r, s, t leže u istoj ravnini. U tom slučaju bi se na presječnici ravnine r, s, t i ravnine p, q mogla pojaviti sila (na skici označena s F), a da pri tome tako formulirani uvjeti budu zadovoljeni.

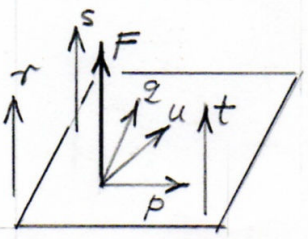


d) Šest uvjeta momenata. Neka vrijedi $p \perp q$, r, s, t okomiti na ravninu p, q u kojoj leži os u. Postoje dva uvjeta za raspored osi:

I. r, s, t ne smiju ležati u istoj ravnini(kao u c)).

II. Os u ne smije prolaziti presjecištem osi p i q. Kada ovaj uvjet ne bi bio ispunjen mogla bi presjecištem osi p, q, u prolaziti sila(F) paralelna s r, s, t, a da pri tome tako formulirani uvjeti budu zadovoljeni.





HWPK-85-21

Iskorištavanje uvjeta ravnoteže (Uravnotežavanje)

U proračunu konstrukcija se pojavljuje zadatak odredjivanja sila i momenata iz uvjeta ravnoteže tijela. Na to tijelo, dakako djeluju i neke zadane sile i momenti. Taj će se postupak nazivati iskorištavanje uvjeta ravnoteže ili samo: uravnotežavanje. Sile i momenti odredjeni na taj način iz uvjeta ravnoteže nazivati će se uravnotežavajuće sile i momenti.

Opći zaključci o uravnotežavanju mogu se izvesti iz skalarnih uvjeta ravnoteže. Kao nepoznanice se obično odabiru veličine ili projekcije sila i momenata. U tom slučaju šest nezavisnih uvjeta ravnoteže vodi na sistem od šest linearnih elgebarskih jednadžbi,

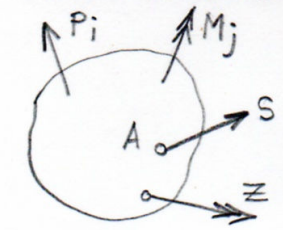
iz kojih se u regularnom slučaju može odrediti šest nepoznanica, a zadane sile mogu biti proizvoljne.
Pojavljuju se često i specijalni slučaji djelovanja zadanih i nepoznatih sila, kod kojih su neki uvjeti ravnoteže identično zadovoljeni, pa se onda može odrediti samo manji broj nepoznanica.

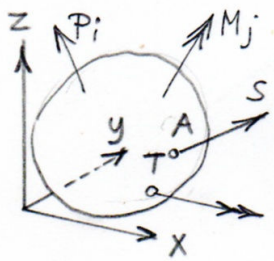
Većinu praktičnih zadataka se može riješiti i geometrijskim razmatranjima, pa su na osnovu toga mogući grafički postupci.

U regularnom slučaju uravnotežavanja tijela, mogu se odrediti najviše tri nepoznanice koje definiraju momente, a preostali broj nepoznanica do ukupno šest će biti nepoznanice koje deiniraju sile. Postoji neizmjerno mnogo kombinacija koje se unutar tih zahtjeva mogu riješiti, ali se u praktičnim zadacima pojavljuje nekoliko karakterističnih tipova koji će se pobliže opisati.

HWPK-85-22

a) Odredjivanje uravnotežavajuće sile u zadanoj točki i uravnotežavajućeg momenta.





Na promatrano tijelo, osim zadanih koncentriranih sila i momenata, djeluje zasada nepoznata sila S u točki A i zasada nepoznati koncentrirani moment Z. S i Z će se odrediti tako da tijelo bude u ravnoteži.

Za računsko rješenje zadatka treba odabrati koordinatni sustav i točku redukcije (osnovna formulacija uvjeta ravnoteže). Ako se točka redukcije odabere na točki s pravca nepoznate sile, dobiva se:

$$S_x = -\sum_i P_{xi}; \quad S_y = -\sum P_{yi}; \quad S_z = -\sum P_{zi}$$

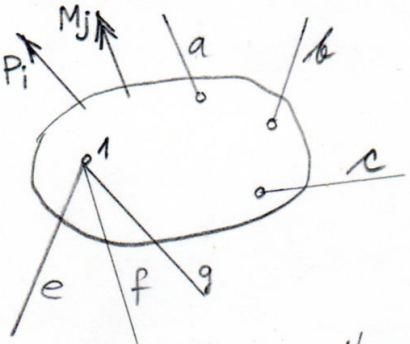
$$Z_x = -\left[\sum_i (\ell_{yi} \cdot P_{zi} - \ell_{zi} P_{yi}) + \sum_j M_{xj}\right]$$

$$Z_y = -\left[\sum_1 (\ell_{zi} P_{xi} - \ell_{xi} P_{zi}) + \sum_j M_{yj}\right]$$

$$Z_z = -\left[\sum_1 (\ell_{xi} \cdot P_{yi} - \ell_{yi} \cdot P_{xi}) + \sum_j M_{zj}\right]$$

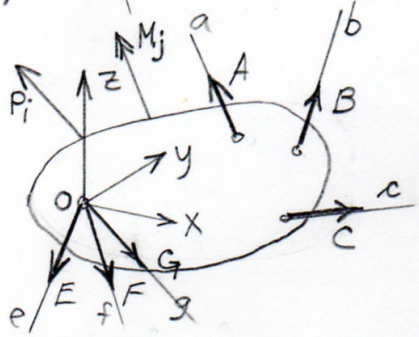
Kod geometrijskog rješenja konstruira se poligon zadanih sila. Uravnotežavajuća sila treba zatvoriti poligon, pa je njezin šiljak na početku poligona zadanih sila, a njezin početak na šiljku poligona zadanih sila. Nadalje treba konstruirati poligon koji se sastoji od vektora momenata zadanih sila na točku redukcije i od vektora koncentriranih momenata. Uravnotežavajući moment treba zatvoriti taj poligon.

b) Odredjivanje šest uravnteža vajućih sila na zadanim pravcima, od kojih se tri sijeku u istoj točki



Na promatrano tijelo, osim zadanih koncentriranih sila P_i i zadanih koncentriranih momenata M_j djeluju i sile na zadanim pravcima e, f, g, a, b, c tako da tijelo bude u ravnoteži.

Za računsko rješenje zadatka odabrati će se osnovna formulacija uvjeta ravnoteže, pa treba definirati koordinatni sustav X, Y, Z. U tehničkoj notaciji treba na pravcima odabrati strijelice koje prikazuju sile i oznake veličina tih sila: E, F, G, A, B, C.



Odabrana osnovna formulacija uvjeta ravnoteže vodi na slijedeći sistem linearnih algebarskih jednadžbi:

$$\cos\alpha_E \cdot E + \cos\alpha_F F + \cos\alpha_G G + \cos\alpha_A A + \cos\alpha_B \cdot B + \cos\alpha_C C = -\sum_1^n P_{Xi}$$

$$\cos\beta_E \cdot E + \cos\beta_F F + \cos\beta_G \cdot G + \cos\beta_A \cdot A + \cos\beta_B \cdot B + \cos\beta_C \cdot C = -\sum P_{yi}$$

$$\cos\gamma_E \cdot E + \cos\gamma_F \cdot F + \cos\gamma_G \cdot G + \cos\gamma_A A + \cos\gamma_B \cdot B + \cos\gamma_C \cdot C = -\sum P_{zi}$$

$$m_{XA} \cdot A + m_{XB} \cdot B + m_{XC} \cdot C = -\sum M^P_{Xi} + \sum M_{Xj}$$

$$m_{yA} \cdot A + m_{yB} \cdot B + m_{yC} \cdot C = -\sum M^P_{yi} + \sum M_{yj}$$

$$m_{ZA} \cdot A + m_{ZB} \cdot B + m_{zC} \cdot C = -\sum M^P_{zi} + \sum M_{zj}$$

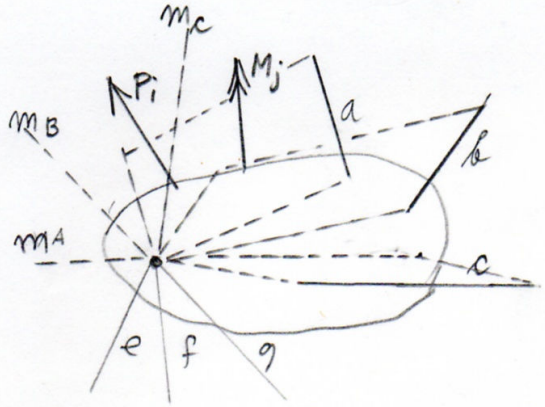
pri tome faktori tipa m_{XA} povezuju veličinu sile s njenim momentom oko osi i odredjuju se prema izrazima tipa:

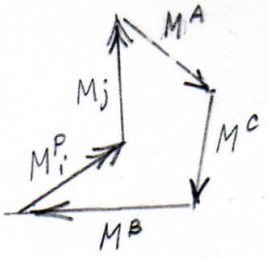
$$m_{XA} = (l_{yA} \cdot \cos\gamma_A - l_{ZA} \cdot \cos\beta_A)$$

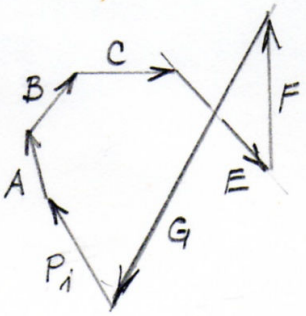
Dobiven sistem jednadžbi je rješiv ako je pripadna determinanta različita od nule.

Za geometrijsko rješavanje treba odrediti ravnine kroz pravce djelovanja A, B, C i točke redukcije i okomito na te ravnine pravce vektora momenata sila m_A, m_B, m_C. Treba konstruirati poligon vektora momenata i koncentriranih momenata zadanih sila i zatvoriti ga s tri vektora momenta nepoznatih sila M^A, M^B, M^C, što se svodi na odredjivanje jednog uravnotežavajućeg vektora, kao u a) i

HWPK-85-23







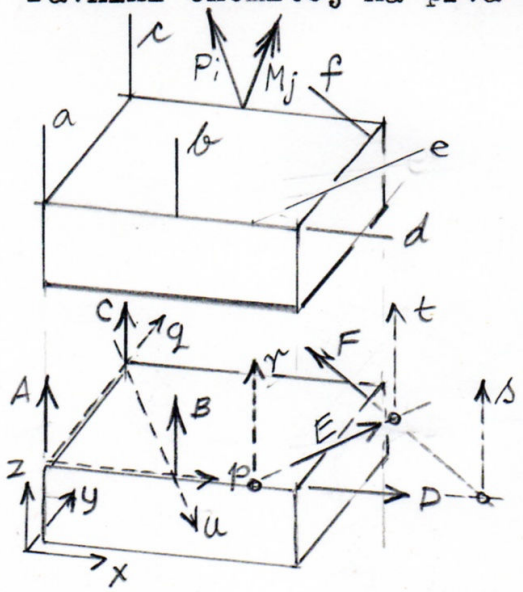
njegova dekompoziciju na tri komponente M^A, M^B, M^C. Iz dobivenih vektora momenata nepoznatih sila A, B, C, odredjuju se dijeljenjem s odgovarajućim udaljenostima od točke redukcije veličine sila A, B, C, a prema smjeru vektora momenta odredjuju se smjerovi tih sila.

Slijedeća faza rješavanja započinje konstrukcijom poligona zadanih sila P_i i upravo odredjenih sila A, B, C. Taj poligon treba zatvoriti silama E, F, G, što se svodi na odredjivanje jednog uravnotežavajućeg vektora i njegovu dekompoziciju na na tri komponente Sam uravntežavajući vektor se u poligonu ne mora niti ucrtati: izmedju šiljka i početka poligona konstruiraju se tri vektora kao za dekompoziciju, ali im se smjerovi odrede tako, da poligon bude zatvoren.

Sada se lako može izreći geometrijski uvjet rješivosti: vektori momenata sila E,F,G ne smiju biti komplanarni i pravci na kojima leže sile E,F,G ne smiju biti komplanarni.

HWPK-85-24

c) Odredjivanje triju sila na zadanim paralelnim pravcima i triju daljnjih sila na zadanim pravcima koji leže u ravnini okomitoj na prva tri pravca.



Na promatrano tijelo, osim zadanih koncentriranih sila P_i i zadanih koncentriranih momenata M_j djeluju i sile na zadanim pravcima a, b, c, d, e, f, čiji je raspored već naveden u naslovu. Tijelo mora biti u ravnoteži.

Zadatak će se riješiti računski i to pomoću alternativne formulacije uvjeta ravnoteže koja sadrži šest momentnih uvjeta. Osi oko kojih će se odredjivati momenti mogu se odabrati tako, da se dobije dijagonalni sistem jednadžbi. Oznake za veličine sila su odabrane i odgovaraju oznakama pravaca.

Sila A će se odrediti pomoću zbroja momenata oko osi u, koja leži u zadanoj ravnini kroz probodišta sila B i C. Analogno se B odredjuje pomoću osi q, a sila C pomoću osi p. Sila D će se odrediti pomoću zbroja momenata oko osi t koja je okomita na zadanu ravninu i prolazi sjecištem pravaca sila E i F. Sila E će se odrediti

analogno pomoću osi s, a sila F pomoću osi r.

Sada se može izreći geometrijski uvjet rješivosti zadatka: tri paralelna pravca (u primjeru a,b,c) ne smiju ležati u istoj ravnini, a pravci koji leže u ravnini okomitoj na prva tri pravca ne smiju se sijeći u istoj točki.

Kada bi tri paralelna pravca ležala u istoj ravnini mogla bi se na presječnici s zadanom ravninom odabrati os oko koje će se odredjivati momenti. U dobivenoj jednadžbi ne bi se pojavila niti jedna nepoznata veličina, što znači da bi se u determinanti pojavio redak samih nula, a to povlači iščezavanje determinante. Time je opravdan prvi uvjet.

Kada bi se tri pravca koji leže u zadanoj ravnini sjekla u istoj točki, mogla bi se kroz tu točku odabrati os paralelna s prva tri pravca. U zbroju momenata oko te osi ne bi se pojavila ni jedna nepoznata veličina, a to povlači iščezavanje determinante. Time je opravdan drugi uvjet.

Zanimljivo je da u ovom slučaju raspored osi oko kojih se računaju momenti odgovara rasporedu nepoznatih sila.

HWPK-85-25

Uvjet ekvivalencije sistema sila i momenata

Općenito

U statici tijela se postupci mogu pojednostavniti, ako se zadana sila, moment ili sistem sila i momenata zamijeni drugim sistemom čiji je doprinos uvjetima ravnoteže jednak doprinosu zadanog sistema. Takove sisteme nazivamo statički ekvivalentnima

DVA SU SISTEMA SILA I KONCENTRIRANIH MOMENATA STATIČKI EKVIVALENTNI AKO SU NJIHOVI DOPRINOSI UVJETIMA RAVNOTEŽE JEDNAKI.

Zadaci ekvivalencije su po svojoj algebarskoj odnosno gepmetrijskoj strukturi potpuno analogni zadacima uravnotežavanja; razlika se pojavljuje samo u smjeru dobivenih sila.

Geometrijski se uvjet ekvivalencije može formulirati ovako:
Poligoni sila ekvivalentnih sistema koji imaju zajednički početak moraju imati i zajednički šiljak.
Poligoni sastavljeni od vektora momenata sila na odabranu točku redukcije i od vektora koncentriranih momenata, moraju kod ekvivalentnih sistema sila imati zajednički početak i zajednički šiljak.

U vektorkoj algebri se ti uvjeti mogu izraziti ovako:

Sistem koncentriranih sila $\vec{P}_i$ i koncentriranih momenata $\vec{M}_j$ biti će ekvivalentan sistemu koncentriranih sila $\vec{Q}_r$ i koncentriranih momenata $\vec{K}_s$, ako su zadovoljene dvije vektorske jednadžbe:

$$\sum_1^n \vec{P}_i = \sum_1^t \vec{Q}_r$$

$$\sum_1^n \vec{l}_i \times \vec{P}_i + \sum_1^m \vec{M}_j = \sum_1^t \vec{l}_r \times \vec{Q}_r + \sum_1^v \vec{K}_s$$

Skalarni (računski) uvjeti ekvivalencije, mogu se kao i uvjeti ravnoteže formulirati na više načina: pomoću OSNOVNE formulacije i pomoću ALTERNATIVNIH Formulacija.

Osnovna formulacija skalarnih uvjeta statičke ekvivalencije sadrži šest uvjeta koji se mogu podijeliti u dvije grupe:

TRI UVJETA SILA: Zbroj projekcija svih sila statički ekvivalentnog sistema, mora za svaku od tri nekomplanarne osi, biti jednak zbroju projekcija svih sila zadanog sistema.

TRI MOMENTNA UVJETA: Zbroj projekcija vektora momenata i koncentriranih momenata zadanog sistema, mora za svaku od tri nekomplanarne osi, biti jednak odgovarajućem zbroju projekcija zadanog sistema.

Osnovna formulacija skalarnih uvjeta statičke ekvivalencije dvaju sistema sila u pravokutnom koordinatnom sustavu x,y,z glasi:

$$\sum_1^n P_{xi} = \sum_1^t Q_{xr}\,; \qquad \sum_1^n P_{yi} = \sum_1^t Q_{yr}\,; \qquad \sum_1^n P_{zi} = \sum_1^t Q_{zr}$$

$$\sum_1^n (l_{yi} P_{zi} - l_{zi} P_{yi}) + \sum_1^m M_{xj} = \sum_1^t (l_{yr} Q_{zr} - l_{zr} Q_{yr}) + \sum_1^v K_{xs}$$

$$\sum_1^n (l_{zi} P_{xi} - l_{xi} P_{zi}) + \sum_1^m M_{yj} = \sum_1^t (l_{zr} Q_{xr} - l_{xr} Q_{zr}) + \sum_1^v K_{ys}$$

$$\sum_1^n (l_{xi} P_{yi} - l_{yi} P_{xi}) + \sum_1^m M_{zj} = \sum_1^t (l_{xr} Q_{yr} - l_{yr} Q_{xr}) + \sum_1^v K_{zs}$$

pri tome su Q_r koncentrirane sile, a K_s koncnetrirani momenti ekvivalentnog sistema.

Alternativne formulacije statičke ekvivalencijeodgovaraju alternativnim formulacijama uvjeta ravnoteže.

Iskorištavanje uvjeta statičke ekvivalencije

Opći zaključci o iskorištavanju uvjeta statičke ekvivalencije, analogni su zaključcima o iskorištavanju uvjeta ravnoteže; u regularnom slučaju može se odrediti ekvivalentni skup odredjen s 6 skalarnih podataka, od kojih najviše tri odredjuju momente ili njihove projekcije, a preostali odredjuju sile. Ovdje će se opisati samo nekoliko osnovnih slučajeva.

a) Rezultirajuće djelovanje

Rezultirajuće djelovanje je statički ekvivalentno zadanom sistemu koncENtriranih sila i koncentriranih momenata, a sastoji se od jedne koncentrirane sile i jednog koncentriranog momenta, koji će se nazivati REZULTIRAJUĆA SILA i REZULTIRAJUĆI MOMENT.

HWPK-85-26

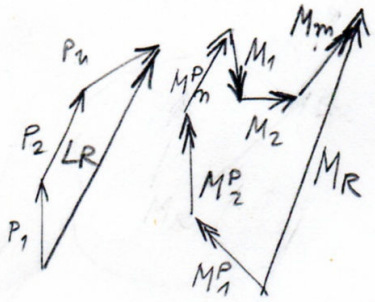
Pri odredjivanju rezultirajućeg djelovanja mora se odabrati točka kroz koju će prolaziti pravac djelovanja rezultirajuće sile. Ta je točka na skici označena s **A**.



Rezultirajuće djelovanje se najjednostavnije odredjuje, ako se u istoj točki odabere i točka redukcije(T). U vektorskoj algebri je rezultirajuće djelovanje odredjeno izrazom:

$$\vec{L}_R = \sum_1^n \vec{P}_i$$

$$\vec{M}_{R,A} = \sum_1^n (\vec{l}_i \times \vec{P}_i) + \sum_1^m \vec{M}_j$$



Geometrijski se rezultirajuće djelovanje odredjuje pomoću poligona sila i poligona vektora momenata od svih sila i koncentriranih momenata.

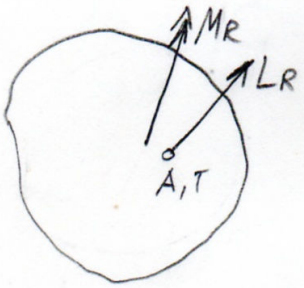
Za računsko odredjivanje upotrijebiti će se osnovna formulacija:

$$L_{RX} = \sum_1^n P_{xi}; \quad L_{RY} = \sum_1^n P_{yi}; \quad L_{RZ} = \sum_1^n P_{zi}$$

$$M_{RAX} = \sum_1^n (l_{yi} P_{zi} - l_{zi} P_{yi}) + \sum_1^m M_{xj}$$

$$M_{RAY} = \sum_1^n (l_{zi} P_{xi} - l_{xi} P_{zi}) + \sum_1^m M_{yj}$$

$$M_{RAZ} = \sum_1^n (l_{xi} P_{yi} - l_{yi} P_{xi}) + \sum_1^m M_{zj}$$



Rezultirajuća sila ne ovisi o izboru točke **A**; ona je za zadani sistem sila i momenata invarijantna, pa se naziva prva invarijanta. Rezultirajući moment ovisi o izboru točke sa pravca djelovanja rezultirajuće sile, ali je njegova projekcija na os odredjenu rezultirajućom silom, konstantna. Ako se odabere druga točka s pravca djelovanja rezultirajuće sile (B) i na njoj odabere nova točka redukcije, onda će vektori koji spajaju B s pravcem djelovanja neke sile P_i biti odredjeni s: $\vec{l}_i + \vec{b}$ pri čemu vektor $\vec{b}$ spaja točku B s točkom A, pa će izraz za rezultirajući moment za točku B glasiti:

$$\vec{M}_{RB} = \sum[(\vec{l}_i + \vec{b}) \times \vec{P}_i] + \sum \vec{M}_j = \vec{M}_{RA} + \vec{b} \times \vec{L}_R$$

Ako se gornji izraz skalarno pomnoži s jediničnim vektorom od $\vec{L}_R$:

$$\vec{M}_{RB} \cdot \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} = \vec{M}_{RA} \cdot \frac{\vec{L}_R}{|\vec{L}_R|} + \frac{(\vec{b} \times \vec{L}_R) \cdot \vec{L}_R}{|\vec{L}_R|} = \vec{M}_{RA} \cdot \frac{\vec{L}_R}{|\vec{L}_R|}$$

Projekcija vektora momenta na os rezultirajuće sile je invarijantna, jer miješani produkt koji sadrži dva paralelna vektora iščezava. Ako je L_r različit od nule, može se odrediti pravac rezultirajuće sile tako, da pripadni rezultirajući moment bude paralelan s rezultirajućom silom. Taj se pravac naziva centralna os sistema koncentriranih sila i koncentriranih momenata, a pripadno rezultirajuće djelovanje se naziva dinama zadanog sistema.

HWPK-85-27

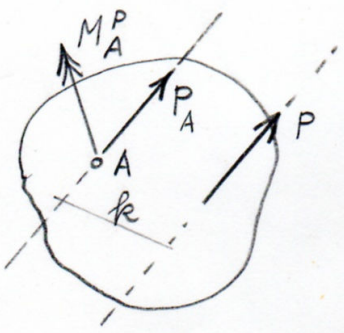
Razlikovati će se tri specijalna slučaja rezultirajućeg djelovanja:

a) Rezultirajuća sila i rezultirajući moment su okomiti, pa moment diname iščezava, t.j. rezltirajuće djelovanje se može zamijeniti samo jednom silom, REZULTANTOM koja leži na osi sistema. U tom se slučaju kaže da se zadani sistem sila i momenata svodi na silu.

b) Rezultirajuća sila iščezava, pa centralna os nije definirana. Zadani sistem sila se statički može zamijeniti samo jednim koncentriranim momentom koji će se i u tom slučaju nazivati REZULTIRAJUĆI MOMENT. U tom slučaju se može reći: zadani sistem se svodi na spreg.

c) Rezultira juća sila iščezava i rezultirajući moment iščezava, pa se za zadani sistem sila i momenata kaže da je uravnotežen ili STATIČKI NEUTRALAN.

Redukcija sile na točku. Odredjivanje rezultante



Specijalni slučaj odredjivanja rezultirajućeg djelovanja je odredjivanje sile čiji pravac prolazi zadanom točkom i koncentriranog momenta koji su zajedno ekvivalentni zadanoj sili.

Vektor tako dobivene sile P_a biti će jednak vektoru zadane sile P, a koncentrirani moment će biti jednak vektoru momenta zadane sile na točku kroz koju prolazi nova sila. Očito će dobivena sila i dobiveni moment, koji su statički ekvivalentni zadanoj sili, medjusobno okomiti.

Moguć je i obrat zadatka: ako su zadani: koncentrirana sila i koncentrirani moment koji su okomiti, moguće je odrediti samo jednu koncentriranu silu, koja im je ekvivalentna, pa je prema tome rezultanta zadanoj sili i okomitom koncentriranom momentu.

Rezultanta zadanog sistema sila i momenata može se, prema tome, odrediti u dva koraka: prvo se odredi rezultirajuće djelovanje, pa ako su rezultirajuća sila i moment okomiti, može se u drugom koraku odrediti rezultanta.

Rastavljanje koncentrirane sile na komponente koje se sijeku u istoj točki pravca zadane sile



Na pravcu djelovanja sile odabire se točka i tri nekomplanarna pravca koja prolaze tom točkom. Na tim pravcima se mogu odrediti tri sile, komponente, koje su statički ekvivalentne zadanoj sili. Komponente se odredjuju samo iz jednadžbe sila: $\vec{P} = \vec{K} + \vec{L} + \vec{V}$

HWPK-85-28

Točka redukcije se može odabrati po volji, pa će se odabrati upravo u točki u kojoj se komponente sijeku s pravcem zadane sile. U tom je slučaju momentni uvjet identično zadovoljen, jer iščezavaju svi krakovi.

Odredjivanje komponenti koje se sijeku u istoj točki s pravca djelovanja sile svodi se samo na dekompoziciju vektora sile.



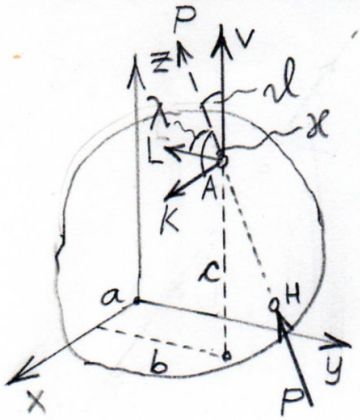
Zadana sila se može rastaviti na dvije komponente koje se sijeku na pravcu sile, samo ako te komponente leže u istoj ravnini sa silom. To se može shvatiti kao specijalni slučaj rastavljanja na tri komponente, kod kojeg jedna sila iščezava.

Odredjivanje komponente u ravnini i daljnje komponente na pravcu je moguće ako probodište leži na pravcu djelovanja zadane sile i ako pravac tražene komponente ne leži u ravnini druge komponente, što je prikazano u odsjeku o dekompoziciji vektora.

Moment oko osi sile izražen komponentama čije su veličine pozitivne

HWPK-85-29

Izrazi za momente oko osi dobiveni su formalno pomoću vektorske algebre. U tehničkim proračunima se često momenti oko koordinatnih ili njima paralelnih osi odredjuju po manje formalnom postupku koji je geometrijski očit. Postupak se provodi u tehničkoj notaciji.



Zadana sila P djeluje u hvatištu H. Na njenom pravcu djelovanja odabire se točka A u kojoj će se sijeći komponente zadane sile. Radi preglednosti je u toj točki nanesen vektor paralelan s zadanom silom P. Strijelice koje prikazuju komponente u tehničkoj notaciji će se usmjeriti "prirodno" dakle tako da veličine komponenti budu pozitivne. Svaka je komponenta paralelna s jednom od koordinatnih osi. Ustvari je strijelicama komponenti uvedena nova baza. Ako se uvedu kutevi izmedju strijelica komponenti i zadanog vektora $\varkappa, \lambda, \nu$ dobivaju se direktno veličine komponenti:

$K = P\cos\varkappa; \qquad L = P\cdot\cos\lambda; \qquad V = P\cdot\cos\nu$

Projekcije komponenti u osnovnoj bazi x,y,z ne moraju biti pozitivne, npr. za situaciju na skici vrijedi: $L_x = P_x < 0$

Momenti oko osi x,y,z od dobivenih komponenti se lako odredjuju jer su komponente ili okomite ili paralelne s nekom od osi. Zbog ekvivalencije s zadanom silom će zbroj momenata oko osi komponenti biti jednak odgovarajućem momentu oko osi od zadane sile. Pri tome treba voditi računa o predznaku: $M_x^P = s_{Lx}\cdot c\cdot L + s_{Vx}\cdot b\cdot V$

$M_y^P = s_{Ky}\cdot c\cdot K + s_{Vy}\cdot a\cdot V; \qquad M_z^P = s_{Kz}\cdot b\cdot K + s_{Lz}\cdot a\cdot L$

Pri tome su a,b,c udaljenosti pravaca komponenti od odgovarajućih koordinatnih osi. Faktori s_{ij} mogu imati vrijednost +1 ili -1 a odredjuju se pomoću pravila desne ruke za rotaciju.

Specijalni slučajevi statike tijela

a) Statika točke

Ako se promatrano tijelo može smatrati materijalnom točkom na njega ne mogu djelovati koncentrirani momenti, pa se uvjet ravnoteže točke svodi na prvi od dva vektorska uvjeta ravnoteže tijela: IŠČEZAVA VEKTORSKI ZBROJ SILA, a tome odgovaraju prva tri skalarna uvjeta osnovne formulacije:

$$\Sigma P_{xi} = 0; \qquad \Sigma P_{yi} = 0; \qquad \Sigma P_{zi} = 0$$

Kaže se da točka ima tri nezavisna skalarna uvjeta ravnoteže. Iz tih se uvjeta u regularnom slučaju mogu odrediti 3 skalara, t.j. tri sile na nekomplanarnim pravcima, te dvije sile od kojih je jedna na pravcu a druga u ravnini koja ne sadrži pravac prve sile, ili samo jedna sila u prostoru.

U specijalnom slučaju kada sve sile koje djeluju na točku leže u istoj ravnini, jedan će uvjet ravnoteže biti identično zadovoljen, pa preostaju samo dva uvjeta projekcija na osi u ravnini iz kojih se mogu odrediti 2 skalara t.j. može se odrediti samo jedna sila u toj ravnini ili dvije sile na zadanim pravcima.

U specijalnom slučaju kada sve sile leže na jednom pravcu, identično su zadovoljena dva uvjeta ravnoteže, pa preostaje samo jedan uvjet projekcije na os koja leži na pravcu sila. Iz tog se uvjeta može odrediti samo jedan skalar, dakle samo jedna sila.

Ako na tijelo konačnih dimenzija djeluju koncentrirane sile tako da se svi pravci djelovanja sijeku u istoj točki, nastaje statički gledano ista situacija kao u statici točke , pa se kaže, da se u tom slučaju statika tijela svodi na statiku točke.

b) Statika neizmjerno malog tijela

Slučaj neizmjerno malog tijela će se formalno razlikovati od slučaja točke, jer postoji mogućnost da na to tijelo djeluju koncemtrirani momenti. Kvalitativno ga se može zamisliti kao četiri neizmjerno bliske točke koje čine tetraedar. U tom slučaju treba zadovoljiti sve uvjete ravnoteže tijela, ali se momentni uvjeti mogu nezavisno promatrati od uvjeta sila. Točka redukcije će se odabrati na samom tijelu, pa će iščezavati krakovi svih sila i uvjeti ravnoteže će imati oblik:

$$\Sigma \vec{P}_i = \vec{0}$$

$$\Sigma \vec{M}_j = \vec{0}$$

Dobivaju se tri skalarna uvjeta za sile i tri skalarna uvjeta za koncentrirane momente. Obje grupe se analogne i za svaku od njih zasebno vrijedi sve što je navedeno u statici točke.

HWPK-85-30

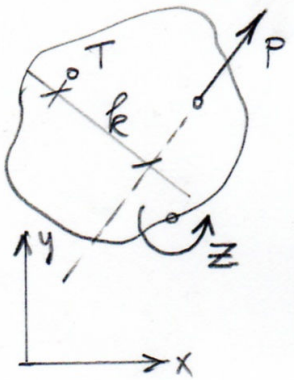
c) Statika tijela u ravnini

Pod time će se nazivom promatrati slučaj kada sve koncentrirane sile koje djeluju na tijelo leže u istoj ravnini, a svi koncentrirani momenti su okomiti na tu ravninu.

U tom se slučaju koncentrirani momenti ne prikazuju vektorima okomitima na ravninu nego simbolima vrtnje u samoj ravnini. U tehničkoj notaciji treba taj simbol vrtnje shvatiti kao i strijelicu uz silu. t.j. uz simbol vrtnje se upisuje oznaka za veličinu.

Za formuliranje skalarnih uvjeta ravnoteže trebalo bi postavljati momente oko osi okomitih na ravninu. Kako nikakove druge osi ne dolaze u obzir, dovoljno je voditi računa o točkama u kojima te osi probadaju ravninu. Zbog toga se u statici tijela u ravnini uvodi moment sile na točku kao skalarna veličina. U tehničkoj notaciji se moment sile na točku odredjuje prema izrazu:

$$M^P_{(T)} = s \cdot k \cdot P$$



pri tome s može biti $+1$ ili -1. Obično se za smisao vrtnje suprotan od vrtnje kazaljke na satu smatra da je pozitivan, jer se tako mjere orjentirani kutevi u ravnini, a to odgovara momentnoj osi koja je iz ravnine usmjerena prema promatraču.

Analogno se odredjuje i veza momenta na točku i veličine koncentriranog momenta:

$$M^Z_{(T)} = s \cdot Z$$

Za statiku tijela u ravnini treba zadovoljiti oba vektorska uvjeta ravnoteže, ali se oni zbog specifičnog djelovanja svode na samo tri nezavisna skalarna uvjeta ravnoteže tijela u ravnini; koji u osnovnoj formulaciji glase:

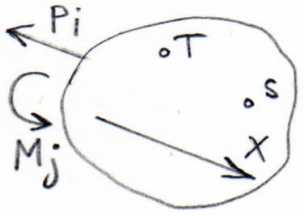
$$\Sigma P_{xi} = 0; \qquad \Sigma P_{yi} = 0; \qquad \Sigma M^P_{(T)i} + \Sigma M^Z_{(T)j} = \phi$$

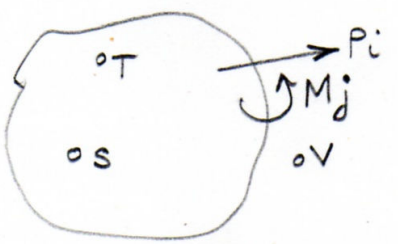
Moguće su još dvije alternativne formulacije, koje su specijalni slučajevi navedenih primjera alternativnih formulacija u prostoru. Prva mogućnost je projiciranje sila na jednu os i odredjivanje momenata na dvije točke čija spojnica nije okomita na os:

$$\Sigma P_{xi} = 0; \qquad \Sigma M^P_{(T)i} + \Sigma M^Z_{(T)j} = \phi; \qquad \Sigma M^P_{(S)i} + \Sigma M^Z_{(S)j} = \phi$$

Druga mogućnost je odredjivanje momenata na tri točke, koje ne leže na istom pravcu:

$$\Sigma M^P_{(T)i} + \Sigma M^Z_{(T)j} = 0; \qquad \Sigma M^P_{(S)i} + \Sigma M^Z_{(S)j} = 0; \qquad \Sigma M^P_{(V)i} + \Sigma M^Z_{(V)j} = 0$$





HWPK-85-31

Iz uvjeta ravnoteže se u ovom slučaju mogu odrediti tri skalara: jedan koncentrirani moment i dvije sile na pravcima koji nisu paralelni ili tri sile na pravcima koji nisu paralelni i ne prolaze istom točkom. Zadaci u kojima se pojavljuje sila koja prolazi zadanom točkom svode se na prethodne, jer se ta sila može prikazati pomoću dvije sile na pravcima koji se sijeku u zadanoj točki. Pri rješavanju zadataka koristiti će se najpogodnija formulacija uvjeta ravnoteže. Obično je najpogodnije da se u dostupna sjecišta pravaca na kojima djeluju uravnotežavajuće sile odaberu točke redukcije. Za kontrolu preostaju uvjeti koji se pri rješavanju nisu koristili, kao i grafički uvjeti ravnoteže: zatvoren poligon sila i zatvoren verižni poligon.

Zadaci ekvivalencije se rješavaju analogno zadacima uravnotežavanja. Kako je u ovom slučaju vektor rezultirajućeg momenta uvijek okomit na rezultirajuću silu, moguća se tri tipa sistema sila i momenata koji djeluju na tijelo u ravnini:

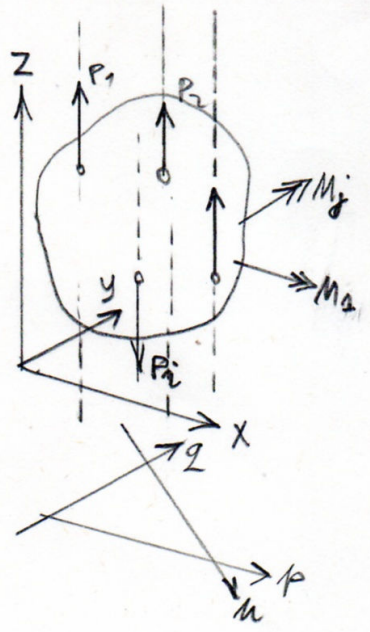
a) Sistem se svodi na silu t.j. postoji rezultanta.
b) Sistem se svodi na spreg.
c) Sistem je uravntežen t.j. statički neutralan

d) Sile djeluju na tijelo na paralelnim pravcima

HWPK-85-32

Pod tim će se nazivom promatrati slučaj kada na tjelo djeluju same koncentrirane sile čiji su pravci djelovanja paralelni, te koncentrirani momenti koji su okomiti na pravce sila.

Pri tome ni jedan od dva vektorska uvjeta ravnoteže tijela nije identično zadovoljen, ali se skalarni uvjeti mogu tako formulirati da tri od šest budu identično zadovoljeni. To vrijedi za osnovnu formulaciju skalarnih uvjeta:



$$\sum P_{zi} = 0$$

$$\sum y_i P_{zi} + \sum M_{xj} = 0$$

$$-\sum x_i P_{zi} + \sum M_{yj} = 0$$

Moguća je još jedna alternativna formulacija i to pomoću triju osi oko kojih se odredjuju momenti. Prirodno je da te osi budu okomite na pravce sila. Osi ne smiju biti paralelne niti se sijeći s istom paralelom sa zadanim silama.

$$\sum M^P_{pi} + \sum M_{pj} = 0$$

$$\sum M^P_{Qi} + \sum M_{Qj} = 0$$

$$\sum M^P_{\mu i} + \sum M_{\mu j} = 0$$

Iz uvjeta ravnoteže se u ovom slučaju mogu odrediti tri skalara: moguće su tri kombinacije: dva momenta na pravcima i jedna sila, jedan moment na pravcu i dvije sile čija ravnina nije okomita na moment i konačno tri sile koje ne leže u istoj ravnini.

Zadaci ekvivalencije rješavaju se analogno zadacima uravnotežavanja. Vektor rezultirajućeg momenta je ubijek okomit na rezultirajuću silu, pa se pojavljuju tri tipa sistema sila na paralelnim pravcima, koji odgovaraju tipovima navedenim u statici tijela u ravnini.
Ako je rezultirajuća sila različita od nule, a ne djeluju koncentrirani momenti, postojati će i rezultanta, a u odnosu na tijelo se može odrediti centar sistema sila na paralelnim pravcima. Položaj centra prema tijelu odredjen je samo rasporedom hvatišta i veličina sila, a ne ovisi kutevima koji odredjuju položaj paralelnih pravaca sila prema tijelu.
Zbog paralelnosti se vektori svih sila, a tako i rezultante mogu izraziti pomoću istog jediničnog vektora:

$$\vec{P}_i = P_i \cdot \vec{e}_o \qquad R_i = R \cdot \vec{e}_o$$

Rezultanta zamjenjuje zadani sistem sila, preciznije ona je statički ekvivalentna, pa moraju biti zadovoljeni uvjeti ekvivalencije:

$$\vec{R} = \Sigma \vec{P}_i$$
$$\vec{l}_o \times \vec{R} = \Sigma \vec{l}_i \times \vec{P}_i$$

pri tome je $\vec{l}_o$ vektor koji spaja točku redukcije s pravcem rezultante. Ako se izrazi za sile i rezultantu uvrste u uvjete ekvivalencije, dobiva se:

$$\vec{R} = \Sigma P_i \cdot \vec{e}_o = (\Sigma P_i)\vec{e}_o$$
$$\vec{l}_o \times (\Sigma P_i)\vec{e}_o = \Sigma \vec{l}_i \times P_i \vec{e}_o$$

Vektorski produkt ne mijenja vrijednost ako se prvi faktor pomnoži skalarom umjesto drugoga, a zbroj niza vektorskih produkata u kojima je drugi faktor konstantan biti će jednak zbroju prvih faktora pomnoženim vektorski s drugim faktorom:

$$(\Sigma P_i)\vec{l}_o \times \vec{e}_o = \Sigma (P_i \vec{l}_i \times \vec{e}_o) = (\Sigma P_i \vec{l}_i) \times \vec{e}_o$$

Ovako modificiran, drugi uvjet ekvivalencije će biti zadovoljen i uz proizvoljni jedinični vektor $\vec{e}_o$, ako će vrijediti:

$$(\Sigma P_i)\vec{l}_o = \Sigma P_i \vec{l}_i$$

Pretpostavljeno je da rezultanta postoji, pa se nakon dijeljenja dobiva vektorski izraz:

$$\vec{l}_o = \frac{\Sigma P_i \vec{l}_i}{\Sigma P_i}$$

Gornjem su izrazu ekvivalentna tri skalarna izraza koji centar sistema odredjuju prema točki redukcije:

$$l_{ox} = \frac{\Sigma P_i l_{xi}}{\Sigma P_i}; \qquad l_{oy} = \frac{\Sigma P_i l_{yi}}{\Sigma P_i}; \qquad l_{oz} = \frac{\Sigma P_i l_{zi}}{\Sigma P_i}$$

Ako su sve sile paralelne, dakle jednako usmjerene, centar se naziva težište, jer je primjer za skup paralelnih sila skup težina skupa materijalnih točaka. Pri tome je uvedena idealizacija paralelnosti vektora gravitacije, a to je kod područja bitno manjih od promjera planeta, dopušteno.

AWPK-85-33

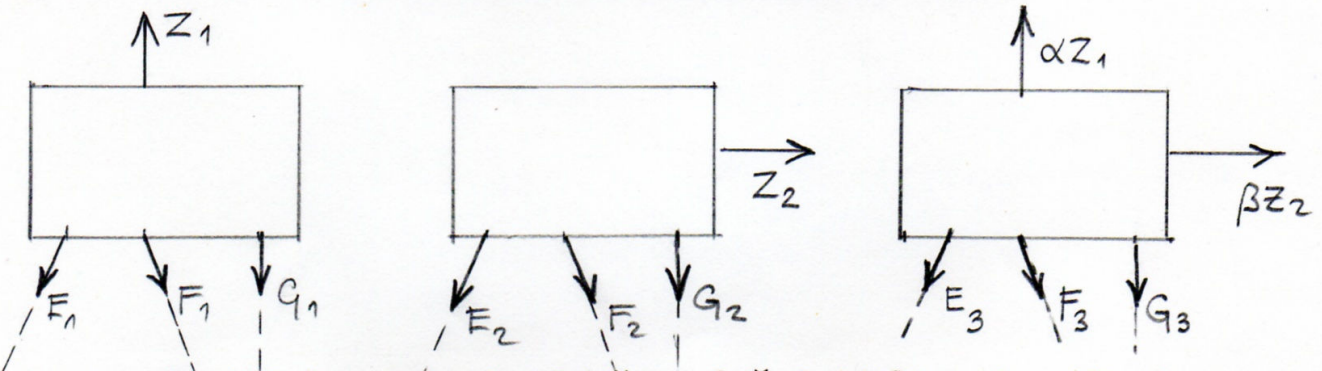
Ako su nadalje, sve sile koje djeluju na skup hvatišta jednake, postaje težište geometrijski pojam:

$$l_{ox} = \frac{\sum_1^n l_{xi}}{n}; \qquad l_{oy} = \frac{\sum_1^n l_{yi}}{n}; \qquad l_{oz} = \frac{\sum_1^n l_{zi}}{n}$$

Princip superpozicije

U fizikalnim zakonima se neke veličine pojavljuju kao linearni faktori. Rješenje problema u kojemu se odredjuju takove veličine može se uvijek prikazati kao linearna kombinacija rješenja parcijalnih problema, a tu mogućnost izriče princip superpozicije, nazvan tako zato jer se parcijalna rješenja mogu "polagati jedna na drugo".
Za odredjivanje projekcija i veličina koncentriranih sila i momenata iz uvjeta ravnoteže vrijedi princip superpozicije.
Zbog važnosti poznavanja principa, navesti će se jednostavni primjer. Zadano je tijelo na koje djeluju sile u ravnini i tri pravca na kojima će djelovati uravnotežavajuće sile. Uravnotežavajuće sile će se odredjivati za razne slučajeve zadanih sila.

HWPK-85-34



Pretpostaviti će se da je riješen slučaj djelovanja sile Z_1, pa su prema tome poznate veličine E_1, F_1, G_1. Neka je riješen i slučaj djelovanja sile Z_2, pa su poznate veličine E_2, F_2, G_2. Ako se sada traži rješenje za djelovanje silama koje se mogu izraziti kao αZ_1 i βZ_2 mogu se pripadne uravnotežavajuće sile odrediti prema izrazima:

$$E_3 = \alpha E_1 + \beta E_2; \qquad F_3 = \alpha F_1 + \beta F_2; \qquad G_3 = \alpha G_1 + \beta \cdot G_2$$

što se lako provjerava pomoću skalarnih uvjeta ravnoteže.

Distribuirane sile

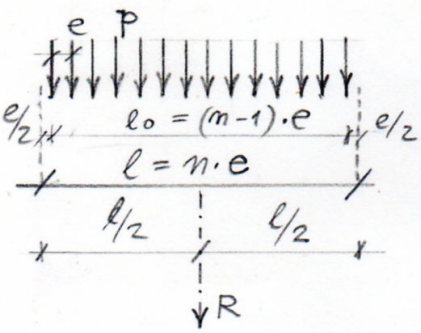
Kontinuum

Za kvalitativno opisivanje djelovanja sila izmedju dijelova materije uveden je diskretni model; materija je prikazana kao mnoštvo čestica - materijalnih točaka izmedju kojih djeluju sile. Za kvantitavni pristup uvodi se druga idealizacija: kontinuirani model ponašanja materije ili kontinuum.

Kontinuum ili neprekidna sredina idealizira dio materije kao geometrijski definiran dio prostora u kojemu svaka točka, shvaćena geometrijski ima fizikalna svojstva. Fizikalna svojstva su u toj idealizaciji kontinuirano t. j. neprekinuto rasporedjena po promatranom dijelu prostora.

Za opis fizikalnih svojstava kontinuuma uvode se funkcije koje su definirane kao omjeri promatrane fizikalne veličine i pogodnih geometrijskih veličina.

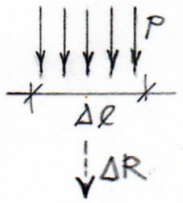
Linijske sile. Konstantni intenzitet i smjer.



Promatra se sistem paralelnih koncentriranih sila čija su hvatišta rasporedjena jednoliko po dužini l_0. Ukupni broj sila je n a razmak hvatišta označen je s e. Rezultanta će biti paralelna sa zadanim silama, veličina će biti odredjena izrazom:

$$R = n \cdot P$$

a pravac djelovanja rezultante će raspolavljati dužinu na kojoj leže hvatišta.



Ako je broj sila n vrlo velik i nepoznat, može se rezultanta odrediti indirektno. Promatrati će se mali dio sila koje se mogu prebrojati i tom dijelu će se pridružiti dužina Δl čiji će krajevi ležati izvan skupa koji se promatra i to za polovinu razmaka e.

Ako se sada cijelom skupu čije prebrojavanje se želi izbjeći, pridruži duljina l koja se dobiva tako da se osnovna dužina l_0 na svaku stranu "produlji" za $e/2$, može se uočiti zakonitost: duljina je proporcionalna broju sila, pa će se ukupni broj moći odrediti iz omjera; a prema tome i rezultanta cijelog sistema:

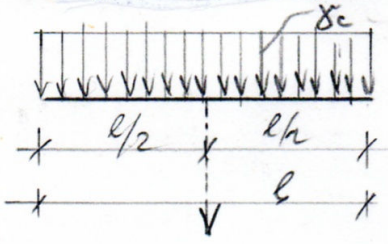
$$R = \frac{\Delta R}{\Delta l} \cdot l$$

U praktičnim primjerima je broj sila tako velik, da se samo eksperimentalno može odrediti parcijalna rezultanta ΔR.
Uz ustanovljeni omjer $\Delta R/\Delta l$ može se nakon toga odrediti rezultanta bilo kojeg dijela sistema. Omjer se uvodi kao nova fizikalna veličina: **linijska gustoća sile**, koja je definirana samo na dužinama sastavljenim iz osnovnih dužina e i to tako da je u sredini svake dužine po jedna sila P.

HWPR-85-35

Kontinuum se može shvatiti kao granični slučaj povećavanja intenziteta gustoće čestica uz istovremeno smanjivanje pripadnih sila, pa se linijske sile uvodi kao funkcija definirana u svakoj točki linije.

Za intenzitet linijske sile uvodi se oznaka $\gamma''(s)$ a dimenzija je sila/duljina. U tehničkoj notaciji je linijska sila definirana poljem smjerova (strijelica) i intenzitetom $\gamma''(s)$. Polje smjerova se u jednostavnijim slučajevima odredjuje grafički.



Najjednostavniji slučaj je konstantni intenzitet linijske sile: funkcija je na cijelom području jednaka konstanti γ_c''. Postupak je analogan postupku za jednoliko rasporedjene koncentrirane sile. Veličina rezultante je odredjena irazom: $R = \gamma_c'' \cdot l$

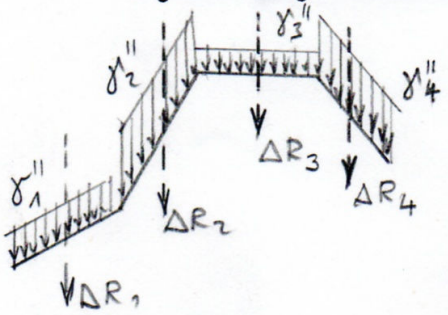
Pravac rezultante prolazi raspolovištem dužine a smjer je jednak smjeru zadane linijske sile. U ovom slučaju otpada ograničenje da l mora biti višekratnik od e, jer e nije definiran. Prema tome se rezultanta može odrediti za proizvoljno mali dio dužine. Kako materija ima diskretnu strukturu odredjivanje sila pomoću kontinuuma ima fizikalno smisla samo za dijelove koji su bitno veći od stvarnog razmaka izmedju molekula. Ipak; promatranje proizvoljno malih dijelova kontinuuma i pripadnih sila ima smisla u matematičkim postupcima koji se u mehanici kontinuuma koriste.

Točka kroz koju prolazi pravac djelovanja paralelnih sila: težište odredjeno je u ovom slučaju geometrijski kao raspolovište dužine, pa se težište i uvodi kao geometrijski pojam.

Linijska sila je idealizacija i ona se na različite načine koristi u mehanici. Za osnovni primjer njene primjene treba uvesti novu idealizaciju materijalnu liniju. Materijalna linija je zamišljeno tijelo kod kojeg su fizikalna svojstva neprekinuto rasporedjena duž odsjeka krivulje. Svaka sila koja djeluje na konačni dio materijalne linije jest linijska sila. Najjednostavniji primjer je težina. Modelski se linijska sila može realizirati kao težina žice ili užeta.

HWPR-85-36

Djelovanje konstantne linijske sile na poligon



Promatra se djelovanje paralelnih linijskih sila duž zadanog poligona. Intenzitet je za svaku stranicu konstantan γ_i''. Duljina stranice je Δs_i. Za svaku stranicu zasebno može se prema dosada izloženom odrediti rezultanta ΔR_i, pa je time problem distribuiranih sila preveden na problem koncentriranih sila, u ovom slučaju paralelnih. Prema tome se rezultanta odredjuje prema izrazu: $R = \sum \Delta R_i = \sum_1^n \gamma_i'' \cdot \Delta s_i$

a položaj težišta prema ishodištu prema izrazu tipa:

$$x_T = \frac{\sum x_i \Delta R_i}{\sum \Delta R_i} = \frac{\sum x_i \gamma_i'' \Delta s_i}{\sum \gamma_i'' \Delta s_i}$$

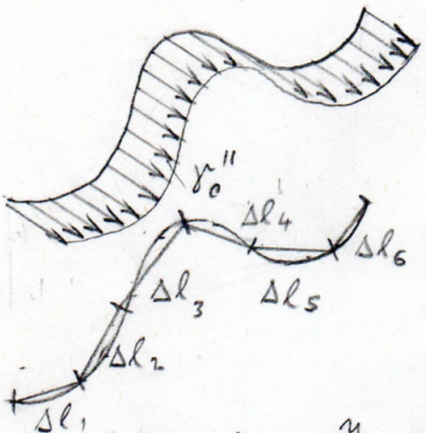
Analogno se postavljaju izrazi za preostale koordinate težišta y_T, z_T.

Ako je u specijalnom slučaju intenzitet konstantan za sve stranice i jednak γ_c'', dobivaju se izrazi:

$$R = \gamma_c'' \cdot \Sigma \Delta s_i = \gamma_c'' \cdot \ell; \qquad x_T = \frac{\gamma_c'' \Sigma x_i \Delta s_i}{\gamma_c'' \Sigma \Delta s_i} = \frac{\Sigma x_i \Delta s_i}{\Sigma \Delta s_i} = \frac{\Sigma x_i \Delta s_i}{\ell}$$

pri tome je ℓ ukupna duljina poligona. Na taj je način uvedeno težište poligona kao geometrijski pojam.

Djelovanje konstantne linijske sile na krivulju



Pogodno je ovo razmatranje započeti približnim rješenjem: krivulja će se zamijeniti poligonom. Za praktične potrebe neka odstupanje krivulje od stranice ne bude veće od desetine duljine stranice. Intuitivno se može prihvatiti da će se točnost približnog postupka povećavati povećavanjem broja stranica poligona uz istovremeno smanjivanje duljine najveće stranice. Limes suma koje se ovdje koriste jednak je odgovarajućem linijskom integralu.

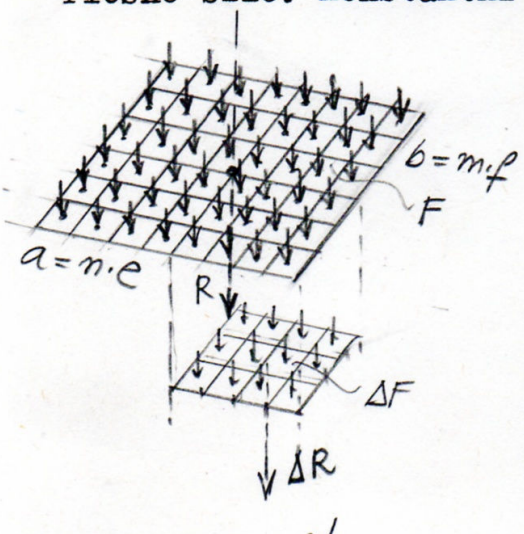
$$\ell = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l \to 0}} \sum_{1}^{n} \Delta s = \int_L ds; \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l \to 0}} \sum_{1}^{n} x_i \Delta s_i = \int_L x\, ds$$

Točni izrazi za rezultantu i položaj težišta dobivaju se prema:

$$R = \gamma_c \cdot \int_L ds; \qquad x_T = \frac{1}{\ell} \int_L x\, ds; \qquad y_T = \frac{1}{\ell} \int_L y\, ds; \qquad z_T = \int_L z\, ds$$

Integrali se nemogu uvijek odrediti u zatvorenom obliku, pa se koriste razni približni postupci koji se nazivaju numerička integracija. Zamjena poligonom je najjednostavniji slučaj numeričke integracije po krivulji.

Plošne sile. Konstantni intenzitet i smjer.



Plošne sile će se uvesti analogno kao linijske sile. Promatra se skup paralelnih koncentriranih sila jednake veličine, čija su hvatišta rasporedjena na pravilnoj pravokutnoj mreži s razmacima e i f. Svakoj sili se pridružuje pravokutnik s stranicama e i f tako da je hvatište u sjecištu dijagonala. Za svaki pravokutnik sastavljen iz uvedenih elementarnih pravokutnika će vrijediti konstantnost omjera pripadne rezultante i površine pravokutnika:

$$\gamma_c' = \frac{\Delta R}{\Delta F}$$

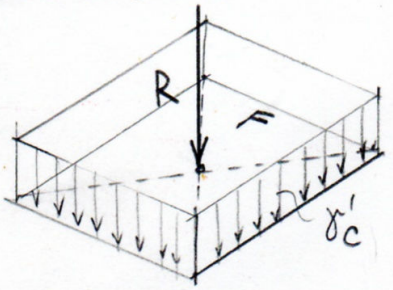
pri tome se γ_c' uvodi kao plošna gustoća sila. Ako su razmaci izmedju sila konačni i sile poznate gustoća se može izračunati.

HWPK-85-37

Ako su razmaci izmedju sila vrlo mali odrediti će se eksperimentalno rezultanta za pogodni dio sistema, te izračunati gustoća.

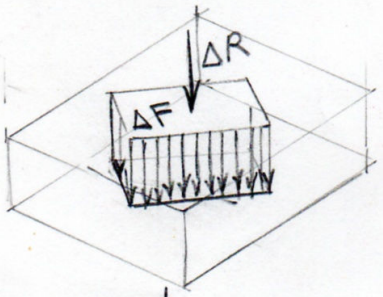
Uz poznatu gustoću može se za proizvoljni pravokutnik sastavljen iz elementarnih pravokutnika odrediti rezultanta, prema $R = \gamma_c' \cdot F$ pri čemu je F površina pravokutnika. Pravac rezultante prolazi presjecištem dijagonala.

U kontinuumu se uvodi intenzitet linijske sile $\gamma'(u,v)$ kao funkcija definirana u svakoj točki plohe. Za potpuni opis sile treba definirati i polje smjerova, koje se u jednostavnijim slučajevima odredjuje geometrijski.

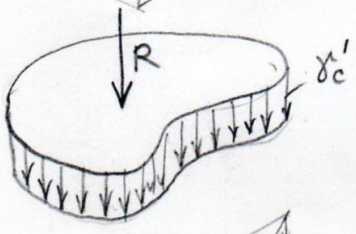


Najjednostavniji slučaj je konstantni intenzitet uz konstantni smjer na pravokutnom području. Postupak je analogan postupku za koncentrirane sile jednoliko rasporedjene na pravokutnoj mreži. Veličina rezultante je odredjena izrazom: $R = \gamma_c' \cdot F$

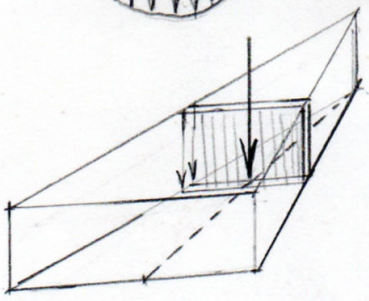
a pravac rezultante prolazi sjecištem dijagonala, pa je težište odredjeno samo geometrijski, pa je to primjer za uvodjenje težišta geometrijskog lika.



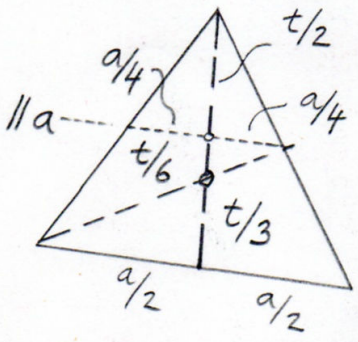
Na prikazani način se može odrediti rezultanta za proizvoljni pravokutnik koji je dio zadanog. Očito se nameće pitanje odredjivanje rezultante i težišta za proizvoljni lik. Intuitivno se može prihvatiti da će pri konstantnom intenzitetu i smjeru za proizvoljni lik vrijediti izraz za veličinu rezultante: $R = \gamma_c' \cdot F$



Pitanje težišta treba zasebno riješiti.



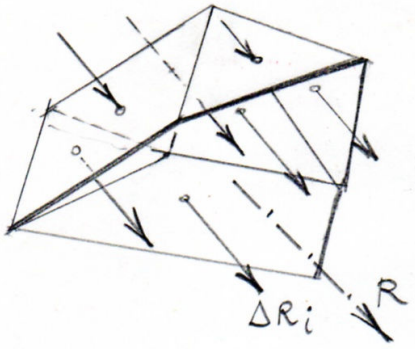
Elementarno se može objasniti težište konstantne plošne sile koja djeluje na trokut. Ako se trokut podijeli na proizvoljno tanke trake paralelne s jednom stranicom, može se djelovanje na traku riješiti kao djelovanje na pravokutnik, pa će rezultanta biti u sredini trake. Rezultante svih traka će se nalaziti na spojnici vrha sa sredinom stranice, pa će tom linijom prolaziti i ukupna rezultanta. Kako se analogna podjela na paralelne trake može provesti za svaku stranicu biti će pravac djelovanja rezultante odredjen presjecištem spojnica raspolovišta stranica sa suprotnim vrhovima. Lako se dokazuje da ta točka; težište leži na trećini spojnice.



Na taj način je težište trokuta kao geometrijskog lika uvedeno pomoću konstantne plošne sile.

HWPK-85-38

Djelovanje konstantne plošne sile na poliedarsku plohu



Promatra se djelovanje **paralelne** plošne sile na poliedarsku plohu, koja je sastavljena od ravnih likova koji se svi mogu rastaviti na trokute, pravokutnike, Ti osnovni likovi će se ovdje nazivati elementi. Površina nekog elementa je ΔF_i. Za svaki element plošna sila je konstantna i ima intenzitet γ_i'. Rezultanta elementa je ΔR_i Pravac djelovanja je odredjen težištem elementa. Time je odredjivanje rezultante distribuiranih sila svedeno na odredjivanje rezultante konačnog broja paralelnih sila ΔR_i. Veličina rezultante je određjena izrazom: $R = \Sigma \Delta R_i = \Sigma \gamma_1' \cdot \Delta F_i$

Koordinate težišta su odredjene izrazima tipa:

$$X_T = \frac{\sum x_i \cdot \Delta R_i}{\sum \Delta R_i} = \frac{\sum x_i \cdot \gamma_i' \cdot \Delta F_i}{\sum \gamma_1' \cdot \Delta F_i}$$

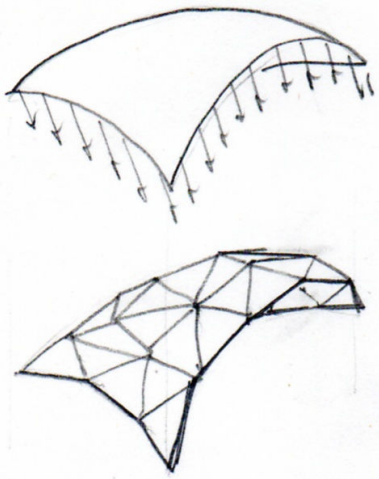
Izrazi za y_T i z_T su analogni.
Ako je u specijalnom slučaju intenzitet konstantan za sve elemente i jednak γ_c', dobivaju se izrazi: $R = \gamma_c' \cdot \sum_1^n \Delta F_i = \gamma_c' \cdot F$

$$X_T = \frac{\gamma_c' \cdot \Sigma x_i \Delta F_i}{\gamma_c' \cdot \Sigma \Delta F_i} = \frac{\Sigma x_i \Delta F_i}{\Sigma \Delta F_i} = \frac{\Sigma x_i \Delta F_i}{F}$$

pri čemu je F ukupna površina poliedra. Na taj je način uvedeno težište poliedra kao geometrijski pojam.

HWPK-85-39

Djelovanje konstantne plošne sile na zakrivljenu plohu.



Kao i kod djelovanja linijske sile na krivulju, pogodno je uočiti jednostavnu mogućnost približnog rješavanja: zakrivljena ploha će se zamijeniti poliedarskom plohom. Za praktične potrebe neka odstupanje zadane plohe od poliedra ne bude veće od desetine promjera kruga opisanog oko elementa. Točnost približnog postupka će se povećavati pri ppovećavanju broja elemenata i istovremenim smanjivanjem radijusa kruga opisanog oko najvećeg elementa. Na limesu približno rješenje prelazi u točno, a limesi suma koje se koriste prelaze u odgovarajuće plošne integrale.

$$F = \lim_{\substack{n\to\infty \\ r\to 0}} \sum_1^n \Delta F_i = \int_F dF; \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ r\to 0}} \sum_1^n x_i \Delta F_i = \int_F x\,dF$$

pri tome je F površina lika zadanog na zakrivljenoj plohi.

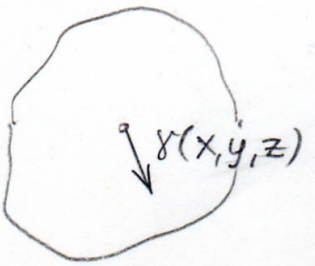
Točni izrazi za veličinu rezultante i položaj težišta glase:

$$R = \gamma_c' \cdot \int_F dF \qquad x_T = \frac{1}{F}\int_F x\,dF; \quad y_T = \frac{1}{F}\int y\,dF; \quad z_T = \frac{1}{F}\int z\,dF$$

I za plošne integrale vrijedi principjelna primjedba datauz linijske integrale.

Plošnim silama se prikazuju sile kratkog dometa unutarnje i kontaktne, a uvode se i kao statički ekvivalent volumenskim silama. Za jednostavno predočavanje plošnih sila treba uvesti novu idealizaciju: materijalnu plohu. Materijalna ploha je zamišljeno tijelo kod kojeg su fizikalna svojstva neprekinuto rasporedjena duž dijela plohe. težina materijalne plohe je najjednostavniji primjer za plošnu silu. Modelski se plošna sila može realizirati kao težina tankog lima ili tkanine.

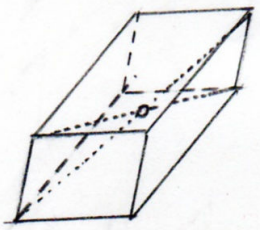
Volumenske sile. Konstantni intenzitet i smjer.



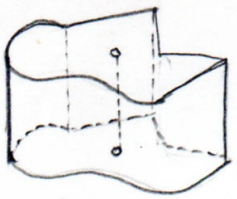
Prema analogiji s linijskim i plošnim silama može se uvesti volumenska sila u tehničkoj notaciji. U svakoj točki tijela definiran je smjer (strijelica) i intenzitet kao funkcija $\gamma(x,y,z)$. Dimenzija funkcije je sila/volumen.

Najjednostavniji slučajevi su djelovanja konstantne sile po intenzitetu i smjeru na pravilna tijela. Za rezultantu vrijedi:

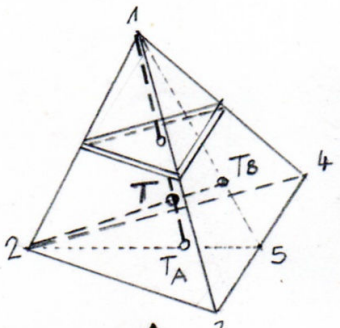
$$R = \gamma_c \cdot V$$



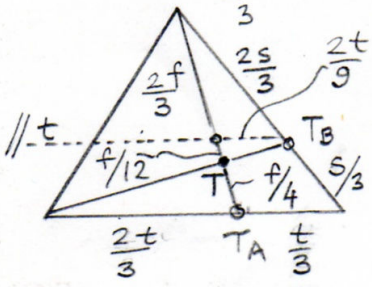
Kod paralelepipeda se težište nalazi na sjecištu dijagonala.



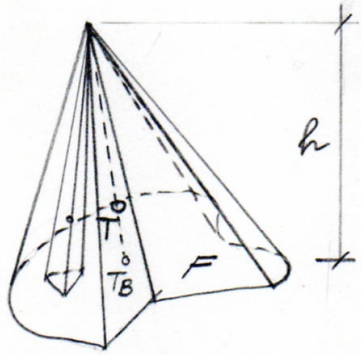
Kod valjaka i prizmi, te općenito kod svih tijela koja su omedjena s dva paralelna ravna lika i pravčastom plohom koja je nastala spajanjem odgovarajućih točaka ravnih likova, težište se nalazi na raspolovištu spojnice težišta ravnih likova.



Elementarno se može objasniti i težište tetraedra. Zamisliti će se podjela na prizvoljno tanke slojeve konstantne debljine omedjene paralelama s jednom stranicom. Težište sloja se može odrediti kao težište trokutne prizme. Sva težišta slojeva će ležati na spojnici vrha s težištem stranice. Rezultanta svih parcijalnih rezultanti mora presjecati tu spojnicu, pa težište mora ležati na njoj. Analogna podjela na slojeve može se provesti paralelno s svakom stranicom, pa se tako dobivaju četiri spojnice težišta stranica sa suprotnim vrhovima. Te se spojnice sijeku u istoj točki, a to je upravo težište tetraedra. Lako se dokazuje da je težište udaljeno za četvrtinu duljine spojnice od težišta stranice.

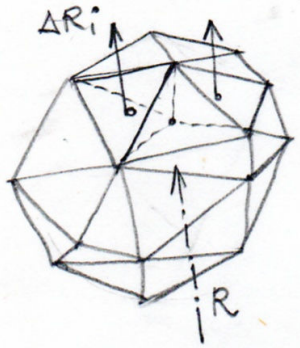


HWPK-85-40



Kod stožaca i piramida, te općenito kod svih tijela koja su omedjena jednim ravnim likom i pravčastom plohom čiji pravci spajaju vrh sa svim točkama oboda ravnog lika, težište se nalazi na spojnici vrha i težišta ravnog lika. Udaljenost od težišta lika iznosi četvrtinu duljine spojnice, kao i kod tetraedra što se može objasniti rastavljanjem tijela na proizvoljno mnogo tetraedara. Volumen se kod svih tijela tog tipa odredjuje prema: $V = F \cdot \frac{h}{3}$

Djelovanje konstantne volumenske sile na poliedar



Svaki poliedar se može sastaviti iz konačnog broja tetraedara. Smjer volumenske sile će biti jednak za cijelo tijelo, a intenziteti konstantni za svaki tetraedar i označeni s γ_i. Volumen svakog tetraedra neka je ΔV_i. Veličina rezultante svakog tetraedra je odredjena sa:

$$\Delta R_i = \gamma_i \cdot \Delta V_i$$

Pravac rezultante prolazi težištem a paralelan je s pravcem volumenske sile. Time je djelovanje distribuiranih sila zamijenjeno sistemom paralelnih koncentriranih sila ΔR_i. Rezultanta tih sila, t.j. rezultanti tetraedara, je rezultanta ukupnog djelovanja na tijelo, i odredjena je sa:

$$R = \sum_1^n \Delta R_i = \sum_1^n \gamma_i \Delta V_i$$

Koordinate težišta paralelnih distribuiranih sila, koje djeluju na zadani poliedar odredjene su izrazima tipa:

$$x_T = \frac{\sum x_i \Delta R_i}{\sum \Delta R_i} = \frac{\sum x_i \gamma_i \cdot \Delta V_i}{\sum \gamma_i \cdot \Delta V_i}$$

Izrazi za koordinate y_T i z_T su analogni.
Ako je u specijalnom slučaju intenzitet jednak za sve elemente i označen s γ_c, dobivaju se izrazi:

$$R = \gamma_c \cdot \sum \Delta V_i = \gamma_c \cdot V$$

$$x_T = \frac{\gamma_c \sum x_i \Delta V_i}{\gamma_c \sum \Delta V_i} = \frac{\sum x_i \Delta V_i}{\sum \Delta V_i} = \frac{\sum x_i \Delta V_i}{V}$$

pri čemu je V ukupni volumen poliedra. Time je težište poliedra uvedeno kao geometrijski pojam.

Djelovanje konstantne volumenske sile na tijelo proizvoljnog oblika

Kao i kod djelovanja linijske sile na krivulju, pogodno je uočiti jednostavnu mogućnost približnog rješavanja: proizvoljna ploha će se zamijeniti poliedrom. Točnost će se povećavati smanjivanjem elemenata kojima se opisuje oplošje zadanog tijela. Kada u graničnom slučaju ti elementi postanu proizvoljno maleni, dobivene veličine se proizvoljno približavaju točnim vrijednostima. Limesi suma koje

HWPK-85-41

se koriste prelaze u odgovarajuće volumenske integrale.

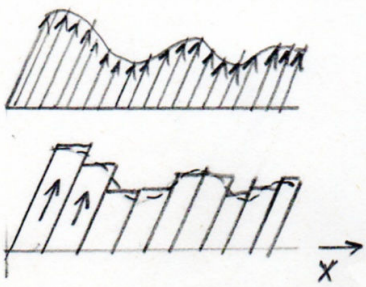
$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ r\to 0}} \sum \Delta V_i = \int_V dV; \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ r\to 0}} \sum_1^n x_i \Delta V_i = \int_V x\,dV$$

pri tome je V volumen zadanog tijela.
Točni izrazi za veličinu rezultante i položaj težišta glase:

$$R = \gamma_c \cdot \int dV = \gamma_c \cdot V \qquad x_T = \frac{1}{V}\int_V x\,dV; \quad y_T = \frac{1}{V}\int_V y\,dV \quad z_T = \frac{1}{V}\int_V z\,dV$$

I za volumenske integrale vrijedi principjelna napomena navedena uz linijske integrale. Napomena o općem obliku volumenskog integrala data je uz opći slučaj djelovanja volumenskih sila.

Praralelne linijske sile definirane na dužini.



Promatra se djelovanje paralelnih linijskih sila promjenjivog intenziteta definiranih na dužini. Najjednostavnija mogućnost približnog rješavanja bila bi zamjena nizom sila konstantnog intenziteta koje djeluju na dijelovima dužine. Veličina rezultante i položaj težišta odredjeni su izrazima:

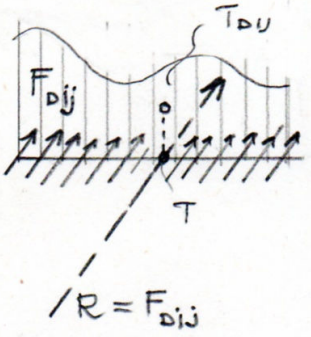
$$R = \sum_1^n \gamma''(x_i)\cdot \Delta x_i \qquad x_T = \frac{\sum_1^n \gamma''(x_i)\cdot x_i \cdot \Delta x_i}{R}$$

pri tome će x_i biti koordinata sredine odsjeka Δx_i. Točnost ovih približnih izraza se povećava s smanjenjem najvećeg odsjeka Δx_i. Kada u graničnom slučaju najveći Δx_i postane dovoljno malen, približne veličine se mogu po volji približiti točnim vrijednostima Limesi suma koje se koriste prelaze u odgovarajuće linijske integrale:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_1^n \gamma''(x_i)\cdot \Delta x_i = \int_L \gamma''(x)\,dx; \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_1^n x_i \gamma''(x_i)\cdot \Delta x_i = \int_L x\cdot\gamma''(x)\,dx$$

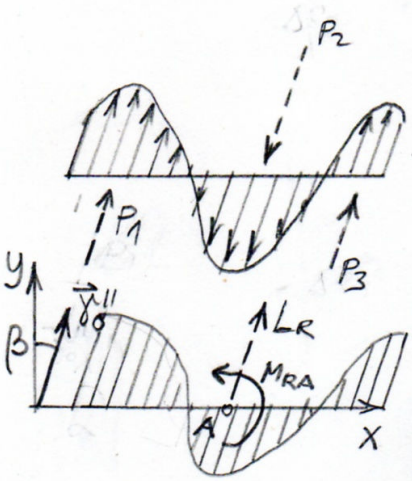
HW PE-85-42

* Djelovanje paralelne linijske sile na dužinu može se prikazati dijagramom. Pri tome se bez obzira na smjer, ordinate nanose okomito na dužinu, pa se u općem slučaju zasebno daje informacija o smjeru.



Uz tako definiran dijagram pogodno je, da se uvedu geometrijske interpretacije promatranih mehaničkih veličina. U približnom izrazu za veličinu rezultante pribrojnici imaju oblik $\gamma(x_i)\Delta x_i$, a to se geometrijski može interpretirati kao površina pravokutnika. Očito se izraz $\sum_1^n \gamma(x_i)\Delta x_i$ može shvatiti kao približna vrijednost za površinu dijagrama, a integral $\int_L \gamma(x)\,dx$ se u ovom slučaju može interpretirati kao površina dijagrama. Opći slučaj će se prikazati naknadno. Izraz za težište paralelnih linijskih sila može se interpretirati kao izraz za odgovarajuću koordinatu težišta dijagrama kao geometrijskog lika

Linijske sile na paralelnim pravcima



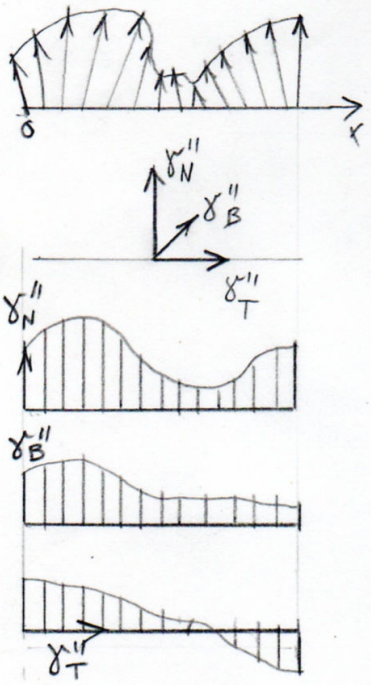
Promatrani slučaj je direktno proširenje prethodnog: postoje područja s različitim smjerovima. Time je data mogućnost rješavanja, za svako područje s istim smjerom može se odrediti rezultanta, pa je time slučaj djelovanja distribuiranih sila sveden na koncentrirane.

Moguć je formalni pristup: definira se jedinični vektor $\vec{\gamma}_0''$ kojim će se odredjivati sve sile. Funkcija intenziteta $\gamma''(x)$ može u tom slučaju poprimiti pozitivne i negativne vrijednosti. Rezultirajuće djelovanje čija sila prolazi točkom A odredjeno je izrazima:

$$L_R = \int_L \gamma''(x)\,dx \; ; \qquad M_R = \cos\beta \int_L (x - x_A)\cdot\gamma''(x)\,dx$$

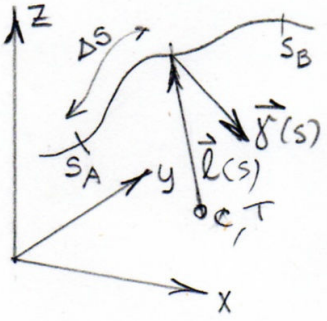
Linijski integral $\int_L \phi(x)\,dx$ definiran na dužini može se geometrijski interpretirati kao zbroj površina ispod grafa funkcije za područja s pozitivnom vrijednosti od kojeg su odbijene površine odredjene koordinatnom osi i grafom za područja s negativnim vrijednostima.

Proizvoljno djelovanje linijske sile na dužinu



Proizvoljno djelovanje linijske sile na dužinu nemože se pregledno prikazati u tehničkoj notaciji. Zbog toga se vektor linijske sile u svakoj točki rastavlja na tri komponente: dvije okomite na dužinu i jednu koja leži na pravcu odredjenom zadanom dužinom. Svakoj komponenti odgovara po jedna funkcija intenziteta. Te će se funkcije označiti $\gamma_N''(x)$, $\gamma_B''(x)$, $\gamma_T''(x)$. Sve se tri funkcije mogu prikazati u istoj ravnini normalnim dijagramima. Na slici su smjerovi za γ_N i γ_T nanešeni na grafove, a za γ_B se smjer mora definirati, npr "prema promatraču" ili $\vec{\gamma}_{0N}, \vec{\gamma}_{0T}, \vec{\gamma}_{0B}$ čine desni koordinatni sustav.

Opće djelovanje linijske sile na prostornu krivulju



Promatra se otvoreni odsjek krivulje na koju djeluju linijske sile. Svaka točka se može odrediti u pravokutnom koordinatnom sustavu, a zasebno će se još odrediti i pomoću duljine luka. Točka A se odabire kao početna i njoj se pridružuje proizvoljna vrijednost s_a. Sve preostale točke će biti odredjene s vrijednosti "s" koja se dobiva tako da se vrijednosti s_A pribroji duljina luka izmedju A i te točke

HWPK-85-43

Ako se duljina luka od A do promatrane točke označi s ΔS, pridružiti će se točki veličina S odredjena izrazom :

$$S = S_A + \Delta S$$

Duljina luka os A do B označiti će se sa L. Pridruživanjem veličine svakoj točki promatranog odsjeka A,B definirana je koordinatna linija, pa se na odsjeku A,B mogu defijirati funkcije. Linijska sila će se u općem slučaju definirati kao vektoraka funkcija $\vec{\gamma}''(s)$ čiije su koordinate tri skalarne funkcije $\gamma_x''(s)$, $\gamma_y''(s)$, $\gamma_z''(s)$, pa će se $\vec{\gamma}''(s)$ moći izraziti sa:

$$\vec{\gamma}''(s) = \gamma_x''(s)\,\vec{i} + \gamma_y''(s)\cdot\vec{j} + \gamma_z''(s)\,\vec{k}$$

Ako se zamisli da je vektorska funkcija rastavljena na komponete paralelne s osima x,y,z onda su γ_x'', γ_y'', γ_z'', intenziteti tih paralelnih linijskih sila.

Rezultirajuće djelovanje linijske sile $\vec{\gamma}''(s)$ definirane na A,B će se odrediti tako da rezultirajuća sila prolazi točkom C. Ako se točka redukcije T poklapa s C dobivaju se izrazi pomoću linijskih integrala vekotrskih funkcija, koji se mogu rastaviti na tri integrala skalarnih funkcija.

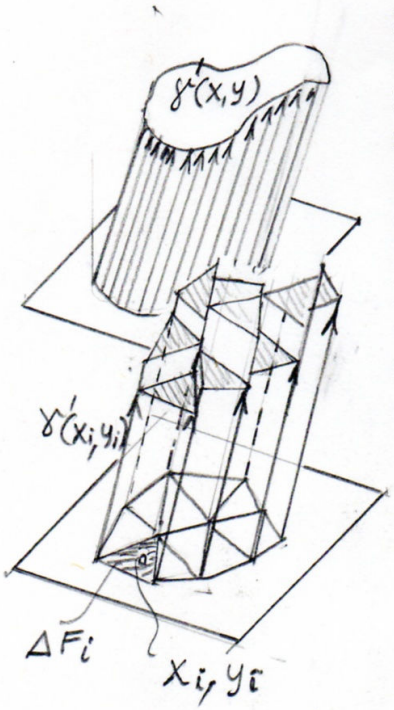
$$\vec{L}_R = \int_L \vec{\gamma}''(s)\,ds = \vec{i}\int_L \gamma_x''(s)\,ds + \vec{j}\int_L \gamma_y''(s)\,ds + \vec{k}\int_L \gamma_z''(s)\,ds$$

$$\vec{M}_{RA} = \int_L [\vec{\ell}(s) \times \vec{\gamma}''(s)]\,ds = \vec{i}\int_L [\ell_y(s)\cdot\gamma_z''(s) - \ell_z(s)\cdot\gamma_y''(s)]\,ds$$

$$+\vec{j}\int_L [\ell_z(s)\cdot\gamma_x''(s) - \ell_x(s)\cdot\gamma_z''(s)] + \vec{k}\int_L [\ell_x(s)\cdot\gamma_y''(s) - \ell_y(s)\cdot\gamma_x''(s)]\,ds$$

HWPK-85-44

Paralelne plošne sile definirane na ravnom liku



Promatra se djelovanje paralelne plošne sile promjenjivog intenziteta γ' definirane na ravnom liku. Uvesti će se najjednostavnija mogućnost približnog rješavanja. Lik će se podijeliti na elemente, npr. na trokute, a njihove površine će se označiti s ΔF_i. Pretpostaviti će se da na svaki element djeluje konstantni intenzitet $\gamma'(x_i, y_i)$, koji odgovara težištu trokuta i ima koordinate x_i, y_i. Približna veličina rezultante i položaj težišta odrediti će se izrazima:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \gamma'(x_i, y_i)\,\Delta F_i$$

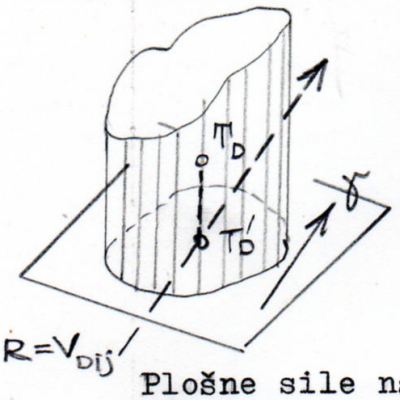
$$x_T = \frac{\sum_1^n x_i \cdot \gamma'(x_i, y_i)\cdot \Delta F_i}{R}$$

$$y_T = \frac{\sum_1^n y_i\, \gamma'(x_i, y_i)\cdot \Delta F_i}{R}$$

Kao što je u prethodnim slučajevima opisano, smanjivanjem elemenata se približno rješenje može po volji približiti točnom:

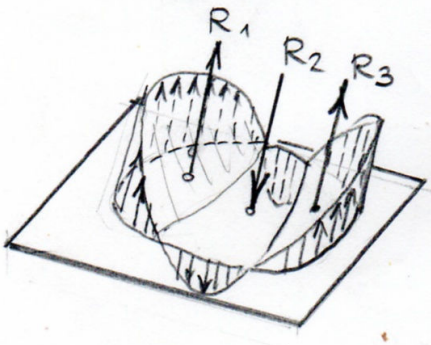
$$R = \int_F \gamma(x,y)\,dF; \quad x_T = \frac{\int x\cdot\gamma(x,y)\,dF}{R}; \quad y_T = \frac{\int y\cdot\gamma(x,y)\,dF}{R}$$

Djelovanje paralelne plošne sile na ravni lik može se prikazati dijagramom, koji se konstruira tako da se intenziteti nanose okomito na ravni lik. Za potpuno opisivanje paralelne plošne sile pomoću dijagrama potrebna je još i informacija o smjeru.



Analogno geometrijskoj interpretaciji dijagrama paralelnih linijskih sila može se uvesti geometrijska interpretacija dijagrama paralelnih plošnih sila:
Veličina rezultante jednaka je volumenu dijagrama. Pravac rezultante prolazi projekcijom težišta dijagrama(kao geometrijskog tijela) na ravni lik.

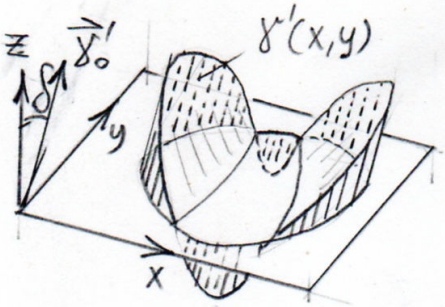
Plošne sile na paralelnim pravcima



Promatrano djelovanje sadrži područja s različito usmjerenim paralelnim silama, pa se taj slučaj može svesti na skup prethodnih. Za svako područje s paralelnim (jednako usmjerenim) plošnim silama odredjuje se parcijalna rezultanta i time je djelovanje plošne sile zamijenjeno konsntriranim silama.

HWPK-85-45

Moguć je i formalni pristup: definira se jedinični vektor $\vec{\gamma}'_0$ na parvcu paralelnom s zadanim plošnim silama. Funkcija intenziteta $\gamma'(x,y)$ je definirana na cijelom području i može poprimiti pozitivne i negativne vrijednosti. Rezultirajuće djelovanje čija sila prolazi točkom A odredjeno je izrazima:



$$L_R = \int_F \gamma'(x,y)\cdot dF$$

$$M_{RX} = \cos\delta\cdot\int_F y\,\gamma'(x,y)\,dF$$

$$M_{RY} = -\cos\delta\int_F x\cdot\gamma'(x,y)\,dF$$

pri tome je δ kut što ga jedinični vektor zatvara s osi z.

Općenito se može reći: ako je na ravnom liku definirana funkcija $f(x,y)$ i konstruiran njen normalni dijagram imati će plošni integral te funkcije geometrijsku interpretaciju. Integral će prikazivati zbroj volumena omedjenih dijagramom za područja s pozitivnim funkcijskim vrijednostima od kojeg su odbijeni volumeni omedjeni dijagramom za područja s negativnim funkcijskim vrijednostima.

Opće djelovanje plošnih i volumenskih sila

U općem slučaju plošne sile djeluju na proizvoljnu zakrivljenu plohu na kojoj su definirane krivolinijske koordinate u,v. U svakoj točki područja definicije na zadanoj plohi poznata je plošna sila kao vektorska funkcija $\vec{\gamma}'(u,v)$. Odabire se točka C kroz koju će prolaziti pravac djelovanja rezultirajuće sile. U toj se točki odabire i točka redukcije. Vektor $\vec{\ell}(u,v)$ spaja točku C sa točkom u,v na plohi. Rezultirajuće djelovanje je odredjeno sa:

$$\vec{L}_R = \int_F \vec{\gamma}'(u,v)\, dF$$

$$\vec{M}_R = \int_F \left[\vec{\ell}(u,v) \times \vec{\gamma}'(u,v)\right] \cdot dF$$

U općem slučaju volumenske sile djeluju na tijelo proizvoljnog oblika uz koje je definiran sustav x,y,z. U svakoj točki tijela definirana je volumenska sila kao vektorska funkcija $\vec{\gamma}(x,y,z)$. Rezultirajuće djelovanje čija sila prolazi točkom C odredjeno je sa:

$$\vec{L}_R = \int_V \vec{\gamma}(x,y,z)\, dV$$

$$\vec{M}_R = \int_V \left[\vec{\ell}(x,y,z) \times \vec{\gamma}(x,y,z)\right] dV$$

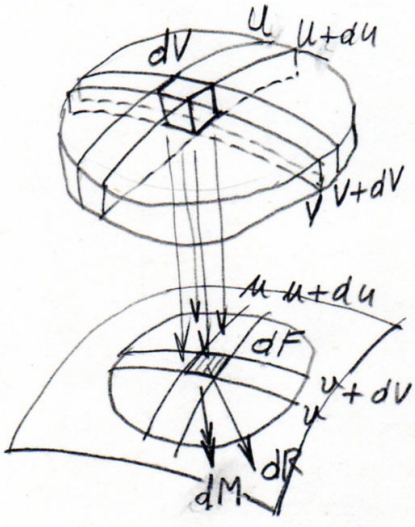
pri tome vektor $\ell(x,y,z)$ spaja točku C sa točkom x,y,z, na tijelu.

HWPK-85-46

Prikazivanje sila dalekog dometa

Sile dalekog dometa se direktno prikazuju kao volumenske sile; najjednostavniji primjer je težina. Ako su tijela koja se promatraju specijalnog oblika provodi se obično redukcija wolumenskih sila na plošne ili linijske. Kao tijela plošnog oblika smatrati će se plošna tijela i štapovi.

Plošno tijelo ima dvije dimenzije bitno veće od treće, ali je ta treća dimenzija konačna i ne može se zanemariti. (Ako se može, onda je prikladna idealizacija materijalnom plohom.) Kod plošnih tijela se volumenske sile reduciraju na plošne.



Na tijel se definiraju dvije grupe koordinatnih ploha: U_i, V_i. Presjeci tih ploha sa tijelom sadrže manju dimenziju. S dvije neizmjerno bliske plohe tipa U i dvije neizmjerno bliske plohe tipa V odredjen je na tijelu element kojemu je jedna dimenzija konačna, a druge dvijebeskonačno male. Element će se označiti s dV. Nadalje se definira redukciona ploha i na njoj krivolinijske koordinate u_i, v_i pridružene koordinatnim plohama U,V. Svakom elementu dV na tijelu odgovara element reduk-

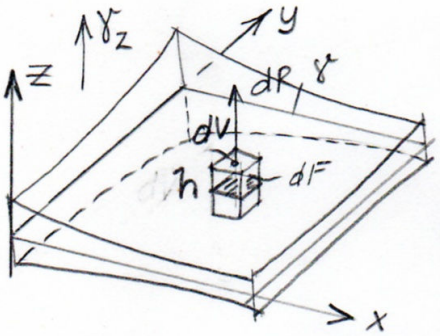
cione plohe dF. Za volumenske sile koje djeluju na dV odredjuje se rezultirajuće djelovanje tako da sila $\vec{dR}$ prolazi kroz element dF redukcione plohe. Uz rezultirajuću silu $\vec{dR}$ odredjen je i rezultirajući moment $\vec{dM}$. Dijeljenjem s dF dobiva se plošna sila $\vec{\gamma}'(u,v)$ i plošni moment $\vec{\zeta}(u,v)$, koji su zajedno statički ekvivalentni zadanim volumenskim silama.

$$\vec{\gamma}'(u,v) = \frac{d\vec{R}}{dF}; \qquad \vec{\zeta}(u,v) = \frac{d\vec{M}}{dF}$$

Rezultirajuće djelovanje zadanih volumenskih sila može se odrediti pomoću dobivene plošne sile i plošnog momenta.

$$\vec{L}_R = \int_F \vec{\gamma}'(u,v)\, dF; \qquad \vec{M}_R = \int_F [\vec{r}(u,v) \times \vec{\gamma}'(u,v) + \vec{\zeta}(u,v)]\, dF$$

Redukciona ploha se obično odabire unutar plošnog tijela. Prikazati će se jednostavan slučaj ravnog plošnog tijela na kojeg djeluje konstantna volumenska sila. Ravno plošno tijelo je ono, koje ima ravninu simetrije takovu da presjek ravnine s tijelom sadrži obje veće dimenzije tijela. Ta će se ravnina nazivati srednja ravnina. U svakoj točki srednje ravnine definirana je visina plošnog tijela kao udaljenost točaka sa vanjskih ploha koje leže na okomici kroz zadanu točku. Ako se na srednjoj ravnini definira koordinatni sistem x,y, može se visina izraziti kao funkcija h (x,y). Oko točke x,y se uvodi neizmjerno mali dio ravnine označen s dF Okomice na obodu elementa dF odredjuju u tijelu pripadni elementarni volumen dV. Na cijelo plošno tijelo djeluje konstantna volumenska sila paralelna s osi z. Intenzitet je γ_z. Prema tome se za svaki dV može odrediti rezultanta koja prolazi kroz dF i označiti će se s dR. U tom je slučaju dM = 0.



$$dR = \gamma_z \cdot dV = \gamma_z \cdot dF \cdot h(x,y)$$

Pripadna plošna sila se odredjuje dijeljenjem s dF:

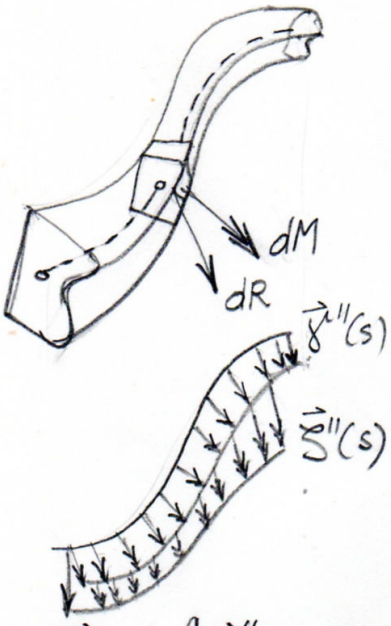
$$\gamma'(x,y) = \frac{dR}{dF} = \frac{\gamma_z \cdot dF \cdot h(x,y)}{dF} = \gamma_z \cdot h(x,y)$$

Kako dM iščezava za svaki dV u ovom slučaju identično iščezava plošni moment.

Ravna plošna tijela se ovisno o namjeni nazivaju ploče ili stijene, a zakrivljena plošna tijela se nazivaju ljuske.

Štapovi su tijela kod kojih je jedna dimenzija bitno veća od preostale dvije, koje nisu zanemarljivo male. (U slučaju da su dvije dimenzije zanemarljivo male prikladna idealizacija je materijalna linija). Na štapu se definira os. Os je u općem slučaju prostorna krivulja. U svakoj točki osi može se postaviti tangenta. Ravnina okomita na tangentu nazvati će se poprečna ravnina. Os se odredjuje tako, da na njoj leže težišta likova dobivenih presjekom tijela s odgovarajućom poprečnom ravninom.

HWPK-85-47

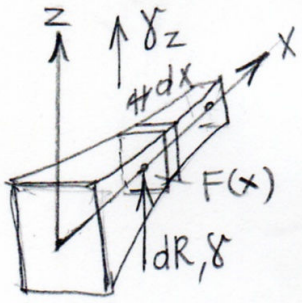


Lik odredjen presjekom tijela i poprečnom ravninom naziva se poprečni presjek štapa.
Svakom neizmjerno malom dijelu osi ds prtdružuje se pomoću rubnih presjeka neizmjerno **kratki dio štapa,** koji će se kao i njegov volumen označiti s dV. Za volumenske sile koje djeluju na dV odredjuje se rezultirajuće djelovanje $\vec{dR}$, $\vec{dM}$ tako da sila dR prolazi kroz ds. Dijeljenjem s ds dobivaju se linijska sila i linijski moment koji su zajedno statički ekvivalentni zadanim volumenskim silama.

$$\vec{\gamma}''(s) = \frac{d\vec{R}}{ds}; \qquad \vec{\zeta}''(s) = \frac{d\vec{M}}{ds}$$

Rezultirajuće djelovanje zadanih volumenskih sila može se odrediti kao rezultirajuće djelovanje dobivene linijske sile i linijskog momenta:

$$\vec{L}_R = \int_L \vec{\gamma}''(s)\,ds; \qquad \vec{M}_R = \int_L [\vec{r}(s) \times \vec{\gamma}''(s) + \vec{\zeta}''(s)]\,ds$$



Prikazati će se jednostavni slučaj pravog štapa, dakle onog kojem je os na pravcu ili: os mu je dužina. Na osi će se odabrati koordinatna os x. Površina poprečnog presjeka u točki x može se izraziti kao funkcija od x, a označiti će se sa F(x). Promatra se neizmjerno mali dio os dx koji sadrži točku x. Za odredjivanje volumena se promjena F(x) duž dx može zanemariti, pa će volumen neizmjerno kratkog elementa štapa biti odredjen kao za prizmu.
Ako na štap djeluje konstantna volumenska sila intenziteta γ_z'', može se odrediti rezultanta djelovanja na dV, prema:

$$dR = \gamma_z'' \cdot dV = \gamma_z'' \cdot F(x) \cdot dx$$

Kako ta rezultanta prolazi kroz dx, pripadni rezultirajući moment iščezava; dM = 0, pa identično iščezava i linijski moment.
Linijska sila koja je statički ekvivalentna djelovanju volumenske sile na štap dobiva se dijeljenjem dR s dx

$$\gamma''(x) = \frac{dR}{dx} = \gamma_z'' \cdot F(x)$$

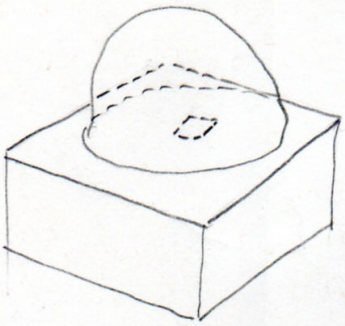
HWPK-85-48

Prikazivanje sila kratkog dometa

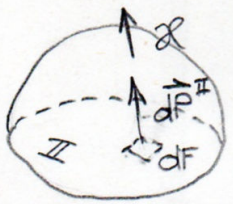
U proračunu konstrukcija promatraju se kontaktne sile i unutarnje sile kao primjeri sila kratkog dometa. Sile kratkog dometa se u kontinuumu direktno prikazuju kao plošne sile, a mogu se reducirati na liniju.

Kontaktne distribuirane sile

Kontaktne sile se intuitivno mogu prihvatiti kao plošne sile, jer djeluju duž vanjske plohe tijela koja može biti vidljiva. Kod kontakta dvaju čvrstih tijela pojavljuje se na svakom od njih kontaktna ploha t.j. onaj dio oplošja duž kojeg djeluju kontaktne sile. Za prikazivanje kontaktnih sila uočava se dio kontaktne plohe dF^I jednog tijela i odgovarajući dio plohe dF^{II} drugog tijela. Geometrijski du dF^I i dF^{II} sukladni. Djelovanje kontaktnih sila na prvo tijelo unutar beskonačno male plohe dF^I prikazuje sila $\vec{dP}^I$. Djelovanje na drugo tijelo unutar odgovarajuće male plohe dF^{II} prikazuje sila $\vec{dP}^{II}$ koja je suprotna sili $\vec{dP}^I$. Njihove veličine su jednake i mogu se označiti s dP. Za tijelo I se u svakoj točki kontaktne plohe uvodi kontaktna sila kao vektorska funkcija:

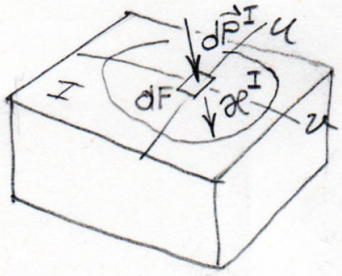


$$\vec{\mathscr{R}}^I(u,v) = \frac{\vec{dP}^I}{dF}$$



Za drugo tijelo se uvodi odgovarajuća funkcija koja je upravo suprotna kontaktnoj sili prvog tijela:

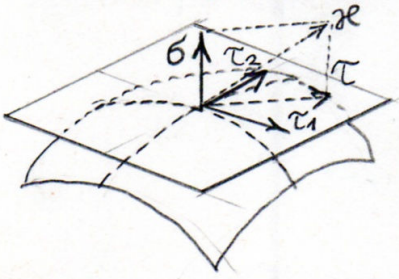
$$\vec{\mathscr{R}}^{II}(u,v) = \frac{\vec{dP}^{II}}{dF} = -\vec{\mathscr{R}}(u,v)$$



pri tome je dF površina promatranih ploha dF^I i dF^{II}. Točka je na plohi odredjena koordinatama u i v.

Kontaktne sile se mogu zadati i u tehničkoj notaciji: pomoću skalarne funkcije $\mathscr{R}(u,v)$ koja se naziva ukupni kontaktni napon, i strijelice u svakoj točki, dakle polja strijelica(smjerova) koje se prikazuje slikom. Matematički je polje smjerova vektorska funkcija kod koje je svakoj točki pridružen jedinični vektor: $\vec{\mathscr{R}}_o^I(u,v)$

U općem slučaju kontaktne plohe mogu biti zakrivljene. Zbog opisivanja mehaničkih svojstava materijala pogodno je vektor ukupnog kontaktnog napona u svakoj točki rastaviti na dvije komponente normalnu i tangencijalnu. Dvije točke neizmjerno bliske promatranoj, a koje ne leže na istom pravcu, definiraju u promatranoj točki plohe tangencijalnu ravninu. Normala na plohu u promatranoj točki je okomica na tangencijalnu ravninu u istoj točki.



HWPK-85-49

Veličina normalne komponente sa označava sa σ i naziva:kontaktni pritisak. Veličina posmične komponente se označava s τ i naziva:napon trenja. Pri tome strijelicu napona trenja treba odrediti s dva kuta prema čvrstim osima. Umjesto toga se napon trenja može rastaviti na dvije komponente čije su veličine na skici označene s τ_1 i τ_2.

Trenje

Trenje je otpor težnji relativnog gibanja duž kontaktne plohe. Kod relativnog mirovanja dvaju tijela koja su u kontaktu napon trenja nemože prekoračiti naku vrijednost proporcionalnu kontaktnom pritisku: $\tau \leq \mu_0 \sigma$

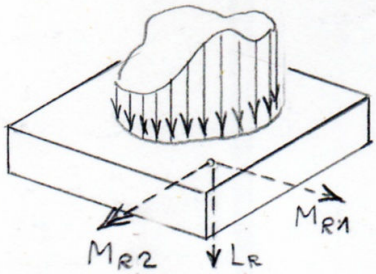
Koeficijent μ_0 se naziva koeficijent trenja mirovanja i on je funkcija finoće obrade kontaktnih ploha, materijala koji čine tijela i eventualnog maziva koje postoji u kontaktu.

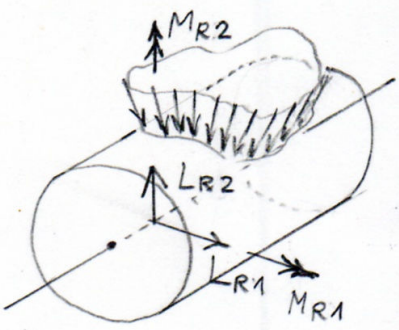
Ako je težnja relativnom gibanju tako velika da ju naponi trenja mirovanja ne mogu uravnotežiti pojaviti će se relativno gibanje duž kontaktne plohe, a otpor gibanju će davati napon trenja gibanja. Kod malih brzina se trenje gibanja može smatrati proporcionalnim kontaktnom pritisku, pa se uvodi koeficijent trenja gibanja koji je nešto manji od koeficijenta mirovanja.

Kontakt bez trenja se naziva idealni kontakt. U tom slučaju je vektor kontaktnih sila okomit na kontaktnu plohu, to jest svodi se na čisti pritisak.

HWPK-85-50

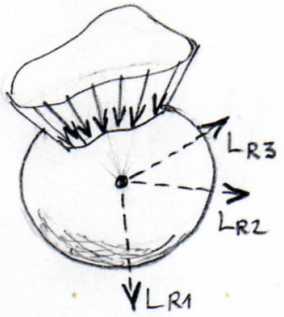
Kontakti bez trenja na kuglastim,valjkastim i ravnim kontaktnim plohama





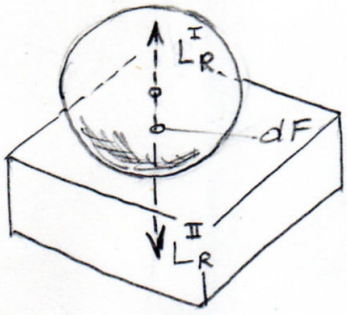
Ako se u tehnici želi postići relativno gibanje izmedju nekih dijelova proizvoda često se koriste navedene plohe. Konkretna primjena se često nalazi u strojevima, rjedje u konstrukcijama. U proračunu konstrukcija takvi kontakti zauzimaju važno mjesto jer se u postupku često treba zamisliti da takovi konatkti postoje. U tim slučajevima se, bez obzira na funkciju pritiska, pojavljuju neke zakonitosti u rezultirajućim djelovanjima.
Ako su obje kontaktne plohe ravne rezultirajuće djelovanje će se uvijek moći prikazati pomoću jedne sile u nekoj točki i dva momenta u ravnini (sistem sila na paralelnim pravcima).

Ako su obje kontaktne plohe neizm no bliski kružni valjci, sve normale koje odredjuju smjerove pritiska prolaze kroz os. Zbog toga išče-zava komponenta rezultirajuće sile koja leži na osi,i paralelna komponenta rezultirajućeg

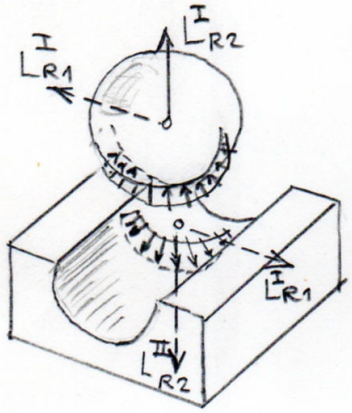


Ako su obje kontaktne plohe neizmjerno bliska oplošja kugli, sve normale koje odredjuju smjerove kontaktnih sila prolaze središtem kugle, pa se rezultirajuće djelovanje može prikazati s tri nekomplanarne komponente koje prolaze središtem.

Pri kombiniranim kontaktima različitih ploha mogu se pojaviti kontaktne linije ili točke i odgovarajuća kontaktna djelovanja.



Kontakt ravnina-kugla se svodi na neizmjerno malu kružnicu kroz koju prolazi okomita rezultanta. U tomspecijalnom slučaju se kontaktne sile svode na koncentriranu silu na zadanom pravcu. U realnom slučaju će se pojaviti konačna, ali vrlo mala kontaktna ploha.

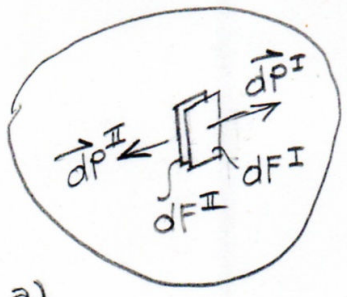


Kontakt izmedju kugle i udubljenja u obliku polukružnog valjka se svodi na dio kružnice, duž koje djeluju linijske sile koje prolaze središtem kružnice i okomite su na os valjka. Rezultirajuće djelovanje je odredjeno s dvije sile koje prolaze središtem kugle i leže u ravnini okomitoj na os valjka.
Na skici su kugla i udubljenje prikazani odvojeno.

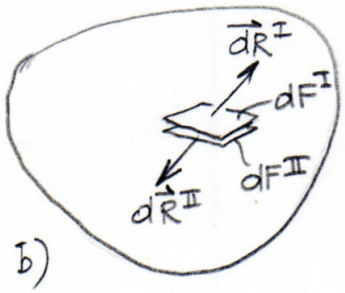
HWPK-85-51

Unutarnje sile

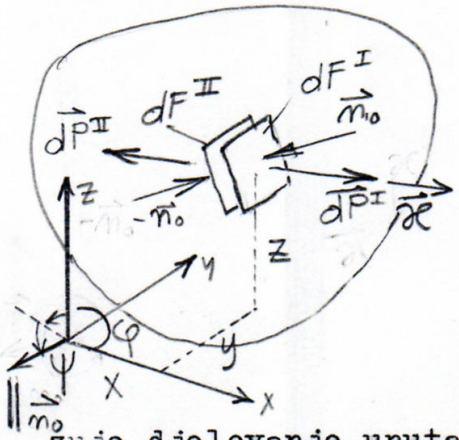
Prikazivanje unutarnjih sila u kontinuumu kao plošnih sila se intuitivno teže prihvaća jer ne postoji vidljiva ploha duž koje sile djeluju. U svakoj točki promatranog tijela treba zamisliti dvije neizmjerno male plohe dF^I i dF^{II} koje se jedna do druge i na taj način razdvajaju materijal u tijelu. U diskretnom modelu se pojavljuju sile izmedju susjednih čestica. Po analogiji treba prihvatiti, da se u kontinuumu pojavljuju sile izmedju parova bliskih neizmjerno malih ploha. Dok se kod točaka mogao odrediti pravac sila na spojnici u čvrstom tijelu sile mogu djelovati na bilo kojem pravcu koji prolazi promatranim elementarnim plohama.. Plohama dF^I i dF^{II} odgovarati će suprotne i po veličini jednake sile dP^I i dP^{II}. Ako se u istoj točki odabere drugi par ploha (skica b)) biti će sile izmedju njih, u općem slučaju, različite od prethodnih, pa su označene s dR^I i dR^{II}.



a)



b)

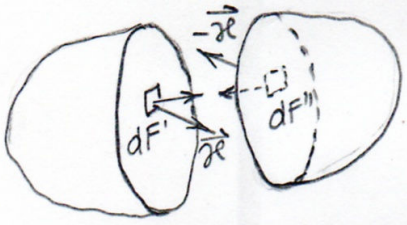


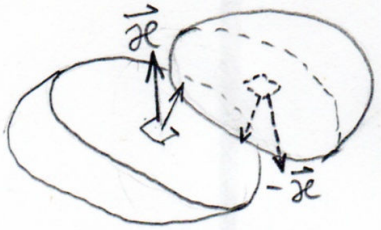
Unutarnje sile čvrstog tijela se u kontinuumu mogu prikazati na slijedeći način:
Svakoj točki (x,y,z) promatranog tijela pridruženo je polje jediničnih vektora. Svaki jedinični vektor $\vec{n}_o$ je odredjen s dva orjentirana kuta i on je vanjska normala na beskonačno malu plohu dF^I. Neizmjerno blizu i paralelno s dF^I uvodi se sukladna ploha dF^{II}. Vanjska normala na dF^I je usmjerena u "medjuprostor" izmedju dF^I i dF^{II}. Vanjska normala za plohu dF^{II} je, prema tome, suprotna od $\vec{n}_o$ t.j. $-\vec{n}_o$. Elementarna sila $d\vec{P}^I$ prikazuje djelovanje unutarnjih sila na plohu dF^I i pomoću nje se definira unutarnja sila u točki kao vektorska funkcija:

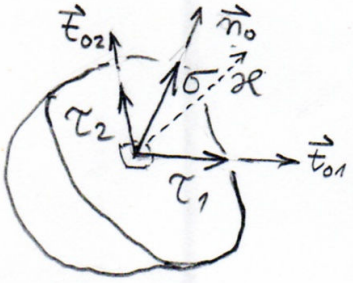
$$\vec{p}(x, y, z, \varphi, \psi) = \frac{d\vec{P}^I}{dF}$$

Može se reći i: $\vec{p}$ je vektor ukupnog napona u odnosu na normalu $\vec{n}_o$ u točki (x,y,z). Djelovanje unutarnjih sila na suprotnu plohu dF^{II} prikazuje suprotna funkcija. Prema tome se vektor ukupnog napona može prikazati kao funkcija od pet varijabli, pa joj odgovaraju tri skalarne funkcije od pet varijabli. Kasnije će se uvesti indirektni način odredjivanja napona u točki koji se svodi na šest skalarnih funkcija od tri varijable. Bez obzira na način prikazivanja, ukupna informacija o naponima u tijelu naziva se naponsko polje.

HWPK-85-52







Mnogo je lakše zamisliti "presjek" kroz naponsko polje: promatra se zamišljena ploha koja dijeli tijelo na dva dijela. Radi preglednosti se ti dijelovi na skicama prikazuju rastavljeno. U svakoj točki zamišljene plohe definirana je unutarnja sila kao plošna, potpuno analogno kontaktnim silama. Pri takovom prikazu ne treba zaboraviti da vektor ukupnog napona u točki zavisi i o normali na plohu. Ako se kroz istu točku odabere neka nova zamišljena ploha, čija je normala u toj točki različita od prethodne, biti će u općem slučaju i različit vektor ukupnog napona.

Zbog pogodnijeg opisivanja mehaničkih svojstava materijala prikazuje se vektor ukupnog napona u rastavljenom obliku. Uvodi se komponenta na normali na plohu i dvije komponente u tangencijalnoj ravnini.

Veličina normalne komponente se označava sa σ i naziva "normalni napon"
Veličina komponenti u tangencijalnoj ravnini označava se sa τ i naziva "posmični napon"
U tehničkoj notaciji se strijelice uz veličine zadaju geometrijski.

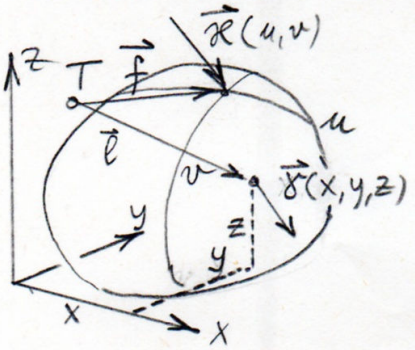
Za formalni prikaz definira se u točki (x,y,z) baza $\vec{n}_o, \vec{t}_{o1}, \vec{t}_{o2}$ u kojoj se prikazuje vektor ukupnog napona:

$$\vec{\mathcal{R}} = \sigma \cdot \vec{n}_o + \tau_1 \cdot \vec{t}_{o1} + \tau_2 \cdot \vec{t}_{o2}$$

U tom smislu pozitivni σ znači da je komponenta na normali usmjerena kao vanjska normala, može se reći "normalni napon je vlačan", a negativni σ znači da je komponenta na normali usmjerena prema plohi; može se reći:"normalni napon je tlačan". Polje napona je složena struktura, pa se uz pojmove "vlačan" i "tlačan" ne može dati jednostavna precizna ilustracija. Naime; ne može se zamisliti da su se kod vlačnog djelovanja dvije elementarne plohe malo razmaknule, pa ih vlačno djelovanje teži približiti jer je to suprotno s idealizacijom, niti se može zamisliti da su se dvije bliske točke u kontinuumu nešto razmaknule, dakle da se materijal rastegnuo, jer to ne mora biti uvijek slučaj. Ti će se odnosi razjasniti kasnije u prikazivanju neponskih i deformacionih polja.

Ravnoteža tijela uz djelovanje distribuiranih sila

Kod prikazivanja distribuiranih sila prikazani su izrazi za rezultirajuća djelovanja pomoću graničnog slučaja sistema koncentriranih sila, pa će se u ovom slučaju ravnoteža tijela svesti na uravnoteženost svih sila koje na njega djeluju.



Promatrano tijelo je definirano u koordinatnom sistemu x,y,z, a na oplošju je definiran koordinatni sistem u,v. U svakoj točki tijela definirana je volumenska sila $\vec{\gamma}(x,y,z)$, a na svakoj točki oplošja definirana je kontaktna sila $\vec{\mathcal{R}}(u,v)$. Uz odabranu točku redukcije T i vektore $\vec{\ell}(x,y,z)$ i $\vec{f}(u,v)$ koji povezuju točku T s točkama u kojima su definirane sile, uvjeti ravnoteže glase:

$$\int_V \vec{\gamma}\, dV + \int_F \vec{\mathcal{R}}\, dF = \vec{0}; \quad \int_V \vec{\ell} \times \vec{\gamma}\, dV + \int_F \vec{f} \times \vec{\mathcal{R}}\, dF = \vec{0}$$

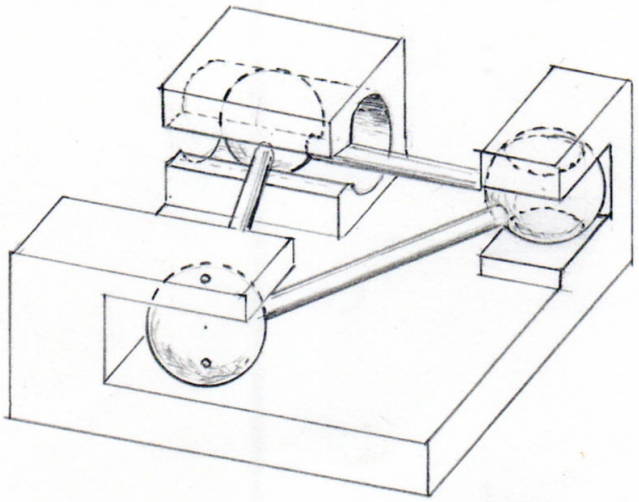
Iz uvjeta ravnoteže tijela ne mogu se u općem slučaju odrediti distribuirane sile kao funkcije, jer se iz šest skalarnih uvjeta mogu odrediti samo šest skalara. Ti skalari mogu imati dva fizikalna značenja:

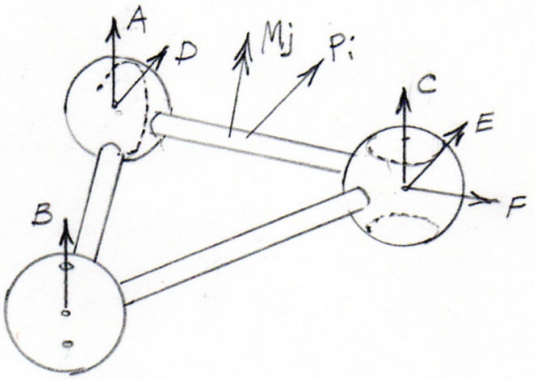
a) veličine komponenti rezultirajućeg djelovanja traženih distribuiranih sila, koje kao funkcije u točki idalje ostaju nepoznate.
b) faktori u linearnoj kombinaciji poznatih distribuiranih sila pomoću kojih se prikazuje tražena distribuirana sila.

Kao primjer za prvi slučaj promatra se tijelo na koje djeluju zadane sile, a s drugim tijelima je u kontaktu na tri područja. Na prvom, promatrano tijelo ima oblik dijela kugle, a tijelo s kojim je u kontaktu ima kuglaste udubine. Rezultirajuće djelovanje je odredjeno s tri nekomplanarne sile koje prolaze središtem kugli. Na drugom promatrano tijelo ima oblik dijela kugle,

24.10. HWPK-85-53

a drugo tijelo ima žlijeb u obliku kružnog valjka u kojem je ostvaren kontakt s kuglom. Rezultirajuće djelovanje je odredjeno s dvije sile kroz središte kugle, koje su okomite na os valjka. Na trećem području je dio kugle koji pripada promatranom tijelu u kontaktu s ravnim dijelovima drugog tijela, pa se rezultirajuće djelovanje svodi na jednu silu kroz središte kugle, na okomici na





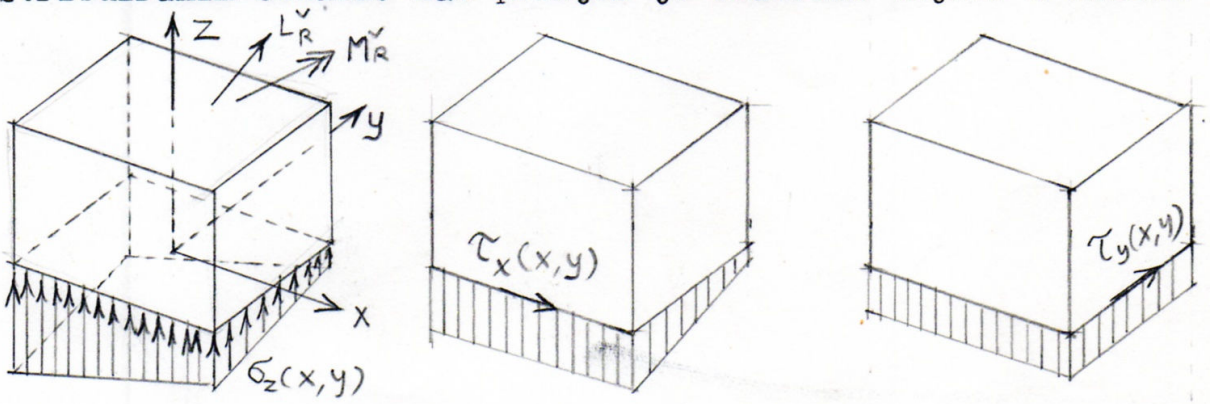
ravne dijelove drugog tijela. Na skici je prvo tijelo prikazano kao tri kugle spojene štapovima. Na zasebnoj skici je prikazano samo promatrano tijelo i rezultirajuća djelovanja pojedinih područja. Prvo područje čine dva konačna dijela kuglinog oplošja, drugo područje je dio kruga, a treće samo dvije točke. Vidljivo je da je odabran primjer kod kojeg se svih šest nepoznatih komponenti može odrediti iz šest uvjeta ravnoteže u prostoru.

HWPK-85-54

U drugom slučaju odredjivanja nepoznatog distribuiranog djelovanja kao linearne kombinacije od šest poznatih distribuiranih sila, postavlja se pitanje kako se može saznati da je takav postupak smislen. Opravdanje za takav postupak daju eksperimentalna i teoretska istraživanja, a ponekad se takav postupak uvodi i kao najgrublja aproksimacija rješenja. Opći izraz za takav postupak bi glasio:

$$\vec{q}(\vec{r}) = \sum_{1}^{6} \alpha_i \cdot \vec{f}_i(\vec{r})$$

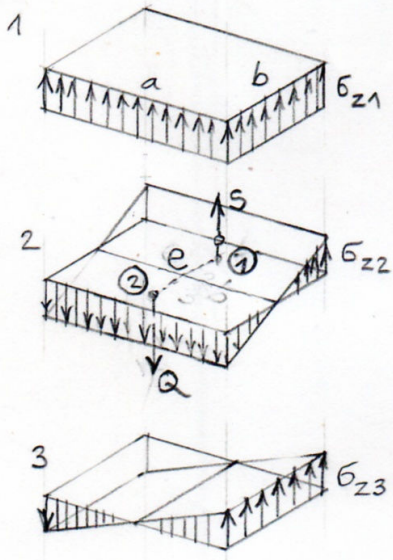
pri čemu je $\vec{q}$ zasada nepoznata distribuirana sila, a $\vec{f}_i$ su poznate distribuirane sile. α_i su faktori koji će se odrediti iz uvjeta ravnoteže. S radijvektorom $\vec{r}$ je simbolički prikazana točka s područja definicije, jer nije bitno da li se radi o linijskim, plošnim ili distribuiranim silama. Kao primjer je odabrano tijelo u obliku



kvadra. Na tijelo djeluju zadane sile P_i, M_j koje mogu biti i rezultirajuća djelovanja zadanih distribuiranih sila. Na jednu stranu kvadra djeluju zasada nepoznate plošne sile koje će se odrediti iz uvjeta ravnoteže. Uz tijelo je odabran i koordinatni sustav, pa će se u njemu prikazati plošne sile pomoću tri funkcije kojima su odredjene veličine komponenti. Te su funkcije na skici prikazane normalnim dijagramima. Iz drugih razmatranja je poznato, da se $\sigma_z(x,y)$ može prikazati kao opća linearna funkcija, da je $\tau_x(x,y)$ linearna funkcija konstantna po x-u, te da je $\tau_z(x,y)$ konstanta. Prema tome će opći izrazi za večičine komponenti glasiti:

$$\sigma_z(x,y) = \alpha_3 x + \alpha_2 y + \alpha_1 ; \quad \tau_x(x,y) = \alpha_5 y + \alpha_4 ; \quad \tau_y(x,y) = \alpha_6$$

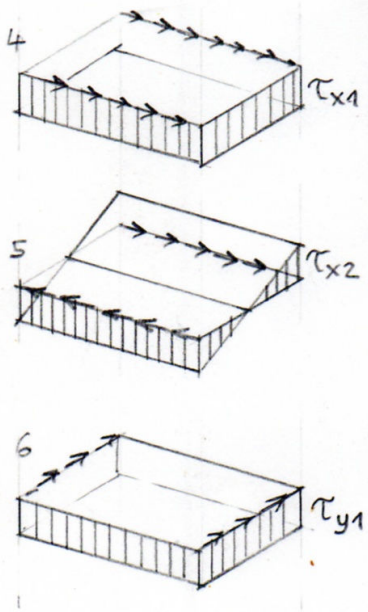
Pri tome su koeficijenti α_1 do α_6 zasada nepoznati. Ako se izrazi za veličine komponenti uvrste u uvjete ravnoteže, dobiti će se sistem linearnih algebarskih jednadžbi, koji će u općem slučaju biti rješiv, ako pripadna determinanta bude različita od nule. Pokazati će se da je za konkretni primjer sistem rješiv, štoviše; da je sistem jednadžbi dijagonalam. Vidljivo je, da je tražena distribuirana sila prikazana kao zbroj od šest jednostavnih distribuiranih sila sa paralelnim pravcima; tri su paralelne s osi z, dvije s osi x, a jedna s osi y. Svaka od njih se množi s odgovarajućim nepoznatim koeficijentom. U praktičnim računima se umjesto faktora uvode nepoznate veličine napona u karakterističnim mjestima. Na skicama su prikazani dijagrami poznatih funkcija već pomnoženih s faktorima. U tom smislu se faktori mogu izraziti pomoću uvedenih karakterističnih veličina napona:



$$\alpha_1 = \sigma_{z1} ; \quad \alpha_2 = \frac{2\sigma_{z2}}{b} ; \quad \alpha_3 = \frac{2\sigma_{z3}}{a}$$

$$\alpha_4 = \tau_{x1} ; \quad \alpha_5 = \frac{2\tau_{x2}}{b} ; \quad \alpha_6 = \tau_{y1}$$

Rezultirajuća djelovanja će se jednostavno odrediti pomoću geometrijske analogije. Tri sile imaju paralelne smjerove, pa će rezultanta biti jednaka volumenu tijela napona, a prolaziti će projekcijom težišta na osnovni lik. Kod svakog od tih stanja je samo po jedna komponenta rezultirajućeg djelovanja različita od nule:



$$L_{RX5} = a \cdot b \cdot \tau_{x1}$$

$$L_{RY6} = a \cdot b \cdot \tau_{y1}$$

$$L_{RZ1} = a \cdot b \cdot \sigma_{z1}$$

Preostale tri linearno promjenjive plošne sile sadrže dva područja sa suprotno usmjerenim silama. Za svako područje će se zasebno odrediti rezultanta. Npr. za drugu plošnu silu koju karakterizira

HWPK-85-55

veličina napona σ_{z2} odrediti će se rezultanta područja usmjerenog kao pozitivna os z. Veličina rezultante će se označiti sa S i odrediti kao volumen tijela napona; u ovom slučaju trostrane prizme.

$$S = a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{\sigma_{z2}}{2} = \frac{ab}{4} \cdot \sigma_{z2}$$

Težište paralelnih plošnih sila ima koordinate $x_1 = 0$; $y_1 = \frac{b}{3}$
Rezulatnta područja usmjerenog kao negativna os z, ima veličinu Q koja je jednaka S. REzultirajuće djelovanje se svodi na spreg, pa sve komponente rezultirajuće sile. Različit od nule je samo moment oko osi x

$$M_{RX2} = \frac{e}{2} \cdot S + \frac{e}{2} \cdot Q = e \cdot S = \frac{2b}{3} \cdot \frac{ab}{4} \cdot \sigma_{z2} = \frac{ab^2}{6} \cdot \sigma_{z2}$$

Analogno tome se treća plošna sila svodi na spreg, pa je samo komponenta M_{RY} rezultirajućeg djelovanja različita od nule:

$$M_{RY3} = \frac{a^2 b}{6} \cdot \sigma_{z3}$$

Prema tome se i peta plošna sila svodi na spreg čije sile su paralelne s osi x, pa je samo komponenta rezultirajućeg djelovanja različita od nule:

$$M_{RZ5} = \frac{a^2 b}{6} \cdot \tau_{xz}$$

Uvjeti ravnoteže će glasiti:

$$ab \cdot \tau_{x1} = -L^V_{RX}$$
$$ab \cdot \tau_{y1} = -L^V_{RY}$$
$$ab \cdot \sigma_{z1} = -L^V_{RZ}$$
$$\frac{ab^2}{6} \cdot \sigma_{z2} = -M^V_{RX}$$
$$\frac{a^2 b}{6} \sigma_{z3} = -M^V_{RY}$$
$$\frac{a^2 b}{6} \tau_{xz} = -M^V_{RZ}$$

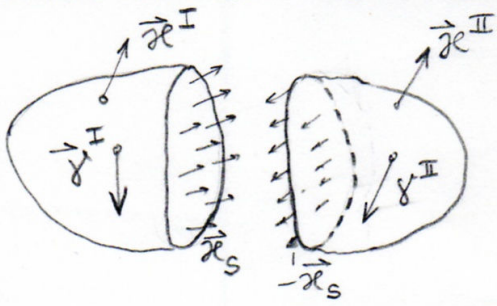
pri tome su sa superskriptom V označene komponente rezultirajućeg djelovanja svih zadanih sila. Dobiven je dijagonalni sistem linearnih jednadžbi, koji formalno ima uvjete rješivosti, a to su:

$$a \neq 0; \quad b \neq 0$$

HWPK-85-56

Ravnoteža proizvoljnog dijela tijela

Tijelo se nalazi u ravnoteži samo ako je svaki njegov dio u ravnoteži. Svaki proizvoljno odabrani konačni dio tijela je statički gledano takodjer tijelo za koje moraju vrijediti odgovarajući uvjeti ravnoteže. U zadanom tijelu se zamišlja ploha S koja ga dijeli na dva dijela. Dijelovi će se označiti s I i II. Odgovarajućim superskriptom će se označiti svi objekti koji se odnose na pojedini dio, osim unutarnjih sila duž plohe S. Unutarnje sile na dio I koji će se još nazivati i



"promatrani dio" biti će $\vec{\mathcal{R}}_S$. Na dio II koji će se još nazivati i "preostali dio" će djelovati unutarnje sile $-\mathcal{R}_S$. Očito je nebitno koji će se dio smatrati promatranim, a koji dio preostalim.
Uz odabranu točku redukcije T u kojoj počinju vektori $\vec{\ell}$ i $\vec{f}$, glasiti će uvjeti ravnoteže dijela I:

$$\int_{V^I} \vec{\gamma}^I dV + \int_{F^I} \vec{\mathcal{R}}^I dF + \int_S \vec{\mathcal{R}}_S dF = \vec{\emptyset}$$

$$\int_{V^I} \vec{\ell} \times \vec{\gamma} dV + \int_{F^I} \vec{f} \times \vec{\mathcal{R}} dF + \int_S \vec{f} \times \vec{\mathcal{R}}_S dF = \vec{0}$$

Uvjeti ravnoteže za dio II će glasiti:

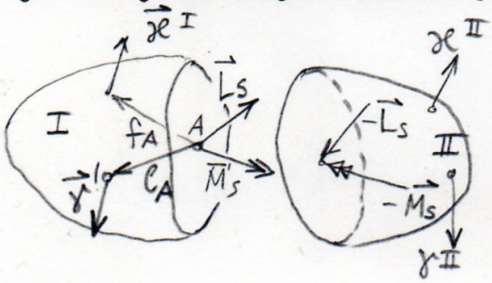
$$\int_{V^{II}} \vec{\gamma}^{II} dV + \int_{F^{II}} \vec{\mathcal{R}}^{II} dF - \int_S \vec{\mathcal{R}}_S dF = \vec{0}$$

$$\int_{V^{II}} \vec{\ell} \times \vec{\gamma}^{II} dV + \int_{F^{II}} \vec{f} \times \vec{\mathcal{R}}^{II} dF - \int_S \vec{f} \times \vec{\mathcal{R}}_S dF = \vec{0}$$

Standardni zadatak u proračunu konstrukcija je odredjivanje unutarnjih sila za zadane kontaktne sile na vanjskoj plohi i volumenske sile. Kao što je već ranije navedeno, iz uvjeta ravnoteže nekog tijela ne mogu se odrediti distribuirane sile kao funkcije, nego samo šest skalarnih podataka, koji mogu biti komponente rezultirajućeg djelovanja ili faktori u linearnoj kombinaciji.

HWPK - BS - 57

Iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela može se odrediti rezultirajuće djelovanje unutarnjih sila, t.j. jedna koncentrirana sila i jedan koncentrirani moment koji su statički ekvivalentni unutarnjim silama.



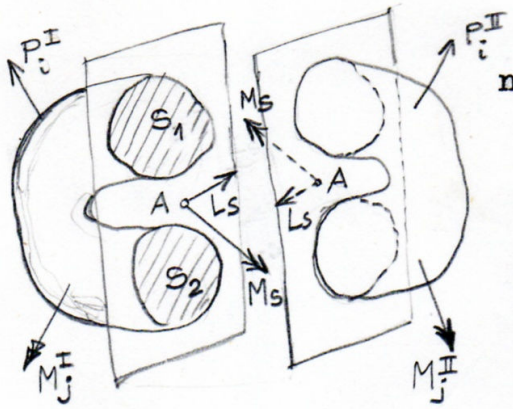
$$\vec{L}_S = \int_S \vec{\mathcal{R}}_S dF = -\left[\int_{V^I} \vec{\gamma}^I dV + \int_{F^I} \vec{\mathcal{R}}^I dF\right]$$

$$\vec{M}_S = \int_S \vec{f}_A \times \vec{\mathcal{R}}_S dF = -\left[\int_{V^I} \vec{\ell}_A \times \vec{\gamma}^I dV + \int_{F^I} \vec{f}_A \times \vec{\mathcal{R}}^I dF\right]$$

Iz uvjeta ravnoteže dijela II t.j. preostalog dijela takodjer se može odrediti rezultirajuće djelovanje unutarnjih sila, koje će se namjerno označiti pomoću rezultirajućeg djelovanja dijela I, t.j. promatranog dijela. Prema tome će umjesto unutarnjih sila na dio II djelovati $(-L_S)$ i $(-M_S)$. Ako se uvjeti ravnoteže postave i pomnože s (-1) dobiva se:

$$\vec{L}_S = \int_{V^{II}} \vec{\gamma}^{II} dV + \int_{F^{II}} \vec{\mathcal{R}}^{II} dF; \qquad \vec{M}_S = \int_{V^{II}} \vec{\ell}_A \times \vec{\gamma}^{II} dV + \int_{F^{II}} \vec{f}_A \times \vec{\mathcal{R}}^{II} dF$$

Rezultirajuće djelovanje unutarnjih sila na plohi koja razdvaja tijelo koje se nalazi u ravnoteži, može se odrediti na dva načina: Rezultirajuće djelovanje je jednako negativnom rezultirajućem djelovanju svih preostalih sila koje djeluju na isti dio tijela, odnosno; jednako je rezultirajućem djelovanju svih preostalih sila koje djeluju na preostali dio tijela.
Treba uočiti da presjek tijela sa zamišljenom plohom može činiti više odvojenih likova, a dobiveno rezultirajuće djelovanje zamje-



njuje unutarnje sile na svim tim likovima zajedno. Prema tome; iz uvjeta ravnoteže se ne može odrediti rezultirajuće djelovanje unutarnjih sila za jedan od likova koji čine zamišljeni presjek Izbor točke (na skici označeme s A) nema na to nikakovog utjecaja.

Kombinirana formulacija uvjeta ravnoteže

U praktičnom proračunu uvode se zajedno i distribuirane i koncentrirane sile i koncentrirani momenti. Obično se ponašanje materijala prikazuje pomoću kontinuiranog modela za koji su uvedene distribuirane sile, pa se koncentrirana djelovanja mogu uvesti samo kao rezultirajuća djelovanja za odabrane distribuirane sile. Pri tome je pogodno da se razlikuju dva slučaja:

a) područje djelovanja odabranih distribuiranih sila je konačno. Njihovo rezultirajuće djelovanje je odredjeno u nekom drugom dijelu proračuna i uvodi se u promatrani postupak.

b) područje djelovanja nekih distribuiranih sila je tako malo da za promatrani postupak nije bitna funkcija kojom su te sile odredjene, nego je dovoljno promatrati rezultirajuće djelovanje.

HWPK- 85- 58

Statika štapnog elementa

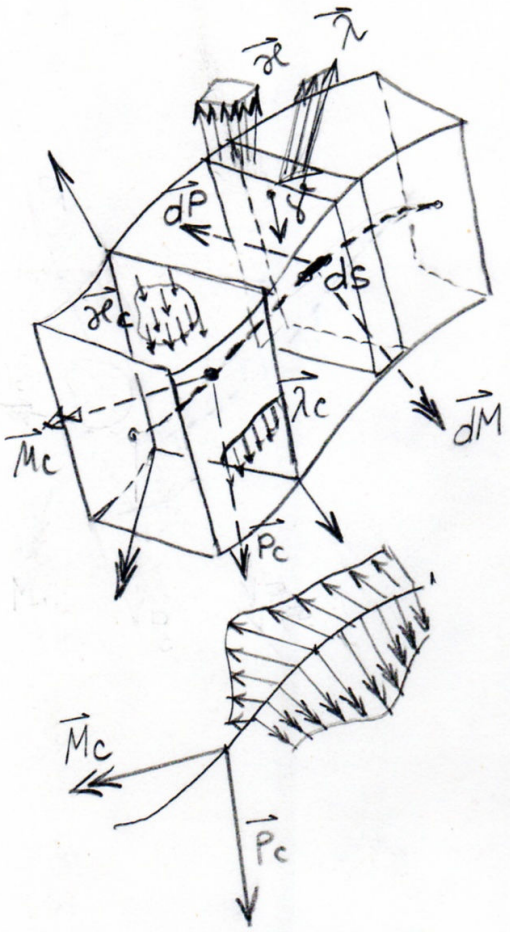
Štap je tijelo s istaknutom jednom dimenzijom. Preostale dvije dimenzije su bitno manje, ali nisu zanemarivo male. Uz štap se definira os, koja je u općem slučaju prostorna krivulja. Poprečna ravnina sadrži točku s krivulje i okomita je na tangentu u istoj točki krivulje. Os je pridružena štapu tako, da je svaka točka osi ujedno i težište presjeka štapa s pripadnom poprečnom ravninom. Dobiveni presjek se naziva poprečni presjek. Infinitezimalni element štapa je dio štapa izmedju dva neizmjerno bliska poprečna presjeka.

Prikazivanje sila koje djeluju na štap

Teoretskim i eksperimentalnim razmatranjima je dokazano, da se mehanička stanja štapova u mnogim slučajevima mogu zadovoljavajuće točno prikazati pomoću funkcija u kojima su varijable separirane, t. j. mehanička veličina definirana kao trodimenzionalna funkcija može se prikazati kao umnožak dvodimenzionalne funkcije definirane na poprečnom presjeku i jednodimenzionalne funkcije definirane na osi:

$$F(u,v,s) = F_1(u,v) \cdot F_2(s)$$

pri tome su u i v koordinate definirane na poprečnom presjeku.



Dio mehanike u kojem se proučavaju stanja prikazana pomoću takovih funkcija naziva se mehanika štapova, pa je unutarnje i statika štapova ili kako se često naziva štapna statika.

U štapnoj statici je pogodno sve sile koje djeluju na štap reducirati na os. U tom smislu postoje dvije mogućnosti:

a) koncentrirane sile i koncentrirani momenti, kao i sve plošne i linijske sile definirane na istom poprečnom presjeku, reduciraju se u jednu koncentriranu silu i moment u težištu presjeka, dakle na osi štapa.

Na skici je simbolički istaknut jedan presjek na koji djeluju sile $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ momenti $\vec{M}_1, \vec{M}_2$, te plošno djelovanje $\vec{\varkappa}_c$ i linijsko djelovanje $\vec{\lambda}_c$. Ta djelovanja mogu u principu biti i sile i momenti. Sve sile i moenti na taj presjek zamjenjuju se statički ekvivalentnom silom P_c i momentom M_c.

b) Linijske, plošne i volumenske sile koje djeluju izmedju dva konačno udaljena poprečna presjeka reduciraju se na linijsku silu koja djeluje na osi i linijski moment koji je definiran na osi. Postupak se provodi tako da se za svaki infinitezimalni element odredi rezultirajuće djelovanje dP i dM i dijeljenjem s ds uvede linijska sila $\vec{q}(s)$ i linijski moment $\vec{m}(s)$.

$$\vec{q}(s) = \frac{d\vec{P}}{ds} \qquad \vec{m}(s) = \frac{d\vec{M}}{ds}$$

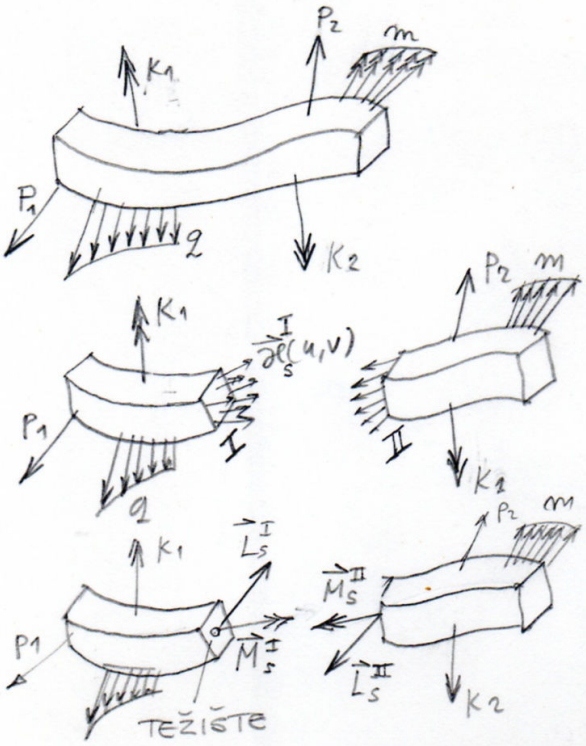
Na skici je volumenska sila označena s $\vec{\gamma}$, a linijska djelovanja s $\vec{\lambda}$. Plošna djelovanja su označena s $\vec{\varkappa}$. I linijska i plošna djelovanja mogu u principu biti sile i/ili momenti.

U postupcima štapne statike štap se simbolički prikazuje samo pomoću osi, dakle kao jedna linija. Kako se i sile reduciraju na liniju, a osnovni zadatak štapne statike je odredjivanje onog dijela funkcije mehaničkog stanja koja je definirana na liniji naziva se štapna statika još i statika linijskih sistema.

Unutarnje sile štapa

Unutarnje sile se u štapnoj statici promatraju samo duž poprečnih presjeka. Za svaki zamišljeni poprečni presjek uvodi se rezultirajuće djelovanje i tp tako, da rezultirajuća sila prolazi težištem poprečnog presjeka.

HWPE- 85- 59



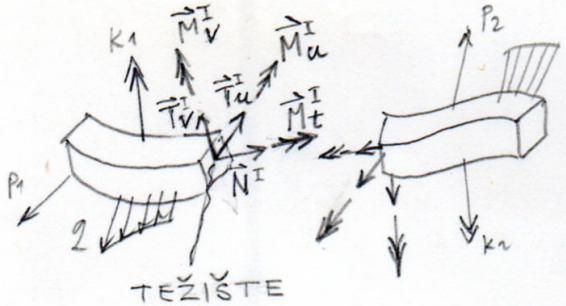
Promatra se štap koji se nalazi u ravnoteži. U zadanom poprečnom presjeku zamišljaju se dvije bliske ravne plohe, koje razdvajaju materiju štapa. Na skici su prikazane razmaknuto. Izmedju tih ploha djeluju unutarnje sile, koje se u kontinuumu prikazuju kao vektor ukupnog napona definiran u svakoj točki presjeka: $\vec{\mathcal{R}}_s^I(u,v)$ Pri tome treba definirati na koju od ploha uzpresjek ti ukupni naponi djeluju. Plohe će se označiti rimskim brojevima I i II, pomoću kojih će im se pridruživati potrebni objekti.

Umjesto unutarnjih sila, t.j. ukupnog napona uvesti će se za svaku plohu rezultirajuće djelovanje. Kako su naponi na odgovarajućim točkama plohe I i II suprotni, pojaviti će se i suprotna rezultirajuća djelovanja. Veza ukupnog napona i rezultirajućeg djelovanja je odredjena izrazima:

$$\vec{L}_s^I = \int_{F_s} \vec{\mathcal{R}}_s^I(u,v)\, dF \qquad \vec{M}_s^I = \int_{F_s} \vec{\ell}_T \times \vec{\mathcal{R}}_s^I(u,v)\, dF$$

u štapnoj statici rezultirajuća sila prolazi težištem poprečnog presjeka, dakle prolazi kroz os štapa. Djelovanje na drugu plohu uz presjek se odredjuje analogno, a biti će suprotno prvom djelovanju:

$$\vec{L}_s^{II} = -\vec{L}_s^I \; ; \qquad \vec{M}_s^{II} = -\vec{M}_s^I$$



U štapnoj statici se nadalje uvodi poseban način rastavljanja rezultirajućeg djelovanja na ko ponente, jer je pogodan za daljnje postupke. Uvodi se po jedna komponenta na normali na plohu uz presjek i po dvije u plohi uz presjek. Za te komponente se uvode posebne oznake i nazivi. $\vec{N}^I$ je vektor uzdužne sile, $\vec{T}_u^I$, $\vec{T}_v^{II}$ su vektori poprečnih ili transverzalnih sila, $\vec{M}_t^I$ je vektor torzionog momenta, a $\vec{M}_u^I$ $\vec{M}_v^I$ su vektori momenata savijanja ili fleksije. Pri korištenju tehničke notacije se riječ sila koristi i za silu kao vektor i za veličinu sile kao skalar. Obično skice i oznake dovoljno objašnjavaju situaciju, a takova nepreciznost nije bitna. Kod uočavanja zakonitosti vezanih za unutarnje sile pogodno je da se ta nepreciznost izbjegne, pa je u nazive uključena riječ "vektor". Prema tome će se naziv "uzdužna sila" odnositi na skalar; analogno će vrijediti i za ostale nazive komponenti.

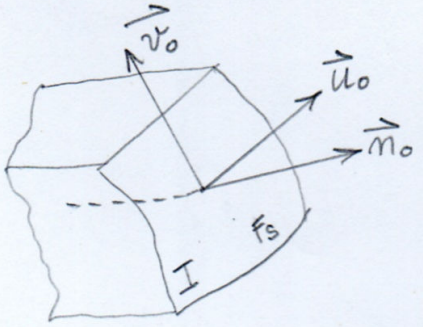
U vektorskoj algebri veza rezultirajućeg djelovanja i komponenti glasi:

$$\vec{L}_s^I = \vec{N}^I + \vec{T}_u^I + \vec{T}_v^I$$

$$\vec{M}_s^I = \vec{M}_t^I + \vec{M}_u^I + \vec{M}_v^I$$

HWPK - 85 - 60

Rješavanje te dekompozicije provesti će se u vektorskoj algebri. Odabiru se odgovarajući jedinični vektori; jedan okomit na plohu, a dva u ravnini plohe uz poprečni presjek. Okomiti vektor se obično usmjerava prema drugoj plohi, dakle kao vanjska normala.



Komponente se prikazuju kao umnošci jedničnih vektora s veličinama komponenti:

$$\vec{L}_S^I = N \cdot \vec{n}_o + T_u \cdot \vec{u}_o + T_v \cdot \vec{v}_o$$

$$\vec{M}_S^I = M_t \cdot \vec{n}_o + M_u \cdot \vec{u}_o + M_v \cdot \vec{v}_o$$

Skalarnim množenjem s jediničnim vektorima dobiva se:

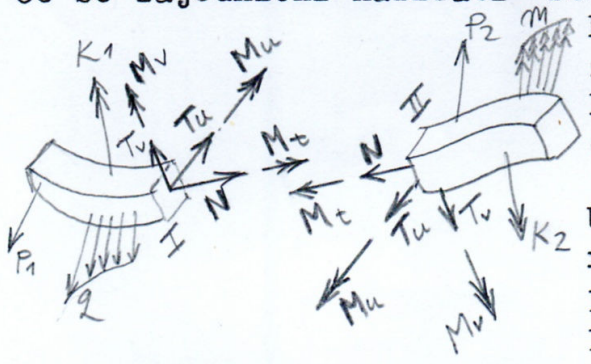
$$N = \vec{L}_S^I \cdot \vec{n}_o \qquad T_u = \vec{L}_S^I \cdot \vec{u}_o \qquad T_v = \vec{L}_S^I \cdot \vec{v}_o$$

$$M_t = \vec{M}_S^I \cdot \vec{n}_o \qquad M_u = \vec{M}_S^I \cdot \vec{u}_o \qquad M_v = \vec{M}_S^I \cdot \vec{v}_o$$

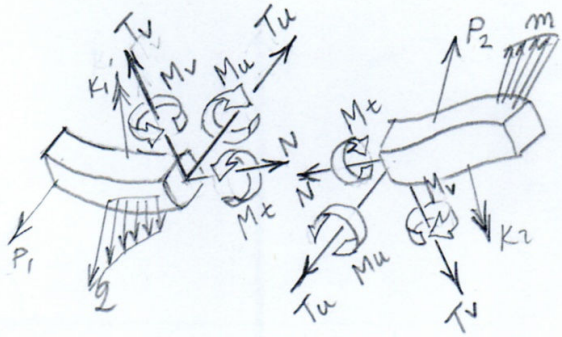
Ako se za dekompoziciju rezultirajućeg djelovanja na drugu plohu, uvedu upravo suprotni jedinični vektori, dobiti će se iste veličine komponenti. Postoje situacije u kojima se baze drugačije odabiru. Veličine komponenti imaju obavezne oznake i nazive:

N	je uzdužna ili aksijalna sila
T_u, T_v	su poprečne ili transverzalne sile
M_t	je moment uvijanja ili torzije
M_u, M_v	su momenti savijanja ili fleksije

Važno je u očiti da su $N, T_u, T_v, M_t, M_u, M_v$ skalari.
Sve veličine komponenti rezultirajućeg djelovanja unutarnjih sila će se zajednički nazivati "rezne sile".



Na skicama se rezne sile obično prikazuju u tehničkoj notaciji. Strijelice koje prikazuju komponete na plohi II obavezno su suprotne od strijelica koje prikazuju komponente na plohi I. U tehničkoj notaciji se, prema tome, rezne sile definiraju uz poprečni presjek. Pomoću iste veličine (skalara) prikazuju se komponente i za plohu I i za plohu II, svaka s odgovarajućom strijelicom.



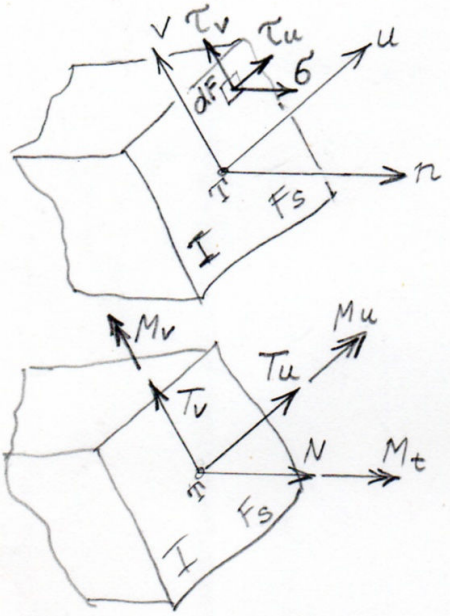
Radi boljeg predočavanja rezultirajućeg djelovanja reznih sila, mogu se koncentrirani momenti prikazati simbolima rotacije.

HWPK-85-61

Veza ukupnog napona i rezultirajućeg djelovanja unutarnjih sila već je prikazana vektorskim izrazima:

$$\vec{I}_S^{\,I} = \int_{F_S} \vec{\sigma}_S^{\,I}(u,v)\,dF; \qquad \vec{M}_S^{\,I} = \int_{F_S} \vec{l}_T \times \vec{\sigma}_S(u,v)\,dF$$

Tim izrazima odgovara šest skalarnih, koji se mogu dobti skalarnim množenjem s jediničnim vektorima neke baze . Pogodno je da se odabere upravo baza u kojoj su prikazane rezne sile. U tehničkoj notaciji se ne uvode izričito jedinični vektori, pa se definira odgovarajući koordinatni sustav n,uv, koji je vezan za odabranu plohu uz presjek. Ukupni napon se rastavlja na poznati način na komponente čije su veličine $\sigma(u,v)$, $\tau_u(u,v)$, $\tau_v(u,v)$. Time je određeno djelovanje unutarnjih sila u kontinuumu. Rezultirajuće djelovanje tih sila rasatavljeno je na komponete čije su veličine rezne sile. Uvjeti ekvivalencije glase:



Vektor ima početak u težištu, pa su u i v njegove koordinate.

$$N = \int_{F_S} \sigma(u,v)\,dF$$

$$T_u = \int_{F_S} \tau_u(u,v)\,dF \qquad T_v = \int_{F_S} \tau_v(u,v)\,dF$$

$$M_t = \int_{F_S} \left[u \cdot \tau_v(u,v) - v \cdot \tau_u(u,v)\right] dF$$

$$M_u = \int_{F_S} v \cdot \sigma(u,v)\,dF \qquad M_v = -\int_{F_S} u \cdot \sigma(u,v)\,dF$$

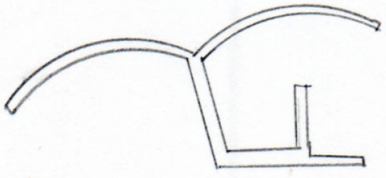
HWPR-85-62

Statičko rješenje štapa. Podjela prema obliku osi.

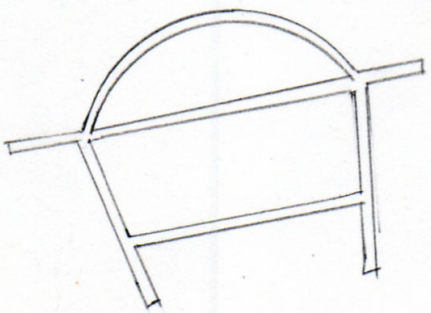
Statičko rješenje štapa se naziva odredjivanje reznih sila za sve poprečne presjeke štapa koji se nalaze u ravnoteži. Pri tome sve sile osim reznih moraju biti zadane.

Štapovi se prema obliku osi dijele na otvorene i zatvorene.

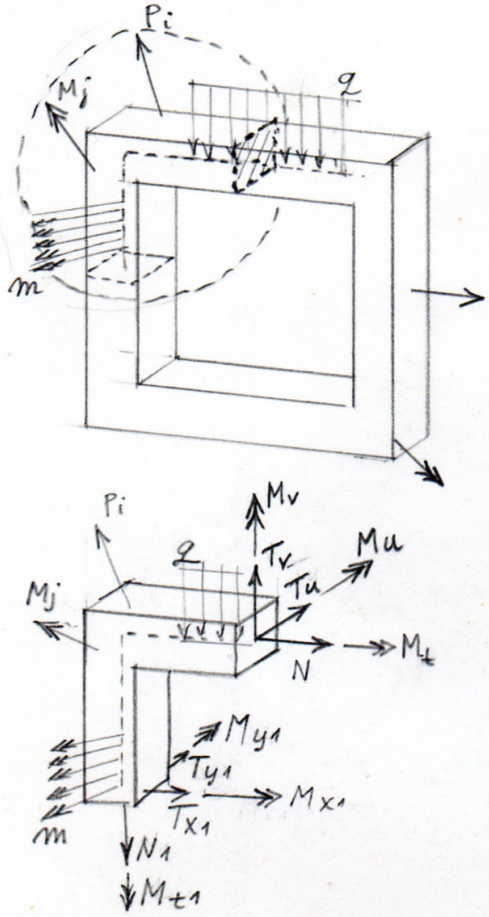
a) Štapovi s otvorenom osi ili odredjeni po obliku su oni čija se os jednim presjekom u bilo kojoj točki može razdvojiti na dva dijela. Kod njih se statičko rješenje može provesti isključivo iz uvjeta ravnoteže.



b) Štapovi sa zatvorenom osi ili preodredjeni po obliku (kaže se još i: neodredjeni, hiperstatički) su oni čija os nije otvorena, t.j ne može se u bilo kojoj točki jednim presjecanjem razdvojiti na dva dijela. Kod njih se statičko rješenje ne može provesti isključivo iz uvjeta ravnoteže. Zatvorena os može sadržavati i otvorene dijelove.



Odredjivanje reznih sila iz uvjeta ravnoteže



Zadan je štap koji se nalazi u ravnoteži. Treba odrediti rezne sile u zadanom presjeku. Iz štapa treba odabrati jedan dio tako, da zadani presjek odredjuje dio vanjske plohe tog dijela. Taj dio štapa će se nazivati promatrani dio i označiti će se ovdje sa I. Ako je štap zatvoren, mora se pri odredjivanju odabranog dijela uvesti barem još jedan presjek štapa. I taj će presjek biti poprečan, a rezne sile u njemu moraju biti poznate.
I kod otvorenih štapova može bti pogodno, da se promatrani dio odredi pomoću jednog daljnjeg presjeka u kojemu su rezne sile već poznate.
Na skici su rezne sile u tom presjeku označene dodatnim indeksom 1. I oznake smjerova su drugačije; u principu se za svaki presjek uvodi posebna baza. Zbog poteškoća s označavanjem, koriste se u praktičnim računima skraćene oznake, pa se npr. sve osi paralelne s x, tako označavaju. Razjašnjenje takovog pristupa mora osigurati dobra skica ili tekst.

Rezne sile se mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela, samo ako su sve preostale sile koje djeluju na taj dio poznate i svi preostali momenti.

Zadatak se svodi na uravnotežavanje tijela silom u težištu zadanog presjeka i momentom. Ta sila i moment su rezultirajuće djelovanje unutarnjih sila koje djeluju na plohu uz zadani presjek; $\vec{L}_s^I$ i $\vec{M}_s^I$. Iz uvjeta ravnoteže se dobiva:

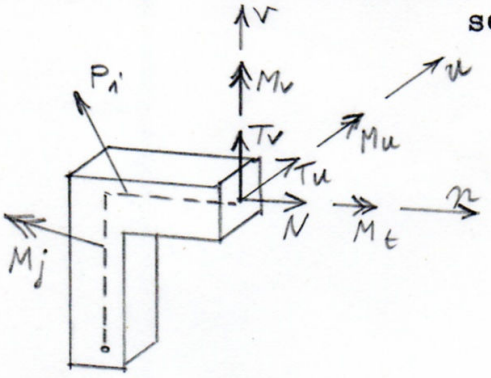
$$\vec{L}_s = -\left[\int_{L^I} \vec{q}(s)\,ds + \sum_{i^I} \vec{P}_i\right]$$

$$\vec{M}_s = -\left[\int_{L^I} \vec{\ell}_T \times \vec{q}(s)\,ds + \int_{L^I} \vec{m}(s)\,ds + \sum_{i^I} \vec{\ell}_{Ti} \times \vec{P}_i + \sum_{j^I} \vec{M}_j\right]$$

Odabrana je kombinirana formulacija uvjeta ravnoteže, jer se u praktičnim situacijama najviše pojavljuje. Pri tome je s L^I označen dio osi promatranog dijela štapa, a i^I i j^I simbolički označavaju, da se u sumama pojavljuju samo koncentrirane sile i koncentrirani momenti s promatranog dijela. U ta koncentrirana djelovanja su uključena i poznata rezultirajuća djelovanja u svim daljnjim presjecima koji čine vanjsku plohu promatranog dijela. Rezne sile se iz rezultirajuće sile i momenta odredjuju na poznati način; skalarnim množenjem s jedniničnim vektorima. Ti vektori nisu uneseni na skicu.

HWPK-85-63

Cijeli prikazani postupak se može provesti u pogodnom koordinatnom sistemu. Sile, momenti i jednični vektori prikazati će se pomoću projekcija na odabrane osi.
Druga je mogućnost, da se postupak provede u koordinatnom sistemu n,u,v vezanom za zadanu plohu uz presjek. Sva djelovanja na promatrani dio moraju se projicirati na osi n,u,v. Sa n,u,v će se označiti i koordinate hvatišta sila u tom sustavu. Iz uvjeta ravnoteže se dobiva:



$$N = -\sum_{i\,I} P_{ni} \qquad T_u = -\sum_{i\,I} P_{ui} \qquad T_v = -\sum_{i\,I} P_{vi}$$

$$M_t = -\left[\sum_{i\,I} u_i P_{vi} - v_i P_{ui} + \sum_{j\,I} M_{nj}\right]$$

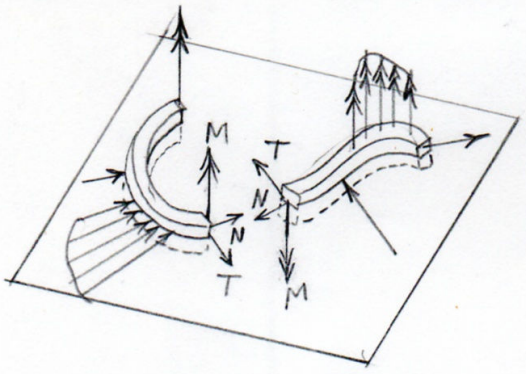
$$M_u = -\left[\sum_{i\,I} v_i P_{ni} - n_i P_{vi} + \sum_{j\,I} M_{uj}\right]$$

$$M_v = -\left[\sum_{i\,I} n_i P_{ui} - u_i P_{ni} + \sum_{j\,I} M_{vj}\right]$$

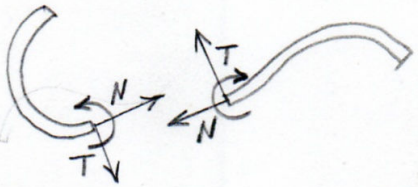
Uvedena su samo koncentrirana djelovanja na promatrani dio, što znači da su distribuirana djelovanja zamijenjena rezultirajućim djelovanjima.
U praktičnom računu se sile često rastavljaju na komponente s pozitivnim veličinama. Opći izrazi za momente oko osi su ranije uvedeni.

HWPE- 85- 64

Rezne sile ravnih štapova na koje djeluju sile u ravnini i okomiti momenti.



Štap je ravan ako njegova os leži u ravnini i sva mehanička svojstva tog štapa su simetrična na istu ravninu.
Ako na ravni štap djeluju samo sile u njegovoj ravnini i momenti okomiti na tu ravninu, biti će različite od nule sano odgovarajuće komponente rezultirajućeg djelovanja unutarnjih sila. Te će se veličine označavati s M,N,T.

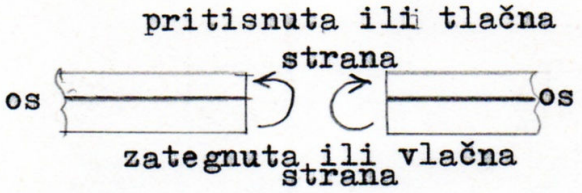


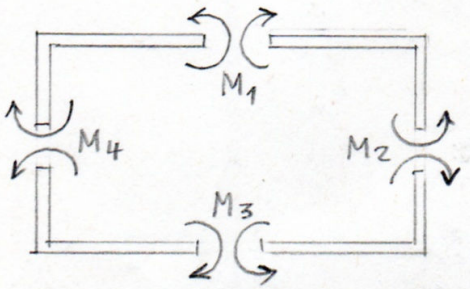
Ravni štapovi se prikazuju na ravninama paralelnim s njihovom ravninom, a momenti se prikazuju simbolima vrtnje, kao u statici tijela na koje djeluju sile u ravnini.

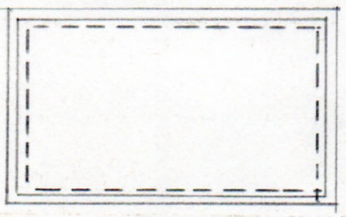
Konvencija predznaka reznih sila u ravnini

Za prikazivanje uzdužne sile koristi se vanjska normala (može se reći "zatezanje je pozitivno" ili "vlak plus"), a za poprečnu se koristi strijelica dobivena iz vanjske normale rotacijom za 90° u smislu vrtnje kazaljke na satu, t.j. za negativni kut od 90°.
Ili: strijelice uz T i N čine desni koordinatni sustav. Treba uočiti da T leži na normali na os, a ne na tangenti na os na što bi slovo T moglo navesti. T leži u poprečnoj ili transverzalnoj ravnini koja odredjuje poprečni presjek, a N odgovara normali na presjek.

Konvencija za poprečnu i uzdužnu silu vrijedi dakako za obje plohe uz presjek; strijelica uzdužne sile za jednu plohu suprotna je od one za drugu plohu, isto vrijedi i za poprečnu silu.
Za prikazivanje momenta savijanja ne može se uvesti analogna konvencija. Za opisivanje konvencije predznaka za moment savijanja treba uočiti, da se pri djelovanju momenta savijanja na plohu uz presjek može ustanoviti pritisnuta ili tlačna i zategnuta ili vlačna strana štapa. Kod usvojenog prikazivanja momenta savijanja s dva suprotna simbola vrtnje; po jedan uz svaku plohu, zategnuta strana je jednaka za obje plohe. Isto vrijedi i za pritisnutu stranu.







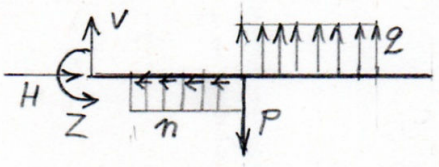
Izbor simbola vrtnje uz momente savijanja može se jednoznačno opisati pomoću tih pojmova.

Obično se za elemente štapova, koji su na skici horizontalni, odabire zatezanje na donjoj strani kao pozitivno. Prema tome će pozitivni moment savijanja u tom slučaju značiti zatezanje na donjoj strani, a pritisak na gornjoj.

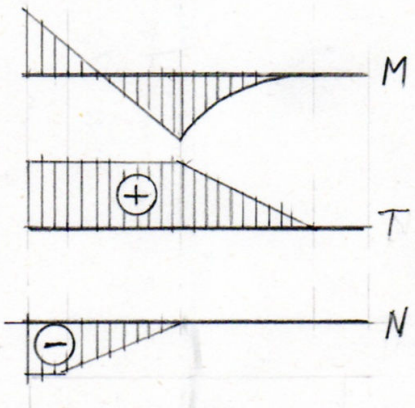
Kod zatvorenih okvira ili prstenova često se za pozitivni moment savijanja odabire zatezanje na unutarnjoj strani. Izbor treba objasniti skicama presjeka. Postoji način da se strana štapa na kojoj pozitivni momenti izazivaju zatezanje istakne grafički; npr. crtkanom linijom uz os. Kako to nije opće prihvaćeno, treba takav simbol posebno objasniti.

HWPK - 85 - 65

Dijagrami reznih sila



Rezne sile se mogu prikazati analitički kao funkcije položaja na osi ili grafički pomoću dijagrama. Crtaju se zasebno za M,N,T. Svaki dijagram sadrži sliku osi u odabranom mjerilu položaja. Okomito na os se nanose ordinate u mjerilu ordinata. Polja istog predznaka se kod T i N dijagrama označavaju grafičkim simbolom, pri tome strana nanošenja nije uvijek odredjena: kod horizontalnih je plus gore, kod vertikalnih je plus lijevo, a kosi i zaobljeni elementi se pokušavaju prikladno uklopiti.

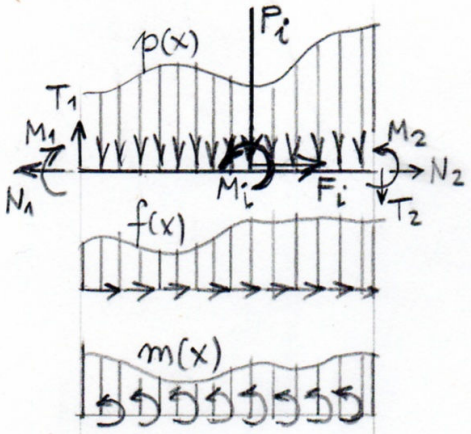


Ordinate momenta savijanja se crtaju na zategnutu stranu bez oznake predznaka.
Kako postoje izvori u kojima se upravo koristi tlačna strana, treba izabranu kon-

venciju navesti u proračunu.
pri crtanju dijagrama se za os štapa izabire deblja linija, za liniju koja spaja ordinate srednja linija. Dijagram se šrafira tankim linijama okomitim na os.

Dijagrami reznih sila na štapu kojemu je os dužina

Općenito

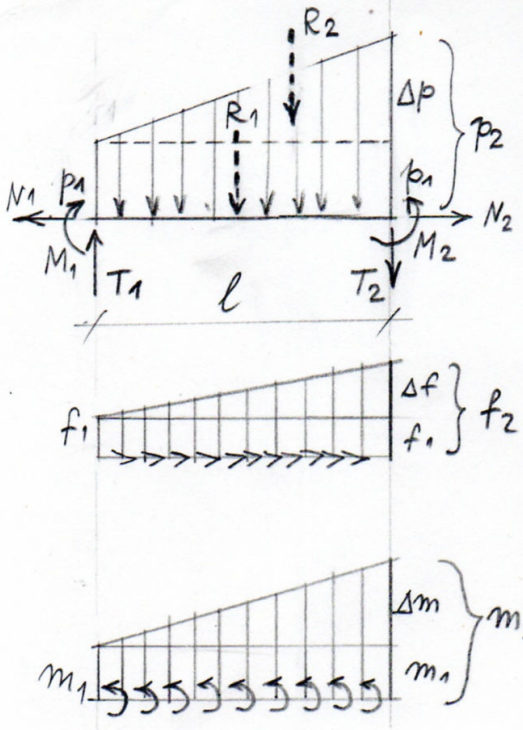


Promatra se štap koji se nalazi u ravnoteži. Na štap djeluju proizvoljne linijske sile, koje se mogu prikazati s dva polja linijskih sila na paralelnim pravcima; poprečno na os s intenzitetom $p(x)$ i na osi, s intenzitetom $f(x)$. Osim toga djeluju i distribuirani momenti $m(x)$. Na štap djeluje i konačni broj koncentriranih djelovanja. Sile F_i djeluju upravo na osi, ali su radi preglednosti ucrtane pored osi. Dijagram intenziteta poprečnih distribuiranih sila je ucrtan uz štap, dok su preostala dva zbog preglednosti prikazani na paralelama s osi.

Posebno su istaknuta djelovanja na krajevima štapa i označena indeksima 1 i 2. Smisao tih djelovanja može bti dvojak: ako je kraj štapa vanjska ploha onda su to vanjska djelovanja na tu plohu, a ako je kraj zamišljena ploha uz presjek, onda su to rezultirajuća djelovanja unutarnjih sila. Za tok reznih sila na štapu nije bitno o kojem se slučaju radi, jer se sva djelovanja reduciraju na os. Za odredjivanje toka reznih sila, treba promatrati neki presjek na štapu i za odabrani dio postaviti uvjete ravnoteže.

HWPK- 85- 66

b) Djelovanje linearno promjenjivih linijskih sila i momenata



Promatra se specijalni slučaj kada su $p(x)$, $f(x)$, $m(x)$ linearni i prema tome odredjeni rubnim intenzitetima, koji će se označavati indeksima 1 i 2. Pri postavljanju izraza rastaviti će se ta djelovanja na dva: konstantno s intenzitetom kraja 1, i linearno, koje na kraju 1 iščezavaju na kraju 2 imaju intenzitet, npr. Δp. Za svako od tih djelovanja se lako odredjuje rezultanta, npr za konstantno poprečno $R_1 = p_1 \cdot \ell$, a za trokutno $R_2 = \Delta p \cdot \frac{\ell}{2}$.

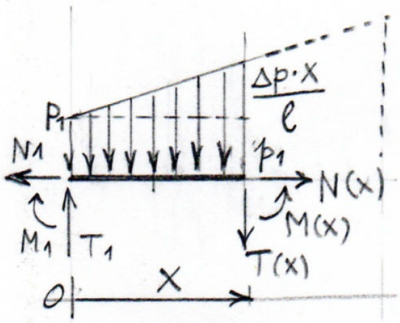
Pretpostaviti će se da su zadana distribuirana djelovanja i koncentrirana djelovanja na kraju 1. Iz uvjeta ravnoteže će se odrediti djelovanja na kraju 2.

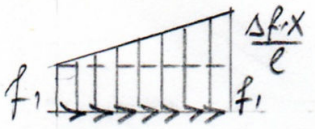
Iz sume momenata na točku 2 direktno se odredjuje M_2, a iz odgovarajućih suma projekcija se odredjuju T_2 i N_2.

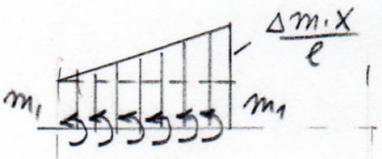
$$M_2 = M_1 + T_1 \cdot l - \frac{p_1 l^2}{2} - \frac{\Delta p \cdot l^2}{6} - m_1 l - \frac{\Delta m \cdot l}{2}$$

$$T_2 = T_1 - p \cdot l - \frac{\Delta p \cdot l}{2}$$

$$N_2 = N_1 - f \cdot l - \frac{\Delta f \cdot l}{2}$$







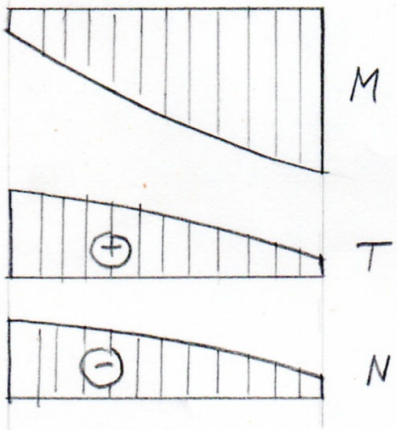
Za analitički prikaz reznih sila, promatra se proizvoljni presjek čija je udaljenost od kraja l jednaka x. Intenzitet linearnog dijela distribuiranog djelovanja odredjuje se pomoću sličnosti trokuta.
Statički je ovaj zadatak analogan prethodnome: iz uvjeta ravnoteže se odredjuju dvije sile i moment, pa se odgovarajućim uvrštavanjem dobivaju izrazi za rezne sile kao funkcije apscise x.

$$M(x) = M_1 + T_1 \cdot x - \frac{p_1 x^2}{2} - \frac{\Delta p x^3}{6l} - m_1 x - \frac{\Delta m x^2}{2l}$$

$$T(x) = T_1 - p \cdot x - \frac{\Delta p \cdot x^2}{2l}$$

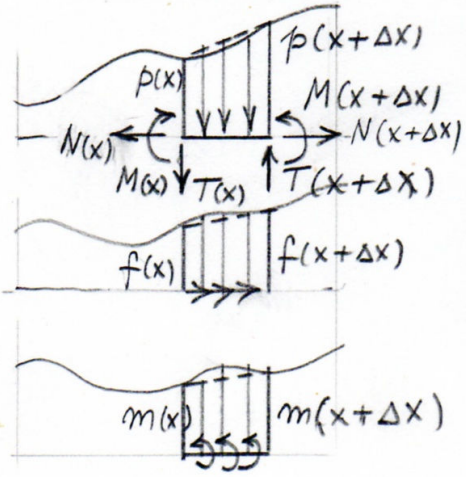
$$N(x) = N_1 - f \cdot x - \frac{\Delta f \cdot x^2}{2l}$$

Prikazani slučaj obuhvaća većinu situacija koje se pojavljuju u proračunu konstrukcija.
Dijagrami reznih sila su prikazani kvalitativno.



HWPK-85-67

c) Diferencijalne veze reznih i vanjskih sila



Promatra se opći slučaj distribuiranih djelovanja opisan pod a). Zamišlja se da je iz štapa izdvojen dio izmedju presjeka x i $x+\Delta x$. Na tom dijelu će se funkcije intenziteta distribuiranih sila približno prikazati lineranim funkcijama, pa će vrijediti izrazi iz b) uz odgovarajuće uvrštavanje.

$$M(x+\Delta x) = M(x) + \left[T(x) - \frac{m(x)+m(x+\Delta x)}{2}\right]\cdot\Delta x - \left[\frac{p(x)}{3} + \frac{p(x+\Delta x)}{6}\right]\cdot\Delta x^2$$

$$T(x+\Delta x) = T(x) - \frac{p(x)+p(x+\Delta x)}{2}\cdot\Delta x$$

$$N(x+\Delta x) = N(x) - \frac{f(x)+f(x+\Delta x)}{2}\cdot\Delta x$$

Pomoću ovih izraza se zadovoljavajućom točnosti može riješiti slučaj proizvoljnog distribuiranog djelovanja. Dakako treba odabrati pogodne razmake Δx, te rekurzivno, od 1 prema 2 odrediti rezne sile u medjupresjecima.

Ako se promatraju limesi omjera prirasta funkcija i prirasta apscise, dobivaju se diferencijalne jednadžbe koje povezuju rezne i vanjske distribuirane sile za štap čija je os dužina. Na limesu srednja vrijednost intenziteta prelazi u intenzitet u točki x.

$$\frac{dM}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{M(x+\Delta x)-M(x)}{\Delta x} = T(x) - m(x)$$

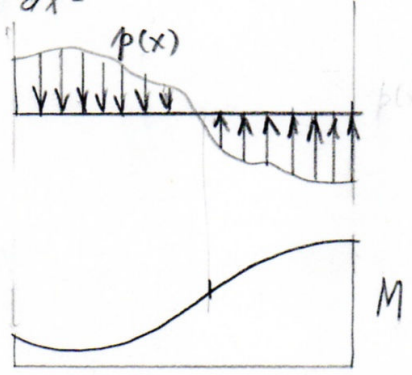
$$\frac{dT}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{T(x+\Delta x)-T(x)}{\Delta x} = -p(x)$$

$$\frac{dN}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{N(x+\Delta x)-N(x)}{\Delta x} = -f(x)$$

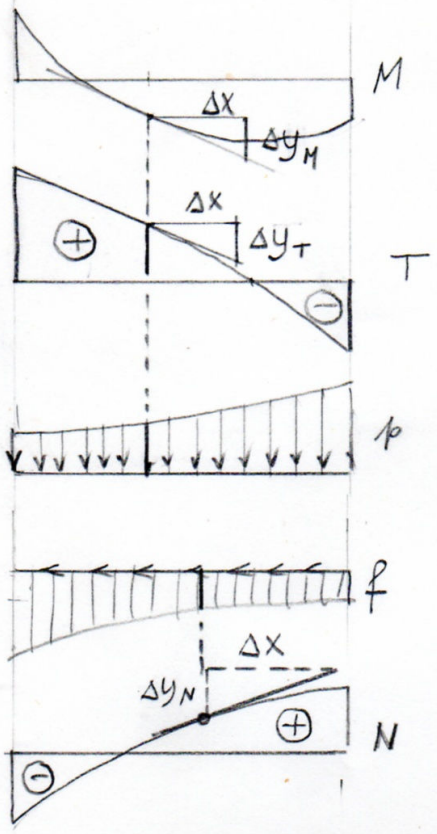
HWPK- 85- 68

Rješavanjem tog jednostavnog sistema jednadžbi mogu se za velik broj funkcija intenziteta distribuiranih djelovanja odrediti rezne sile.
Direktno se može zaključiti: ako iščezavaju za cijeli štap distribuirana djelovanja, poprečna i uzdužna sila su konstante, a moment savijanja je linearno promjenjiv. Specijalno; ako poprečna sila identično iščezava, moment savijanja je konstantan.
Distribuirani momenti se rijetko pojavljuju, pa se često opći zaključci izvode uz prešutnu pretpostavku da $m(x)$ identično iščezava.
U tom slučaju se deriviranjem prve jednadžbe i pribrajanjem druge dobiva veza momenta savijanja i poprečne distribuirane sile:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p(x)$$



U izrazu za zakrivljenost neke krivulje pojavljuje se u brojniku samo druga derivacija, pa se već i nju samu može shvatiti kao mjeru odstupanja od pravca.
Može se zaključiti da je odstupanje od pravca momentnog dijagrama proporcionalno intenzitetu poprečnih linijskih sila, a zakrivljenost je konveksna u odnosu na smjer linijskih sila. Pri tome nije bitno na kojoj su strani štapa ordinate momenta.



Za opisivanje daljnjih geometrijskih zakonitosti dijagrama reznih sila, treba uvesti pojam nagiba pravca kao omjera prirasta ordinate i apscise. U slučaju pravokutnog koordinatnog sustava, ovako definiran nagib je tangens kuta što ga pravac zatvara s osi x.

Nagib tangente momentnog dijagrama jednak je poprečnoj sili:

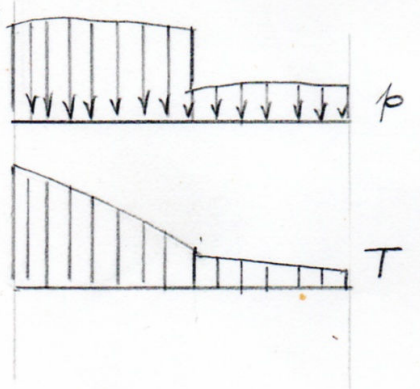
$$\frac{\Delta y_{M(x)}}{\Delta x} = T(x)$$

Nagib tangente dijagrama poprečnih sila jednak je negativnom intenzitetu poprečnih linijskih sila:

$$\frac{\Delta y_{T(x)}}{\Delta x} = -p(x)$$

Nagib tangente dijagrama uzdužnih sila jednak je negativnom intenzitetu uzdužnih linijskih sila

$$\frac{\Delta y_{N(x)}}{\Delta x} = -f(x)$$

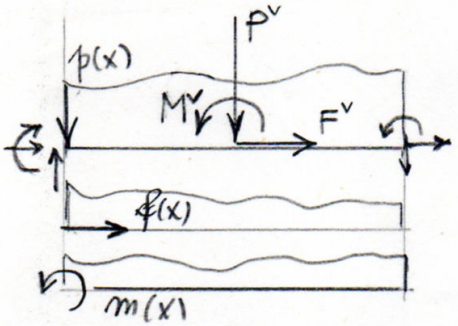


Funkcije vanjskih linijskih djelovanja su često u konačnom broju točaka prekinu e; diskontinuirane, takovo mjesto će se zbog jednostavnosti nazvati "skok".

Intenziteti su proporcionalni nagibu tangente odgovarajućeg dijagrama rezne sile, pa će u toj točki nastati prekid u nagibu tangente; jedna će tangenta odgovarati limesu uz porast apscise, a druga limesu uz smanjivanje apscise. Takvo mjesto će se zbog jednostavnosti nazivati "lom". To vrijedi za odnos p i T, za odnos f i N, pa dakako i za odmos (x) i M(x)

HWPK-85-69

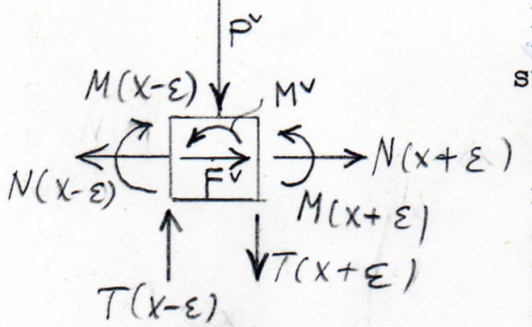
d) Djelovanje vanjskih koncentriranih sila i momenata



Vanjska koncentrirana djelovanja se rastavljaju u skladu s geometrijom štapa. Zbog mogućnosti nesporazuma nazivati će se ta djelovanja: vanjska sila okomita na os, vanjska sila paralelna s osi i vanjski moment.

Utjecaj koncentriranih djelovanja na tok reznih sila dobiva se promatranjem infinitezimalnog elementa štapa koji sadrži hvatišta.

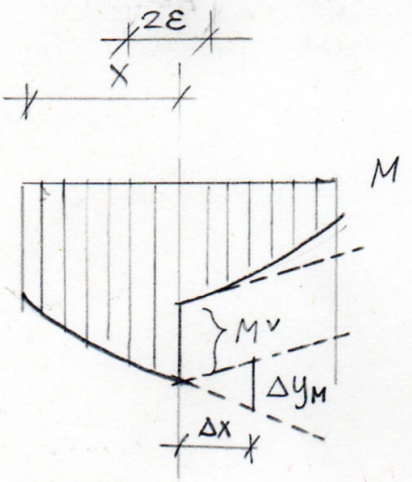
Doprinos distribuiranih djelovanja čija su intenziteti konačni iščezava, jer se intenziteti množe sa 2ε koji na graničnom prijelazu iščezava. U samoj točki x funkcije nisu definirane, definirane su samo vrijednosti uz točku. Ako se pretpostavi da su vrijednosti u $X-\Delta X$ zadane slijedi iz uvjeta ravnoteže:



$$M(x+\varepsilon) = M(x-\varepsilon) - M^v$$

$$T(x+\varepsilon) = T(x-\varepsilon) - P^v$$

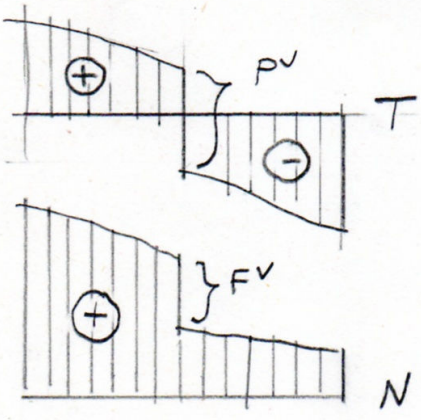
$$N(x+\varepsilon) = N(x-\varepsilon) - F^v$$



Vanjska koncentrirana djelovanja izazivaju "skok" u dijagramu odgovarajuće rezne sile.

Koncentrirani moment izaziva skok u dijagramu momenata savijanja.

Vanjska sila okomita na os izaziva skok u dijagramu poprečnih sila i lom u dijagramu momenata savijanja. Poprečna sila je proporcionalna nagibu tangente dijagrama momenta savijanja pa se na mjestu skoka poprečne sile javljaju dvije tangente u dijagramu momenata savijanja t.j. lom.



Vanjska koncentrirana sila paralelna s osi izaziva samo skok u dijagramu uzdužnih sila.

Opisanu zakonitost ne treba povezivati s predznakom kod T ili N, odnosno sa stranom nanošenja kod M.

Veličina loma tangente od vanjske sile okomite na os je $\frac{\Delta y_M}{\Delta x} = -P^v$ a kut loma odgovara stvarnom smjeru sile koja ga izaziva.

HWPK-85-70

Analiza reznih sila kao funkcija definiranih na osi

Analizom toka reznih sila treba odrediti dovoljno podataka za opisivanje funkcije, koja se može prikazati analitički, tabelarno ili grafički, t.j. dijagramima.
Funkcije reznih sila mogu sadržavati konačni broj diskontinuiteta, pa se analiza započinje ustanovljavanjem mjesta diskontinuiteta. Na taj se način ustanovljavaju područja unutar kojih je funkcija kontinuirana; neprekinuta, pa ju untar tih područja treba odrediti

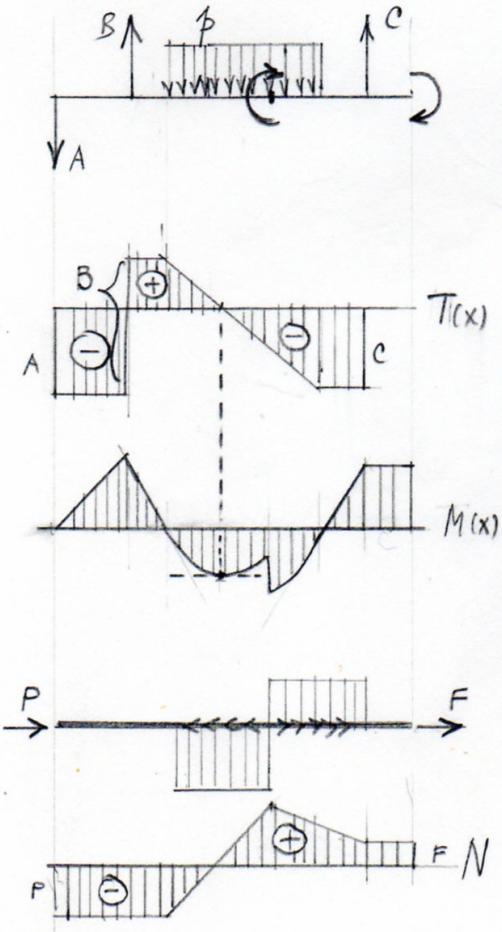
Pri analitičkom odredjivanju treba postaviti izraze za funkcije. Primjeri za analitičko odredjivanje su prikazani.

Ako je funkcija neprikladna za analitičko odredjivanje, može se za dovoljni broj točaka na osi izračunati vrijednosti. Takav se prikaz naziva tabelarni prikaz.

Za grafički prikaz t.j. crtanje dijagrama treba odrediti podatke za crtanje. Vrsta funkcije je odredjena diferencijalnim odnosima a prema vrsti će se odrediti način crtanja. Osnovni primjeri su:

a) derivacija funkcije iščezava, funkcija je konstanta, treba odrediti jednu ordinatu za cijelo područje
b) derivacija funkcije je konstanta, funkcija je linerna, treba odrediti ordinate na krajevima područja.
c) derivacija je linearna funkcija, funkcija je polinom drugog stupnja, graf je kvadratna parabola odredjena npr.s tri točke; obično se odabiru ordinate na krajevima i jedna u sredini.
d) derivacija je kvadratna, funkcija je kubična, potrebna su četiri podatka, obično ordinate kao za c) i jedna tangenta.

HWPK-85-71



Analiza toka sadrži odredjivanje lokalnih ekstrema, koji mogu biti dvojaki:

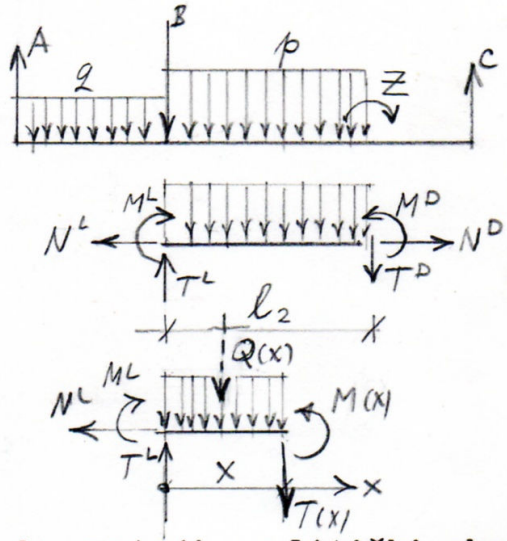
a) ordinate uz diskontinuitete, t.j. na rubovima područja.

b) analitički ekstremi unutar područja; oni se nalaze na mjestima iščezavanja prve derivacije.

Lokalni ekstremi poprečne sile nalaziti će se na presjecima uz vanjske sile okomite na os i na mjestima iščezavanja linijske sile okomite na os;

Lokalni ekstremi momenta savijanja na štapovima na koje ne djeluju distribuirani momenti, nalaziti će se na presjecima uz koncentrirane momente i na presjecima u kojima poprečna sila mijenja predznak

Lokalnie ekstremi uzdužne sile nalaziti će se na presjecima uz vanjske sile paralelne s osi i na mjestima iščezavanja linijske sile paralelne s osi.



Slučaj odredjivanja analitičkog ekstrema momenta savijanja uz konstantnu poprečnu linijsku silu se često pojavljuje pa će se detaljnije prikazati.

Promatra se dio štapa označen s l_2, na kojemu su rezne sile kontinuirane. Presjek L se nalazi desno od koncentrirane sile B, a presjek D se nalazi lijevo od koncentriranog momenta Z. Rezne sile u ta dva krajnja presjeka su već odredjene. Ako su predznaci od T^L i T^D različiti, t.j. ako vrijedi $T^L \cdot T^D < \phi$ onda postoji analitički ekstrem momenta savijanja unutar l_2.
U presjeku L će se odabrati ishodište pomoćne koordinatne osi x. Položaj presjeka u kojemu se pojavljuje ekstrem odredjen je s x.
Poprečna sila u presjeku x će biti $T(x) = T^L - p \cdot X$
Iz uvjeta iščezavanja poprečne sile koja je u ovom slučaju derivacija momenta savijanja, dobiva se izraz za x:

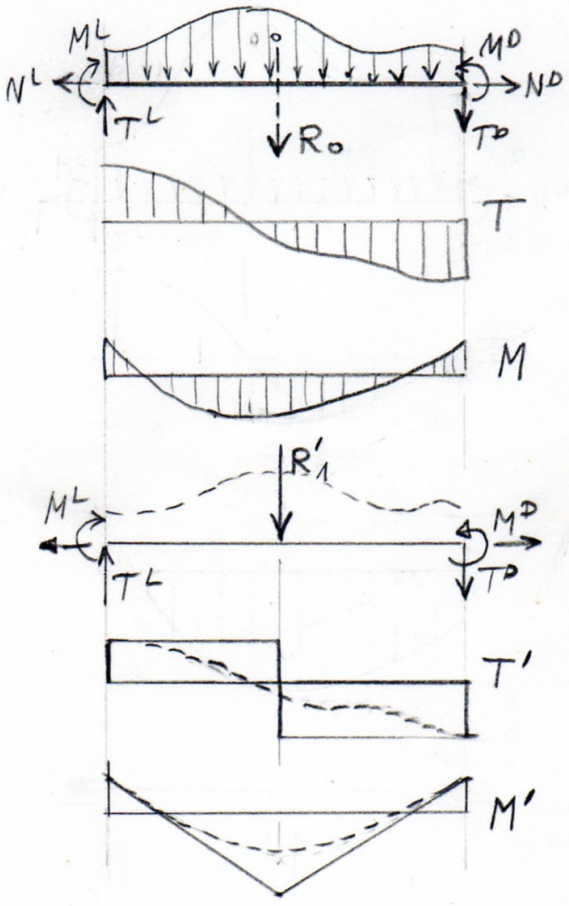
$$X = \frac{T^L}{p}$$

Znači da će rezultanta linijskih sila na dijelu x biti upravo po veličini jednaka poprečnoj sili T^L; $Q(x) = T^L$
Kako T(x) iščezava, na dio x djeluju samo dva koncentrirana momenta i spreg T^L, $Q(x)$ pa se moment M(x) može odrediti prema:

$$M(x) = M^L + \frac{x}{2} \cdot T^L = M^L + \frac{(T^L)^2}{2p}$$

HWPK-85-72

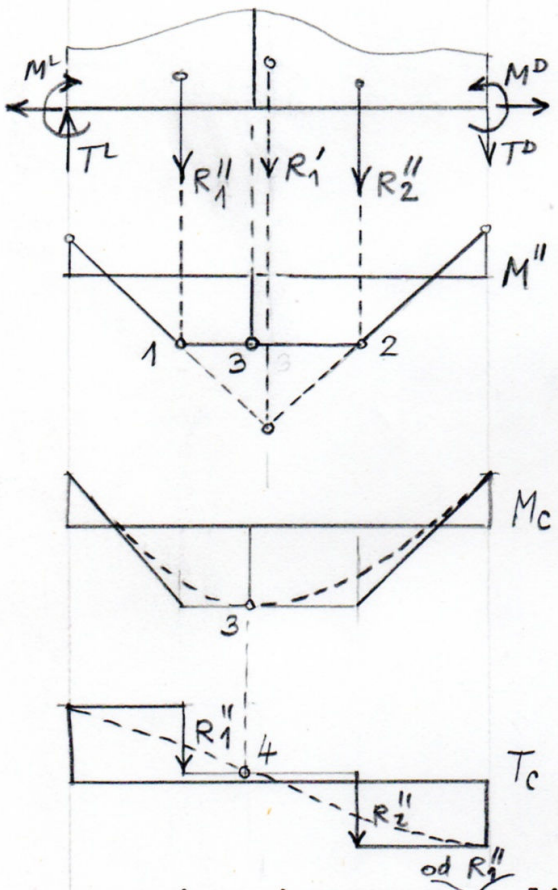
Grafička konstrukcija dijagrama reznih sila



Promatra se konačni dio štapa na koji djeluje poprečna linijska sila istog smjera. Dio je u ravnoteži i rezne sile na krajevima su poznate; poznat je i tok reznih sila za cijeli dio štapa. Linijska sila je istog smjera, pa postoji rezultanta. Rezultanta prolazi težištem linijskih sila, a ono je odredjeno projekcijom težišta dijagrama intenziteta na os štapa. U ovom specijalnom slučaju rezultanta prolazi i težištem dijagrama.

Promatrati će se isti dio štapa, ali će se zamisliti da na njega djaluje samo rezultanta kao vanjska koncentrirana sila i odrediti će se statičko rješenje. Kako je rezultanta statički ekvivalentna zadanoj linijskoj sili biti će rezne sile na krajevima dijela štapa u ovom slučaju jednake onima za linijsku silu. U svim drugim točka-

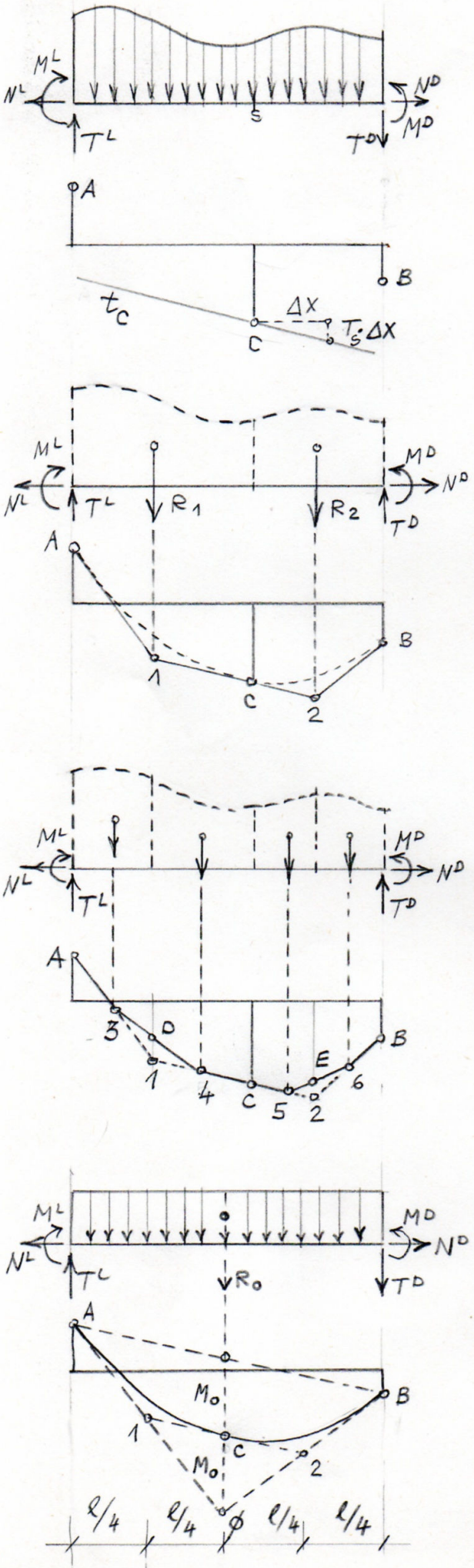
ma će se ordinate razlikovati. Pri djelovanju jedne koncentrirane vanjske sile na dio štapa, dijagram poprečnih sila će imati dva konstantna područja i skok na mjestu sile (skica T´ puna linija). Dijagram momenata savijanja će imati dva linearna područja i lom na mjestu sile (skica M´ puna linija).
Oba dijagrama od koncentrirane sile će sa dijagramima od linijske sile imati zajedničke ordinate na krajevima, a dijagrami momenata savijanja i zajedničke tangente na krajevima. Nagib tangente je jednak poprečnoj sili, a poprečen sile na krajevima su za oba slučaja jednake.



Pokazana zakonitost se može iskoristiti za grafičko odredjivanje ordinata i pripadnih tangenata. Razlikovati će se dvija varijante postupka.

a) Rezne sile nisu poznate ni za jedan presjek izmedju krajnjih. Odredjuje se mjesto rezultante linijskih sila i momentni dijagram kao da djeluje samo rezultanta. Time su dobivene krajnje tangente. U slijedećoj fazi se uvodi podjela distribuiranog djelovanja u nekom pogodnom presjeku. Dobivena su dva područja i za svako se odredjuje rezultanta, to su: R_1'' i R_2''. I ovaj slučaj je statički ekvivalentan zadanoj linijskoj sili, pa će ordinate i tangente na krajevima momentnog dijagrama biti jednake. Zbog toga dijagram za dvije sile ne treba proračunavati: na mjestima sila moraju se nalaziti lomovi u dijagramu, a to su mjesta gdje prestaju vrijediti rubne tangente. Ako se ordinate crtaju paralelno s silama, presjecanjem pravca s lijevom rubnom tangentom dobiva se točka loma, označena na skici s 1. Presjecanjem pravca sile R_2'' s desnom rubnom tangentom dobiva se druga točka loma, označena na skici s 2. Izmedju tih točaka je moment savijanja odredjen spojnicom točaka 1 i 2. Uvedena podjela pretstavlja krajnji presjek za lijevo i desno područje. U krajnjim presjecima se rezne sile od rezultante poklapaju s reznim silama od linijske sile; a mjesto podjele je krajnji presjek za oba područja dobivena podjelom. Zbog toga će ordinata pravca kroz 1 i 2 na mjestu podjele biti točna vrijednost momenta savijanja za linijsku silu (točka 3). Pravac kroz 1 i 2 je tangenta momenta savijanja za linijsku silu (M_c). Dijagram poprečnih sila za rezultante R_1'' i R_2'' je stepenasta linija (puna linija na skici T_c). I u ovom slučaju vrijedi da se na mjestu podjele ordinate dijagrama za rezultante poklapaju s ordinatama dijagrama za linijsku silu, pa je na taj način grafički konstruirana ordinata dijagrama poprečnih sila.
U praktičnom postupku se mjesto podjele odabire u težištu . Daljnjim podjelama područja može se konstruirati potrebni broj ordinata.

HWPK-85-73



b) Rezne sile su poznate za jedan presjek unutar promatranog dijela štapa.

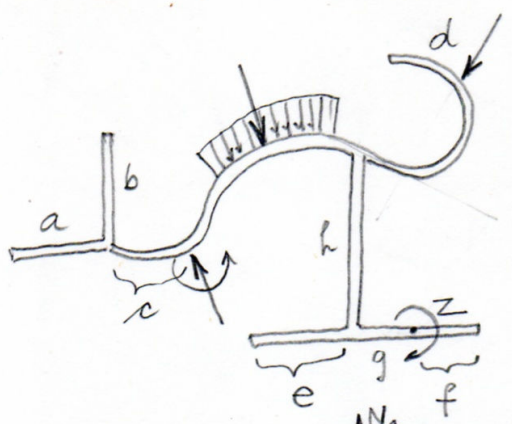
Razlika prema prethodnom postupku pojaviti će se samo pri konstrukciji dijagrama momenata savijanja. Presjek u kojemu su poznate rezne sile je na skici označen s S. Ordinata momenta savijanja je za taj presjek nanesena i tako je dobivena točka C. U toj točki se može konstruirati tangenta na momentni dijagram, jer je poznata poprečna sila koja je jednaka nagibu tangente. Nanijeti će se pogodno odabrani ΔX, paralelno s osi apscise i iz dobivene točke nanijeti po ordinati: $T_s \cdot \Delta X$

Za linijske sile na području L-S će se odrediti rezultanta (na skici R_1). I za linijske sile na području S-D će se odrediti rezultanta (R_2). Dijagram momenata savijanja za te dvije sile odredjuje se grafički. Na pravcima R_1 i R_2 se moraju nalaziti lomovi momentne linije, pa se presjecanjem tih pravaca s tangentom t_c dobivaju točke loma: 1 i 2. Nanošenjem poznatih momenata na krajevima odredjene su točke A i B, a spojnice s lomovima odredjuju rubne tangente. U slijedečem koraku se promatraju četiri područja i odredjuju pravci rezultanti pripadnih linijskih sila. Na presjecima s tangentama dobivaju se točke loma koje odgovaraju djelovanju te četiri sile te nove ordinate odredjene s D i E i pripadne tangente 3-4 i 5-6.

Kao točka unutar promatranog dijela često se odabire i mjesto analitičkog ekstrema.

Kod konstantne linijske sile, momentna linija je parabola drugog stupnja. U tom je slučaju ponekad pogodno odabrati srednji presjek za odredjivanje ordinate. U tom presjeku je tangenta paralelna sa spojnicom krajnjih točaka parabole, pa T_s ne treba odredjivati.

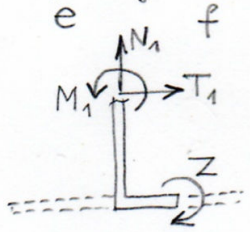
Elementarni dijagrami na osima proizvoljnog oblika

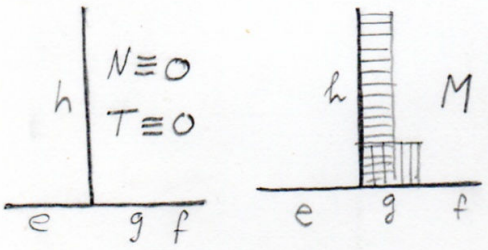


Pri odredjivanju reznih sila treba odabrati najjednostavniji put, t.j. kao promatrani dio odabrati onaj na kojemu ima manje djelovanja. Pri tomu se mogu pojaviti tri elemtarna slučaja:

a) na promatrani dio nedjeluju nikakove sile ni momenti. Za sve presjeke tog dijela sce rezne sile identično iščezavaju. Na skici su takovi "prazni" dijelovi označeni s a,b,c,d,e,f.

U daljnjem postupku ti se dijelovi jednostavno ignoriraju. Na daljnjim skicama su označeni isprekidano.

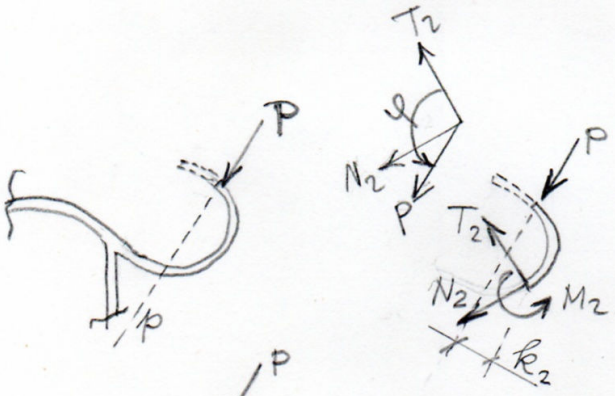




b) na promatrani dio djeluje samo jedan koncentrirani moment. Iz uvjeta ravnoteže bilo kojeg dijela odredjenog presjecanjem promatrane grane dobiva se:

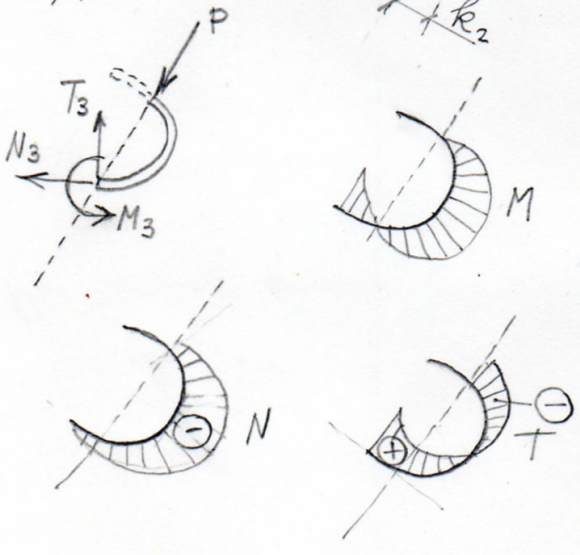
$$s_1 M_1 = s_z \cdot Z; \quad N_1 = 0; \quad T_1 = 0$$

pri tome indeks 1 označava proizvoljni presjek unutar promatrane grane. Uzdužna i poprečna sila identično iščezavaju, što je simbolički prikazano na istom dijagramu, a moment savijanja je za cijelu promatranu granu konstantan.



c) na promatranu granu djeluje samo jedna koncentrirana sila. Za odredjivanje reznih sila treba uočiti pravac djelovanja te sile (na skici ϕ)

Za svaki proizvoljni presjek unutar grane odabrati će se za promatrani dio upravo onaj koji sadrži samo jednu silu. Treba odrediti udaljenost presjeka od pravca sile (na skici k_2) i orjentirani kut od strijelice T do strijelice uz P (skica: φ_2). Iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela se dobiva:



$$s_2 \cdot M_2 = -s_{P2} k_2 \cdot P; \quad M_2 = -\frac{s_{P2}}{s_2} k_2 \cdot P$$

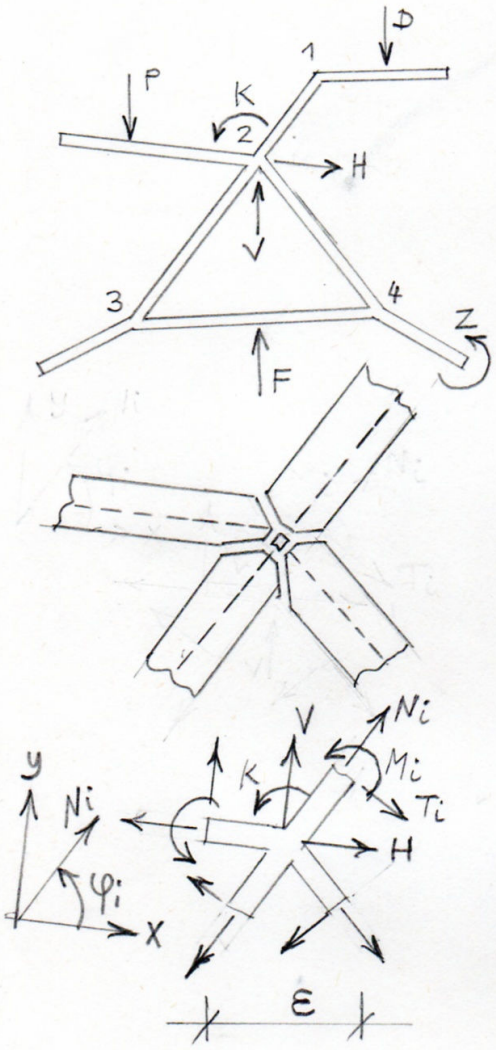
$$T_2 = -P\cos\varphi_2; \quad N_2 = -P\sin\varphi_2$$

Lokalni ekstremi momenta savijanja nalaze se na točkama osi koje su lokalno najudaljenije od pravca sile. Na presjecištima osi i pravca sile moment savijanja iščezava. Uzdužna sila je po iznosu jednaka vanjskoj na presjecima čija je normala paralelna sa pravcem sile, a

HUPK-85-75

iščezava na presjecima čija je normala okomita na pravac sile. Poprečna sila je po iznosu jednaka vanjskoj sili na presjecima koji su paralelni s pravcem vanjske sile. Poprečna sila iščezava na presjecima koji su okomiti na pravac vanjske sile.

Rezne sile na grananju osi i na lomu osi.



Pojam grananja uvesti će se iz svakodnevnog jezika. Os štapa prikazanog na skici ima grananja u točkama 2,3,4. U točki 1 ima lom. Za analizu reznih sila odabiru se pogodni dijelovi štapa, pa se postavljaju uvjeti ravnoteže. Često je pogodno promatrati ravnotežu neizmjerno malog dijela štapa koji nastaje presjecanjem osi uz samo grananje. Kod štapa konačne debljine takav se dio ne može izolirati pomoću ravnih presjeka. Strogo gledano se naponi u materijalu uz grananje osi i ne mogu odrediti prema štapnoj statici, pa se rezne sile u tim presjecima koriste samo za promatranje ravnoteže.
Za proračun se crta skica s konačnim dijelovima štapova a iz teksta ili proračuna se može shvatiti da se radi o zamišljenim presjecima uz samo grananje. Grananje osi se ponekad naziva i "čvor".

Na skici su simbolički prikazani presjeci uz grananje (čvor). Mjera ε podsjeća da se promatra neizmjerno malo tijelo, kod kojeg će se točka redukcije odabrati u samom grananju pa će uvjeti sila i uvjeti momenata voditi na nezavisne jednadžbe.
Odabire se koordinatni sistem x,y, Vanjska sila koja djeluje na grananje rastavljana je na dvije komponente veličina H,V paralelne s osima. Za svaki presjek se odredjuje orijentirani kut od osi x do strijelice za normalnu silu. Presjeci će se označiti brojevima od 1 do n, općenito brojem i. Uvjeti ravnoteže glase:

$$\Sigma P_{xi} = 0 \Rightarrow \sum_1^n (N_i \cos\varphi_i + T_i \cos(\varphi_i - 90^\circ) + H = \phi$$

$$\Sigma P_{yi} = \phi \Rightarrow \sum_1^n (N_i \sin\varphi_i + T_i \sin(\varphi_i - 90^\circ) + V = \phi$$

$$\Sigma M_i = \phi \Rightarrow \sum_1^n s_i M_i + K = \phi$$

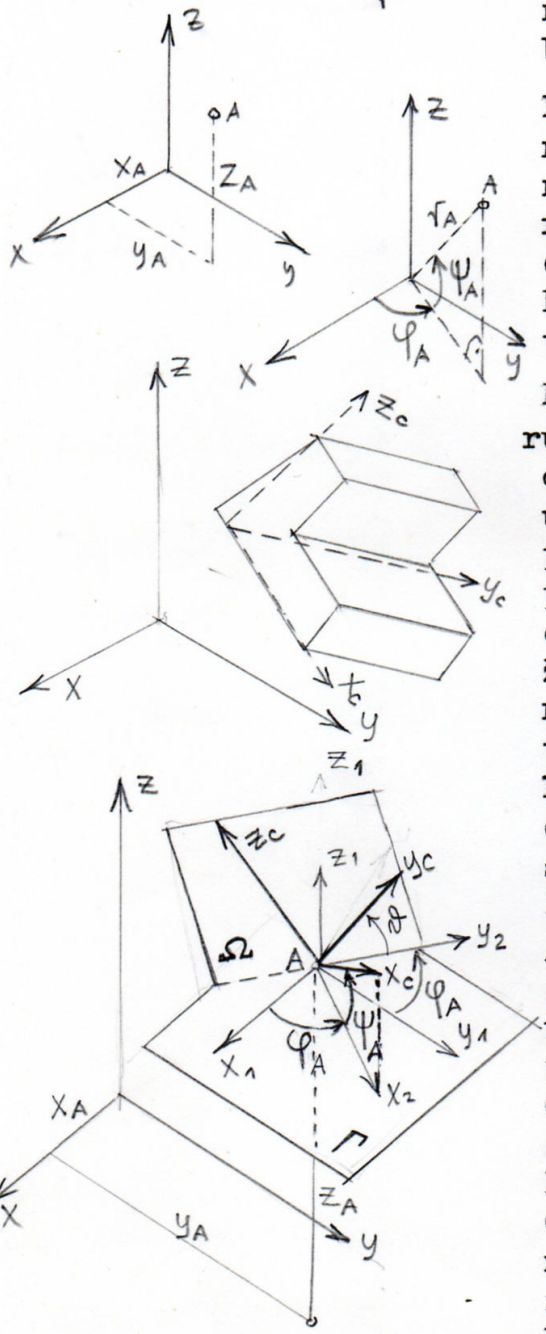
pri tome je K vanjski koncentriranimoment koji djeluje na čvor. Trigonometrijske funkcije od $\varphi - 90^\circ$ mogu se izraziti pomoću funkcija od φ, pa prve dvije jednadžbe dobivaju oblik:

$$\Sigma(N_i \cos\varphi_i + T_i \sin\varphi_i) + H = \phi \; ; \quad \sum_1^n (N_i \sin\varphi - T_i \cos\varphi_i) + V = \phi$$

HWPK - 85 - 76 S.XI.

Kinematski stupnjevi slobode

Kinematika proučava geometrijske zakonitosti gibanja, pa se u njoj pojavljuje zadatak opisivanja položaja promatranog dijela materije. Kinematski stupnjevi slobode su parametri pomoću kojih se jednoznačno opisuje položaj promatranog dijela materije. Za opsivanje položaja potreban je koordinatni sistem. Opisati će se nekoliko osnovnih slučajeva definiranja stupnjeva slobode.



Položaj materijalne točke je u kordinatnom sistemu odredjen s tri parametra, npr koodrinatam x,y,z ili s dva orijentirana kuta φ i ψ te udaljenosti od ishodišta r. Uočena su tri parametra, pa se kaže da materijalna točka u prostoru ima tri stupnja slobode.

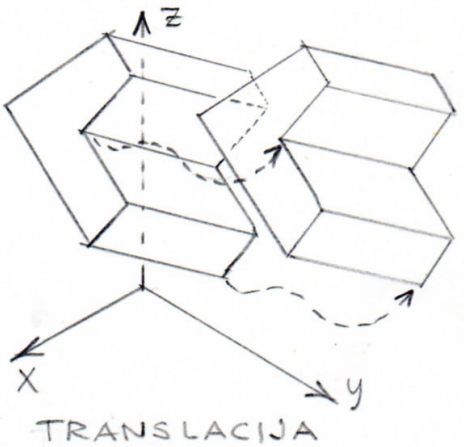
Položaj nedeformabilnog tijela u prostoru je odredjen s 6 parametara. Idealizacija tijela kao nedeformabilnog je česta u mehanici. Tih 6 parametara se može interpretirati na razne načine; osnovna interpretacija sadrži tri koordinate i tri orjentirana kuta. Da bi se odredio položaj nedeformabilnog tijela prema koordinatnom sustemu x,y,z definirati će se na tijelu zasebni koordinatni sustav x_c, y_c, z_c. Problem opisa položaja svodi se na odredjivanje sustava x_c, y_c, z_c u osnovnom sustavu x,y,z.

Ishodište sustava na tijelu označeno je s A i njegove koordinate su x_A, y_A, z_A. Tako su uvedena tri parametra. U točki A uvodi pomoćni koordinatni sustav x_1, y_1, z_1 paralelan s osnovnim sustavom x,y,z. Osi x_1 i y_1 odredjuju ravninu Γ. U sustavu x_1, y_1, z_1 je pomoću dva orjentirana kuta odredjena os x_c. Ti kutevi su φ_A i ψ_A. Osi y_c i z_c se nakon odredjivanja osi x_c mogu samo nalaziti u ravnini okomitoj na x_c, a ta će se ravnina označiti s Ω. Na presječnici ravnine Γ s ravninom Ω uvodi se pomoćna os y_2. Od nje se mjeri orjentirani kut ϑ_A i s njim je odredjena os y_c u ravnini Ω. Os z_c se takodjer nalazi u ravnini Ω, a kut prema y_2 je $\vartheta_A + \frac{\pi}{2}$. Tri kuta φ_A, ψ_A, ϑ_A pretstavljaju tri daljnja parametra. Ukupno je kao što je i najavljeno uvedeno šest parametara, pa se kaže da nedeformabilno tijelo u prostoru ima šest stupnjeva slobode.

Gibanje je promjena položaja u vremenu, Pogodno je da se najprije uvede promjena položaja, dakle prijelaz iz početnog u konačni položaj bez obzira na vrijeme. Kod promjene plošaja će se uočiti dva

HWPK - 85 - 77

specijalna slučaja. Prvi slučaj će se nazvati translacija. Tokom translacije se kutevi koji odredjuju položaj tijela ne mijenjanju. Zanči da će bilo koji pravac uočen na tijelu, tokom cijelog premještanja ostati paralelan svom početnom položaju.



TRANSLACIJA

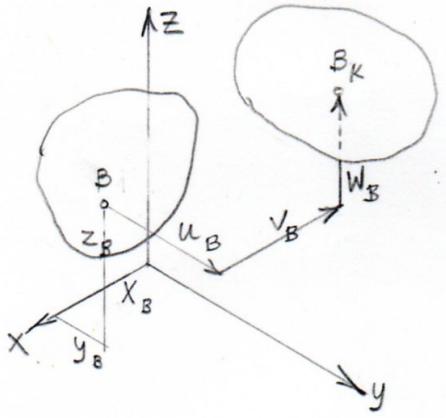
Drugi slučaj se naziva rotacija. Tokom rotacije jedna točka ne mijenja položaj. Najlakše je zamisliti da je to upravo ishodište sustava x_c, y_c, z_c vezanog na tijelo, pa će se kod rotacije samo mijenjati kutevi.

Specijalni slučaj translacije je translacija po pravcu.

Specijalni slučaj rotacije je rotacija oko osi.

Prelaz iz bilo kojeg početnog položaja u bilo bilo koji konačni može se obaviti pomoću tri translacije na nekomplanarnim pravcima i tri rotacije oko tri nekomplanarne osi. Zamisliti će se da je koordinatni sustav x_c, y_c, z_c imao početni položaj na osnovno sustavu. Proizvoljni položaj uprostoru može se postići s tri translacije x_A, y_A, z_A, čime je dobiven položaj x_1, y_1, z_1, pa nakon toga s tri rotacije; za kut φ_A oko osi z_1, za kut ψ_A oko osi y_2 i konačno za kut ϑ_A oko osi x_c.

HWPK - 85 - 78



Položaj deformabilnog dijela materije se najlakše može uvesti pomoću početnog položaja koji će poslužiti za "identifikaciju točaka" promatranog dijela. U početnom položaju je svaka točka promatranog dijela materije odredjena s njenim koordinatama u osnovnom sustavu x,y,z. Položaj neke točke npr. točke B će se odrediti prirastom početnih koordinata, pa će koordinate konačnog položaja biti:

$$X_{BK} = X_B + u_B; \quad Y_{BK} = Y_B + v_B; \quad Z_{BK} = Z_B + W_B$$

Skalari u_B, v_B, w_B se nazivaju koordinatni pomaci i mogu se shvatiti kao koordinate, t.j. veličine komponenti vektora pomaka koji spaja početni konačni položaj. U općem slučaju promjene položaja deformabilnog tijela će koordinatni pomaci biti različiti za svaku točku, pa će ih se izraziti kao funkcije koordinata početnog položaja. Točka čiji je početni položaj x,y,z imati će konačni položaj:

$$X_K = X + u(x,y,z); \quad Y_K = Y + v(x,y,z); \quad Z_K = Z + w(x,y,z)$$

Kaže se da deformabilni dio materije ima beskonačno mnogo stupnjeva slobode. U zakonima gibanja uvodi se položaj kao funkcija vremena. Gibanje točke je odredjeno sa $X(t), Y(t), Z(t)$. Gibanje nedeformabilnog tijela je odredjenos funkcijama: $X_A(t), Y_A(t), Z_A(t), \varphi_A(t), \psi_A(t), \vartheta_A(t)$. Gibanje deformabilnog dijela materije odredjuju $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$.

Statika mehaničkih sistema

Mehanički sistem je dio materije unutar kojega i/ili na koji djeluju sile. O mehaničkom problemu koji se promatra ovisi, koji će se dui materije smatrati mehaničkim sistemom. Kod opisivanja svojstava mehaničkih sistema obično se uvode idealizacije.

Izolirani mehanički sistem je posebni slučaj mehaničkog sistema: sile djeluju samo unutar izoliranog sistema. Izolirani sistem je idealizacija koja je često pogodna za rješavanje mehaničkih problema.

Uvjeti ravnoteže mehaničkog sistema

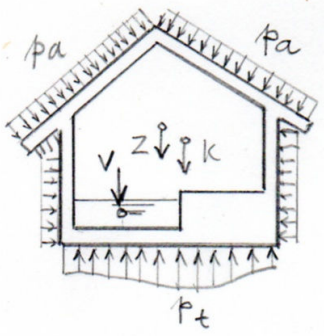
Mehanički sistem se nalazi u ravnoteži, ako se svaki njegov proizvoljno odabrani dio nalazi u ravnoteži. Dio mehaničkog sistema je takodjer jedan mehanički sistem.

Ako je mehanički sistem u ravnoteži, za svaki njegov konačni, proizvoljno odabranidio će vrijediti uvjeti ravnoteže tijela. U tim uvjetima će se pojavljivati samo sile koje djeluju na sistem, t.j. sile koje djeluju izmedju promatranog sistema i okoline.

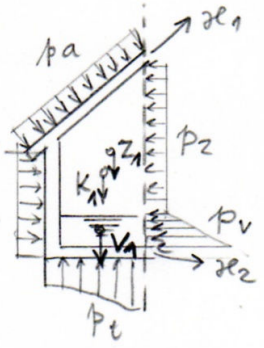
Ukoliko ploha kojom je ograničen mehanički sistem zahvaća neka tijela i/ili dijelove prostora u kojima se nalaze tekućine ili plinovi, pojaviti će se u uvjetima ravnoteže sistema unutarnje sile odnosno pritisci u tekućini ili plinu, definirani na graničnoj plohi. Prema izloženom se može zaključiti:

Mehanički sistem je u ravnoteži, ako su za svaki njegov, proizvoljno odabrani dio zadovoljeni uvjeti ravnoteže tijela.

Kao primjer će se promotriti zatvoreni objekt u kojemu je spremište s tekućinom. Pretpostavlja se da je objekt hermetički zatvoren i u njemu se nalazi zrak. Okolinu sistema će činiti Zemlja i njezina atmosfera. Sile koje djeluju na sistem, t.j. sile koje djeluju izmedju sistema i okoline će biti: pritisak atmosfere p_a, težina zraka u objektu Z, Težina objekta K, težina tekućine V, pritisak tla p_t. Te sve sile se moraju pojaviti u uvjetima ravnoteže objekta kao cjeline. U većini praktičnih slučajeva će se težina zraka u objektu i statički pritisak atmosfere zanemariti.



Promatrati će se nadalje dio prvog sistema koji nastaje zamišljenim presjecanjem ravninom okomitom na ravninu skice. Na tako dobiven mehanički sistem djeluju pritisci p_a i p_t, te težine K_1, Z_1, V_1 koje se sada odnose samo na dijelove materije obuhvaćene sistemom, a osim toga i duž zamišljenog presjeka djeluju: $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ unutarnje sile u presjeku objekta, p_z pritisak zraka i p_v pritisak vode. Navedene sile djeluju izmedju promatranog sistema i njegove okoline i one će se poja-



HWPK - 85 - 79

viti u uvjetima ravnoteže. Okolinu novog mehaničkog sistema čine: Zemlja, atmosfera i ostatak od prethodnog sistema.

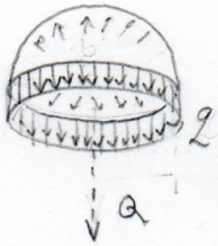
Iskorištavanje uvjeta ravnoteže mehaničkog sistema

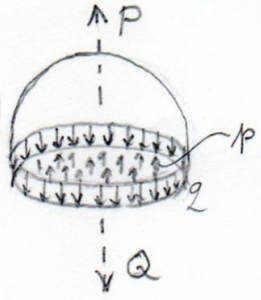
Uvjeti ravnoteže konačnog mehaničkog sistema jednaki su uvjetima ravnoteže tijela, pa je i njihovo iskorištavanje analogno.

U specijalnom slučaju kada je mehanički sistem izoliran ne mogu se iskoristiti njegovi uvjeti ravnoteže jer na njega ne djeluju sile. Kod izoliranih sistema se mogu iskoristiti uvjeti ravnoteže njihovih dijelova.

Kao primjer će se promatrati odredjivanje linijskog napona u kuglastoj membrani u kojoj je plin pod pritiskom. Membrana je materijalna ploha, koja se može zamisliti kao granični slučaj geometrijske plohe na kojoj su čestice materije u krutom agregatnom stanju. Izmedju čestica su moguće sile koje leže na spojnicama dviju točaka plohe. Pri prelazu na kontinuum unutarnje sile su linijske sile koje mogu djelovati samo tangencijalno na plohu, dakle membranu. Zbog simetrije kugle može se zaključiti da se za sve presjeke u membrani pojavljuje samo konstantni normalni napon. Modelski se zadatak može opisati ovako: koliki je napon u stijenki gumene lopte u kojoj se nalazi zrak pod poznatom pretlakom? Kako se računa samo pretlak(razlika unutarnjeg i atmosferskog tlaka) sistem se promatra kao izoliran .







Ako se kao sistem odabere polulopta biti će lako odrediti rezultantu linijskog napona:

$$Q = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot q$$

Za rezultantu pritisaka iznutra trebalo bi izračunati pripadni plošni integral.

Postoji i jednostavnije rješenje. Kao sistem se odabire polukugla, ali zajedno s pripadnim dijelom plina. Na sistem sada djeluju linijski naponi u "presječenoj"stijenki i njihova rezultanta je poznata i iznosi . Graničnu plohu sistema sada čini ravnina kojom je "presječem" plin i pritisak na tu plohu ulazi u uvjete ravnoteže. ritisak je plošna sila. U ovom slučaju je konstantan i paralelan, pa se rezultanta odredjuje prema:

$$P = r^2 \pi \cdot p$$

Svi su uvjeti ravnoteže identično zadovoljeni m zbroja projekcija na os paralelnu s silama S i Q. Ako se os usmjeri kao strijelisa uz P dobiva se:

$$P - Q = 0$$

akon uvr tavanja, lako se odredjuje veza q i p:

$$q = \frac{r}{2} \cdot p$$

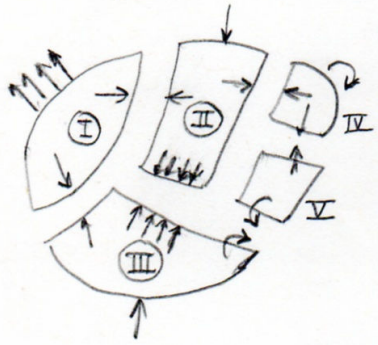
HWPK-85-80

Nezavisni uvjeti ravnoteže mehaničkog sistema

Sistem kao cjelina ima šest nezavisnih uvjeta ravnoteže na osnovu kojih se može postaviti najviše šest linearno nezavisnih algebarskih jednadžbi. Broj nezavisnih algebarskih jednadžbi će ovisiti o geometriji sila koje djeluju na sistem.

Važan je specijalni slučaj kada na sistem djeluju samo sile u istoj ravnini. Kao i kod tijela; u tom se slučaju mogu postaviti najviše tri nezavisne jednadžbe. Ta se situacija, ne sasvim precizno, često opisuje izjavom " sistem na koji djeluju sile u ravnini ima tri nezavisna uvjeta ravnoteže". Broj uvjeta je dakako šest, ali su zbog geometrije sila tri identično ispunjena, pa ih se ne računa.

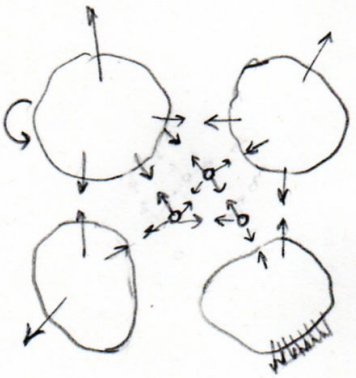
Veza nazivisnih uvjeta ravnoteže cjeline i dijelova sistema



Pri promatranju ravnoteže mehaničkih sistema mogu se promatrati i sile koje djeluju izmedju njihovih dijelova. Postavlja se pitanje odnosa uvjeta ravnoteže pojedinih dijelova medjusobno i sistema kao cjeline.

Za svaki dio se može postaviti 6 nezavisnih uvjeta ravnoteže. Ravnoteža cjeline je time osigurana, pa su uvjeti ravnoteže cjeline u tom slučaju zavisni.

Mehanički sistem koji sadrži "t" dijelova ima 6t nezavisnih uvjeta ravnoteže. Pri iskorištavanju tih uvjeta može se postaviti najviše 6t linearno neazavisnih algebarskih jednadžbi. Broj nezavisnih jednadžbi ovisiti će o geometriji sila koje djeluju izmedju dijelova sistema i o geometriji sila koje djeluju na sistem.



Posebno će se navesti specijalni slučajevi:

a) Neki dijelovi sistema su materijelne točke, za koje su momentni uvjeti identično zadovoljeni. Ako se broj konačnih dijelova označi s "t", a broj točaka s "n", voditi će uvjeti ravnoteže na najviše 6t + 3n linearno nezavisnih algebarskih jednadžbi, što se često opisuje kao "sistem koji sadrži "t" dijelova i "n" točaka ima 6t + 3n nezavisnih uvjeta ravnoteže".

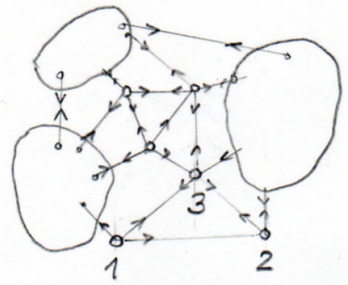
b) Na sistemu izmedju dijelova sistema djeluju samo sile u istoj ravnini i momenti okomiti na tu ravninu. U tom specijalnom slučaju su po tri uvjeta ravnoteže za svaki konačni dio identično ispunjena, a za točku osim momentnih još jedan, pa se može postaviti najviše 3t + 2n nezavisnih algebarskih jednadžbi, što se često formulira kao " sistem koji sadrži "t" konačnih dijelova i "n" materijalnih točaka, a sve sile djeluju u istoj ravnini, ima 3t + 2n nezavisnih uvjeta ravnoteže".

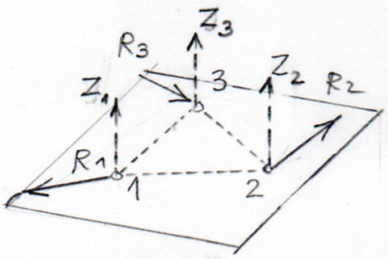
HWPK-85-81

Vezu uvjeta ravnoteže cijeline i dijelova moguće je promatrati i na drugi način:

Uvjeti ravnoteže cjeline mogu se shvatiti kao nezavisni, a uvjeti proizvoljno odabranog konačnog dijela kao zavisni. Uvjeti svih preostalih dijelova će biti u tom slučaju nezavisni. Razumije se, da je ukupni broj nezavisnih uvjeta za sistem podijeljen na dijelove ostao isti:6t, pa vrijede i svi specijalni slučajevi.

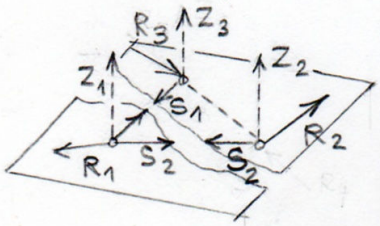
Kao specijalni slučaj već je uveden sistem koji uz konačne dijelove sadrži i materijalne točke . I u tom slučaju se uvjeti ravnoteže cijelog sistema mogu shvatiti kao nezavisni, a kao zavisni mogu se odabrati neki skalarni uvjeti ravnoteže nekih točaka. Tih točaka može biti najviše šest, a najmanje tri koje ne leže ma istom pravcu. Znači: ne mogu se kao zavisni odabrati svi uvjeti za dvije točke.



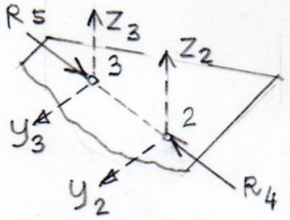


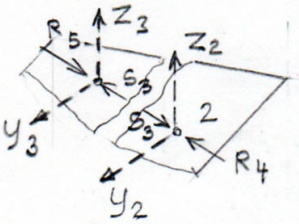
Može se dokazati da osi projekcija zavisnih uvjeta moraju biti rasporedjene kao šest uravnotežavajućih sila koje na zadanim pravcima djeluju na tijelo. Pravilo će se samo prikazati na najjednostavnijem primjeru.

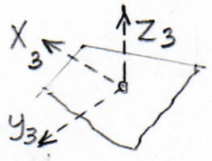
U sistemu se odabiru tri točke koje ne leže na istom pravcu. Izmedju njihovih devet uvjeta ravnoteže pronaći će se šest zavisnih. Neka zbog jednostavnosti izmedju tih točaka djeluju zasada nepoznate sile.

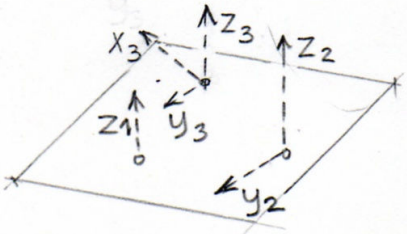


Ako je cijeli sistem u ravnoteži i ostatak sistema u odnosu na te tri točke u ravnoteži morati će i te tri točke biti u ravnoteži. Ravnoteža je moguća samo ako rezultante svih sila leže u ravnini tih točaka, pa sume projekcija svih sila na osi okomite na tu ravninu sigurno iščezavaju za sve tri točke, pa su ta tri uvjeta zavisna (na skici su osi označene s z_1, z_2, z_3. Izmedju tih točaka odabire se jedna (1); njena preostala dva uvjeta su nezavisna - iz njih se mogu odrediti dvije sile (S_1, S_2). Ako je točka L u ravnoteži, moraju i preostale dvije točke kao podsistem biti u ravnoteži, pa rezultante sila koje djeluju na te točke moraju ležati na njihovoj spojnici. Zbog toga sume projekcija svih sila na osi okomite na spojnicu za preostale dvije točke moraju iščezavati. Tako su dobivena daljnja dva zavisna uvjeta (na skici su to osi y_2, y_3). Konačno se promatra ravnoteža jedne točke odabrane od preostale dvije (na skici točka 2) Preostali, jedan uvjet ravnoteže te točke je nezavisan - iz njega se može odrediti sila iz-







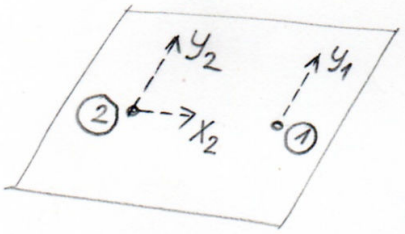


8.XI HWPK - 85-82

medju točaka 2 i 3. Veličina sile je na skici označena s S_3. Ako je točka 2 u ravnoteži, mora i preostala točka 3 biti u ravnoteži, t.j. svi uvjeti ravnoteže za tu točku moraju biti zadovoljeni, što znači da su zavisni. Već je odredjeno da su sume projekcija na dvije osi točke t zavisni uvjeti, sada se pokazalo da je i suma na treću os (na skici označena s x_3) zavisna.

Na posljednjoj skici su prikazane sve osi čije su sume projekcija odabrane kao zavisne(označene su sa $x_3, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$).

Kao drugi specijalni slučaj je uveden sistem koji sadrži konačne dijelove i materijalne točke, pri čemu djeluju samo sile u jednoj ravnini i momenti okomiti na tu ravninu. Ako se u tom slučaju odaberu kao nezavisni uvjeti ravnoteže cjeline, mogu se kao zavisni odabrati svi uvjeti u toj ravnini; ukupno 3, za bilo koji konačni dio. Pri tome će uvjeti svih preostalih dijelova i toč a biti nezavisni. Kao zavisni se uvjeti mogu odabrati uvjeti ravnoteže za neke točke sistema: po jedan za svaku od tri točke ili dva uvjeta za jednu točku i jedan za jednu daljnju.



Može se dokazati da osi projekcija zavisnih uvjeta moraju biti rasporedjene kao tri uravnotežavajuće sile koje na zadanim pravcima djeluju na tijelo u ravnini.
Najjednostavnije je, da se odaberu dvije točke: sume projekcija za osi okomite na spojnicu će biti zavisne za obje točke (na skici y_1, y_2), a za jednu od točaka biti će zavisna i suma projekcija za os koja leži na spojnici (x_2).

HWPK - 85-83

Uvjeti ravnoteže izoliranog sistema i njegovih dijelova

Izolirani sistem će se promatrati tako da uvjeti ravnoteže cijelog sistema budu nezavisni, a 6 uvjeta ravnoteže jednog konačnog dijela ili nekih točaka će se odabrati da budu zavisni.
Šest uvjeta ravnoteže cjeline je identično zadovoljeno, jer na sistem ne djeluju nikakove sile ni momenti, pa će se iz uvjeta ravnoteže sistema moći postaviti najviše $6t+3n-6$ nezavisnih algebarskih jednadžbi.
Ako na izolirani sistem djeluju samo sile u ravnini i okomiti momenti, voditi će uvjeti ravnoteže na najviše $3t+2n-3$ nazavisnih algebarskih jednadžbi. To svojstvo izoliranog sistema,m često se opisuje i tako, da se identično zadovoljeni uvjeti ne ubrajaju u nezavisne: "Izolirani sistem uprostoru ima $6t+3n-6$ nezavisnih uvjeta, a ako na izolirani sistem djeluju samo sile u ravnini imati će $3t+2n-3$ nezavisnih uvjeta."

Iskorištavanje uvjeta ravnoteže sistema i njegovih dijelova

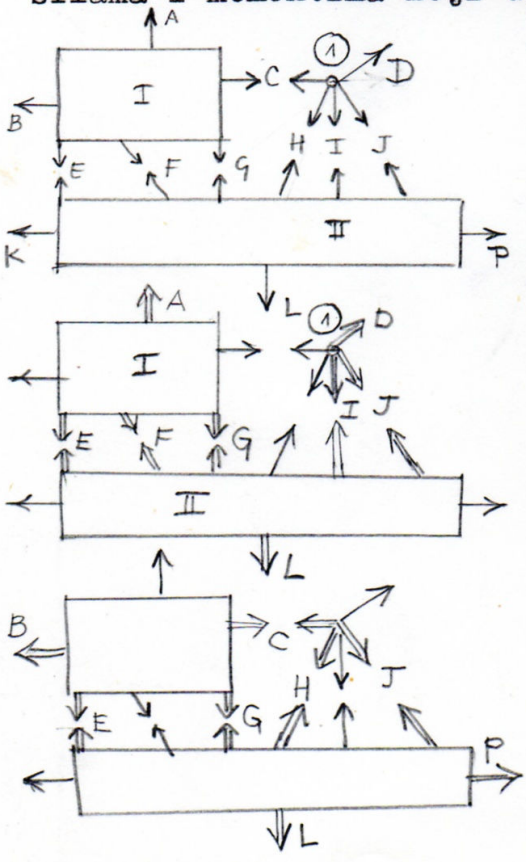
Promatranjem uvjeta ravnoteže sistema i njegovih dijelova ustanovljeni su nezavisni uvjeti ravnoteže i broj nezavisnih algebarskih jednadžbi koje se na osnovi tih uvjeta u općem slučaju, kao i u specijalnim slučajevima mogu postaviti. Iz tih jednadžbi se mogu odrediti neki skalarni podaci, kao i kod iskorištavanja ravnoteže tijela. Sile i momenti koje se odredjuju iz uvjeta ravnoteže nazvati će se i ovdje "uravnotežavajuće sile i momenti". Preostale sile i momenti će se nazivati "zadana djelovanja".

Iz uvjeta ravnoteže cjelog sistema može se odrediti najviše šest podataka o uravnotežavajućim silama i momentima, koji djeluju na sistem. Doprinosi sila koje djeluju unutar sistema, izmedju dijelova se u uvjetima cijelog sistema poništavaju. Iz daljnjih $6t+3n-6$ nezavisnih uvjeta koji se postavljaju za dijelove sistema, može se odrediti najviše $6t+3n-6$ podataka o uravnotežavajućim silama koje djeluju unutar sistema, dakle izmedju konačnih dijelova i točaka sistema.

Izbor nepoznatih podataka mora biti takav da pripadni sistem jednadžbi bude regularan. U tom slučaju će se uravnotežavajuće sile i momenti moći odrediti za proizvoljna zadana djelovanja.

Očito mora vrijediti: ako su zadana djelovanja uravnotežena za svaki dio i svaku točku zasebno, iščeznuti će sva uravnotežavajuća djelovanja.

U sistemu na koji djeluju sao sile u ravnini i momenti okomiti na tu ravninu moći će se iz uvjeta ravnoteže cjeline odrediti tri podatka o silama koje djeluju na sistem, a iz uvjeta ravnoteže dijelova i točaka, najviše $3t+2n-3$ podataka o uravnotežavajućim silama i momentima koji djeluju unutar sistema.



Primjer. Promatra se sistem na čije dijelove djeluju sile u ravnini. Sile A,B,D,K,L,P djeluju na sistem, sile c,f,g,h,I,J djeluju unutar sistema. Postoje različite mogućnosti izbora "uravnotežavajućih sila", ali će ukupni broj biti $3\cdot2+2\cdot1=8$.

Jedna mogućnost je prikazana: Iz uvjeta cijelog sistema mogu se odrediti A,D,L. Iz uvjeta tijela I mogu se odrediti E,F, G, a iz uvjeta ravnoteže točke 1 mogu se odrediti sile I,J. Ostale moraju biti zadane (na skici nisu označene njihove veličine).

Druga je mogućnost: Iz uvjeta ravnoteže cjeline mogu se odrediti B,L,P. Iz uvjeta tijela I odrediti će se C,E,G, a iz uvjeta ravnoteže točke 1, odrediti će se sile H i J. Ostale sile moraju biti zadane.

U složenim slučajevima mora se mogućnost

HWPK- 85- 84

rješavanja provjeriti algebarski; postavljaju se svi nezavisni uvjeti ravnoteže. Podaci o uravnotežavajućim silama i momentima koji će se odrediti iz tih uvjeta će biti nepoznanice u dobivenom sistemu linearnih algebarskih jednadžbi. Ako je determinanta koeficijenata uz nepoznanice različita od nule sistem je rješiv t.j. uravnotežavajuće sile će se moći odrediti uz proizvoljna zadana djelovanja. Ukoliko se promatraju specijalni slučajevi, onda su zadana djelovanja proizvoljna,ali samo unutar ograničenja promatranog specijalnog slučaja.

Statički sistemi

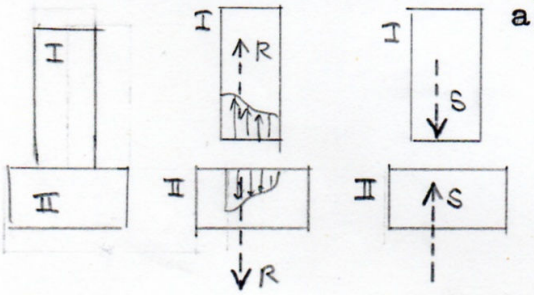
Statički sistem je takav mehanički sistem koji sadrži samo tijela u krutom agregatnom stanju povezana u cjelinu kontaktima i/ili zavarivanjem i sličnim načinima spajanja.

Mnogi gradjevinarski i strojarski proizvodi sadrže statičke sisteme. Na primjer: svi dijelovi neke gradjevine zajedno s namještajem čine statički sistem.

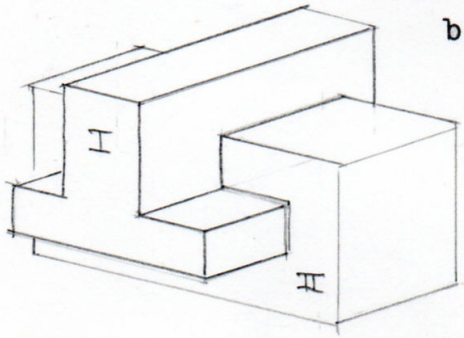
Podjela kontakta

Za proučavanje mehaničkih svojstava statičkih sistema treba analizirati svojstva kontakta; oni će se podijeliti na dvije skupine:

HWPK-3.11.-85-85

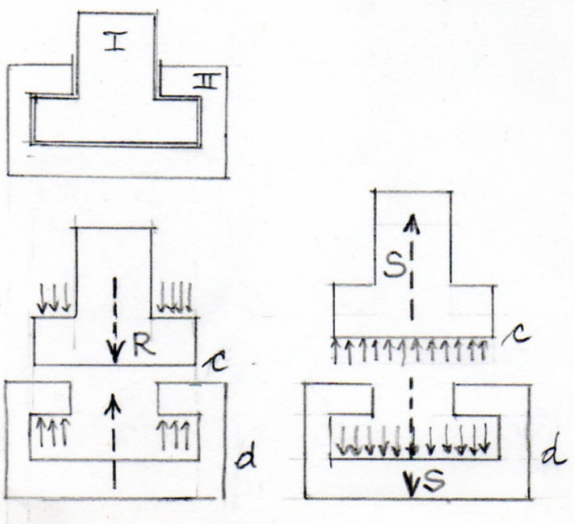


a) jednostrani kontakti; kod njih nisu moguća dva stanja kontaktnih sila koja imaju suprotna rezultirajuća djelovanja. Primjer: Tijela I i II su u kontaktu duž ravnog lika. Neko stanje kontaktnih pritisaka može imati rezultantu R, ali se ne može pojaviti takovo stanje koje bi imalo upravo suprotnu rezultantu S.



b) dvostrani kontakti; za bilo koje moguće stanje kontaktnih sila, svakako se može pronaći jedno daljnje moguće stanje čije je rezultirajuće djelovanje upravo suprotno od rezultirajućeg djelovanja prvog stanja.

Primjer: Prikazana su tijela I i II koja se nalaze u kontaktu duž sedam pravokutnih ploha (aksonometrija i pogled)



Prilikom nekog djelovanja može se na plohu tijela I javiti kontaktni pritisak s rezultantom R. Odgovarajući suprotni pritisak će se javiti na tijelo II. Moguće je i drugo djelovanje prilikom kojega će se na plohi c tijela I pojaviti pritisak s rezultantom S koja je suprotna od R za isto tijelo. Na tijelo II će se pojaviti odgovarajući suprotni pritisak čija će rezultanta

S biti suprotna od rezultante R za prvo djelovanje.

Spojevi su mjesta na kojima je ostvaren dvostrani kontakt ili su tijela spojena zavarivanjem i sličnim načinima spajanja.

Statički sistema je moguće podijeliti prma različitim kriterijima. Npr. prema ponašanju materijala, na nedeformabilne, ekastične i neelastične. Nadalje; prema vrsti kontakta na sistema s jednostranim kontaktnima i spojene sisteme. Moguća je i podjela prema veličini kontakta na sisteme s konačnim kontaktima i spojevima i na sisteme s kontaktima i spojevima u točkama.

Ovdje će se obraditi sistemi s nedeformabilnim kontaktima i spojevima, koji obuhvaćaju dvije važne idealizacije: nedeformabilne sisteme i sisteme spojene u točkama. Najprije će se obraditi sistemi s nedeformabilnim spojevima, a nakon toga sistemi s spojevima i kontaktima.

Statički sistemi s nedeformabilnim spojevima

Dijelovi sistema su tijela u krutom agregatnom stanju koja su na mjestima spojeva nedeformabilna. Zbog jednostavnosti će se ti sistemi nadalje nazivati samo "spojeni sistemi".

Prema dossada izloženom veliki dio gradjevinskih i strojarskih proizvoda sadrži statičke sisteme, pa prema tome i spojene sisteme. Što se tiče funkcije su kod strojeva bitni spojevi koji omogućuju relativna pomicanja dijelova. Kod gradjevina postoje primjeri kod kojih spojevi služe samo za spajanje krute cjeline konstrukcije, dok su pokretni samo pomoćni elementi: vrata,prozori i sl. Postoje gradjevinski objekti kod kojih je bitno osiguravanje relativne pomičnosti dijelova konstrukcije: pokretni mostovi, dijelovi mostova i teških konstrukcija oslonjeni na specijalnim ležajima.

Neki postupci za proračun konstrukcija zasnivaju se na uvodjenju zamišljenih spojeva, pa zbog toga treba analizirati o one spojeve koji se izvedbi konstrukcija uopće ne koriste.

Spojeni sistemi će se prema njihovim mehaničkim svojstvima podijeliti na dvije osnovne skupine: geometrijski nepromjenjive i mehanizme. Za precizniju definiciju tih pojmova potrebno je uvesti nekoliko novih pojmova, pa će se na ovom mjestu navesti samo neka svojstva i primjeri radi uvodjenja u problematiku.

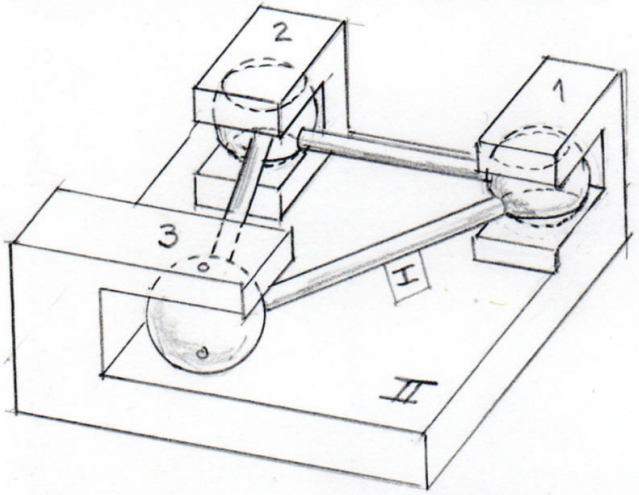
Geometrijski nepromjenjivi spojeni sistemi se ponašaju kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju, a mehanizmi se ne ponašaju kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju; izmedju njihovih dijelova mogući su pomaci i bez deformacija.

Primjer za geometrijski nepromjenjiv sistem prikazan je na str.54: sistem se sastoji od dva tijela; jedno sadrži tri kugle koje su u kontaktu s drugim tijelom. Intuitivno se može prihvatiti da se takav sistem ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.

HNPK-85-86

Primjer za mehanizam je sistem uveden na str,85 za prikazivanje dvostranog kontakta. I u ovom slučaju se može intuitivno prihvatiti da su mogući relativni pomaci izmedju tijela I i II; moguća je konačna translacija.

Geometrijski nepromjenjivi sistemi dijele se nadalje na odredjene i preodredjene. Uvodno će se samo napomenuti: Odredjeni sistemi se mogu sastaviti bez deformacija dijelova i ako se u dimenzijama njihovih dijelova pojave relativna odstupanja. Sistem s tri kugle prikazan na str. 54. je odredjeni sistem. Može se zamisliti da su štapovi koji spajaju kugle izvedeni s promijenjenim duljinama, ipak će se uz iste dimenzije drugog tijela sistem moći sastaviti bez deformacija. Pri tome će se kugla u valjkastom žlijebu i kugla izmedju dvije ravne plohe naći u nekom drugom položaju prema drugom tijelu, ali će svojstva sistema ostati sačuvana.



Preodredjeni sistemi imaju barem jednu mjeru u kojoj se dva tijela moraju podudarati; ako se u toj mjeri pojavi relativno odstupanje sistem se ne će moći sastaviti bez deformacije.

Kao primjer je skiciran sistem od dva tijela sličan sistemu uvedenom na str.54. Razlika je u tome, da su na mjestima jedan i 2 kugle tijela I u kuglastim udubinama tijela II. Kontakt na mjestu 3 je ostao nepromijenjen; kugka se nalazi izmedju dvije ravne plohe. I ovaj sistem se ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju, ali udaljenost središta kugli tijela I i udaljenost središta kuglastih udubina tijela II moraju biti jedanke inače se sistem ne će moćisataviti bez deformacija.

I mehanizmi će se slično kao i geometrijski nepromjenjivi sistemi podijeliti na dvije podskupine: mehanizme u užem smislu i mehanizme koji sadrže preodredjenost. Bez objašnjenja će se sugerirati primjeri: mehanizam u užem smislu bi se iz sistema ba str.54 mogao dobiti uklanjanjem kontakta jedne kugle, npr. odabacivanjem ravnog elementa koji ograničava gibanje treće kugle unutar ravnina. Analogno tome bi se mehanizam koji sadrži preodredjenost mogao dobiti iz sistema prikazanog na ovoj strani uklanjanjem dijela tijela II koje ograničava položaj kugle 3. U oba slučaja bi se onda tijelo I moglo rotirati oko spojnice kugli 1 i 2.

Ovdje je uvodno skicirana opća podjela spojenih sistema na osnovi njihovih kinematskih svojstava. Svaka od prikazanih vrsta sistema ima i statička svojstva. U proračunu konstrukcija se uvodi više načina podjele spojenih sistema, a naki složeniji slučajevi se ne mogu tako jednostavno prepoznati kao ovih nekoliko prikazanih u uvodu. Zbog toga treba postaviti teoriju spojenih sistema. Pri

HWPK-85-87

tome su teoretski moguća dva nezavisna pristupa: kinematski i statički. Ovdje će se prvenstveno koristiti statički pristup, uz dodatna kinematska objašnjenja gdje je to metodički pogodno.

Prikaz će se započeti sistematikom spojeva i uvodjenjem novih pojmova koji će se koristiti u teotiji spojenih sistema

Vrste spojeva

Promatrati će se idealni spojevi kod kojih kontaktne plohe imaju idealni geomterijski oblik, dijela ravnine, valjka ili kugle. Plohe dvaju tijela u spoju točno pristaju jedna uz drugu i izmedju njih se ne pojavljuje trenje.

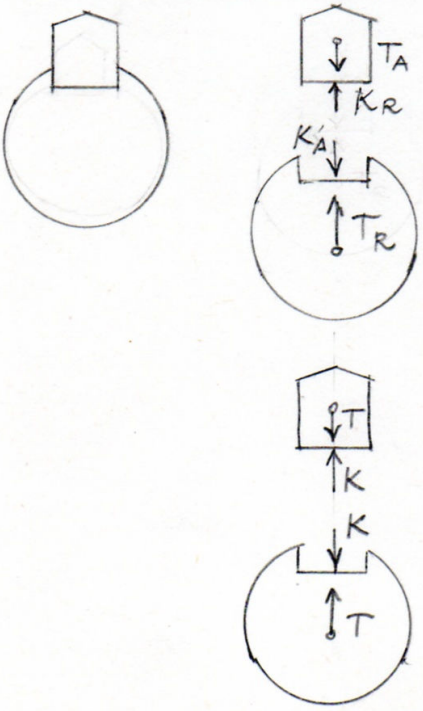
Spojevi imaju kinematička i statička svojstva.

Kinematička svojstva spojeva odredjuju se tako, da se zamisli da su dva nedeformabilna tijela spojena promatranim spojem. Treba ustanoviti koji su relativni stupnjevi slobode mogući izmedju tih tijela, a koji su stupnjevi slobode spriječeni. Za spriječene stupnjeve slobode se još kaže da su "povezani".

Statička svojstva se odredjuju promatranjem rezultirajućeg djelovanja kontaktnih sila u spoju. Traži se minimalni broj komponenti različitih od nule koje su statički ekvivalentne bilo kojim kontaktnim silama koje se mogu pojaviti u spoju. Veličine tih komponenti će se nazivati reakcije. Znači da će reakcija u ovom slučaju bti veličina zamišljene koncentrirane sile ili koncnetriranog momenta koji čine rezultirajuće djelovanje kontaktnih sila u spoju.

Pojam reakcija je ovdje drugačije upotrebljen nego u trećem Newtonovom aksiomu, po kojem se svako djelovanje sastoji iz dvije suprotne i jednako usmjerene sile: akcije i reakcije.

Ovdje se djelovanja u spojevima nazivaju rekacije i to oba djelovanja na tijela koja su spojena. Sva preostala djelovanja u sistemu se nazivaju akcije.



Primjer. Promatra se neki objekt na Zemlji. Sila kojom Zemlja privlači taj objekt označena je s T_A, a sila kojom objekt privlači Zemlju s T_R. Te dvije sile čine jednu interakciju pa se jedna od njih nprT_A može smatrati akcijom, prema Newtonovom aksiomu, a druga T_R se može smatrati reakcijom. Ako je objekt u ravnoteži izmedju njega i Zemlje djeluju i kontaktne sile. Njihovo djelovanje na objekt prikazuje sila K_R, djelovanje na Zemlju sila K_A. I ta dva djelovanja čine jednu interakciju(kratkog dometa) Jedna od tih sila npr K_A se može smatrati akcijom, a preostala K_R će onda biti reakcija.
U teoriji sistema se djelovanje u spoju smatra reaktivnim, pa su obje sile K reakcije, a obje sile T su akcije.

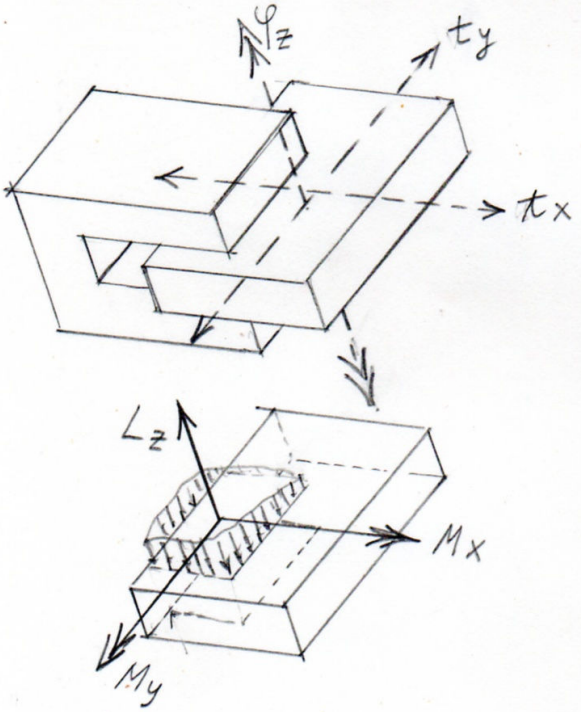
10.11. HWPK-85-88

Statička svojstva spoja opsuju se i tako, da se za neku komponentu ili moment koji se pojavljuju u spoju, kaže da "spoj odgovarajuću silu ili moment prenosi".

Komplementarnost svojstava spoja

Izmedju komponenti općeg rezultirajućeg djelovanja i stupnjeva slobode nedeformabilnog tijela postoji veza; svakoj komponenti sile odgovara po jedna translacija po pravcu, a svakoj komponenti momenta odgovara po jedna rotacija oko osi. Ta će se veza opisati uvodjenjem pojma mehaničke karakteristike; za translaciju po pravcu i komponentu rezultirajućeg djelovanja paralelnu tom pravcu reći će se da imaju istu mehaničku karakteristiku. Tako je uveden skup od šest mehaničkih karakteristika koje odgovaraju rezultirajućem djelovanju, a i skupuod šest stupnjeva slobode.

Spoj prenosi komponente koje imaju istu mehaničku karakteristiku kao i povezani stupnjevi slobode. Preostali stupnjevi slobode su mogući, pa se komponente koje spoj prenosi i mogući stupnjevi slobode upotpunjuju u smislu mehaničkih karakteristika, što se kraće može reći da su statička i kinematička svojstva spoja komplementarna.



Kao primjer prikazan je ravninsko-klizni spoj: dva tijela su kontaktu duž dviju paralelnih ravnih ploha. Kinematičku karakteristiku čine tri moguća relativna stupnja slobode: dvije translacije paralelne s ravninom označene na skici s t_x,t_y i rotacija oko osi okomite na ravninu, označene na skici s φ_z. Mogućnost translacije je grafički prikazana isprekidanom linijom sa suprotnim strijelicama na oba kraja, a os rotacije isprekidanom linijom s suprotnim dvostrukim strijelicama na oba kraja.
Prema svojstvu komplementarnosti karakteristike koje se nisu pojavile u kinematičkim svojstvima pojaviti će se u statičkim: Translacija okomita na ravninu nije moguća,pa se pojavljuje sila okomita na ravninu L_z. Rotacije oko osi koje leže u ravnini nisu moguće pa se pojavljuju odgovarajuće komponente momenta M_x, M_y. Minimalni broj komponenti rezultirajućeg djelovanja mogao se ustanoviti i na osnovi statičkog razmatranja koje je prikazano u poglavlju: Kontakti bez trenja (str.50)

HWPE - 85 - 89

Prikazivanje spojeva

Spojevi konačne veličine prikazuju se na nacrtu ili skici. U nekim slučajevima je potrebno dodatno opisivanje svojstava.

Statička svojstva spoja se prikazuju grafički tako da su tijela razdvojena, a komponente rezultirajućeg djelovanja se prikazuju u tehničkoj notaciji za svako tijelo.

Spojevi u točkama se prikazuju simbolima. Usvojeni su simboli samo za neke vrste spojeva, pa će u nekim slučajevima biti potreban dodatni opis. Ovdje su uvedeni simboli za kinematička svojstva, pa će se na taj način jednoznačno definirati svojstva spojeva (primjer na str.89). U sistematizaciji spojeva će se svaki spoj prikazati skicom koja razjašnjava funkciju, simboličkim prikazom spoja u točki i statičkim svojstvom prikazanim na spoju u točki.

Vrste spojeva

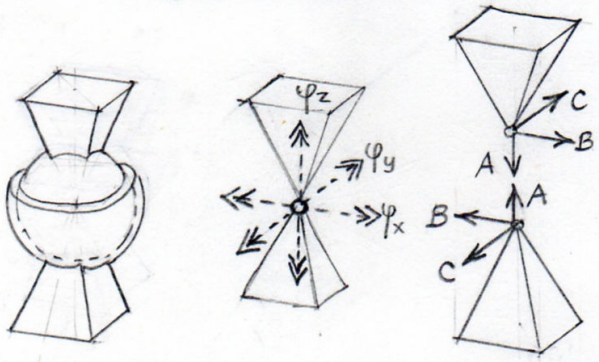
Spojeve će se podijeliti na dvije podskupine: neposredne i posredne.

Neposredni spojevi

Neposredni spojevi predstavljaju spojeve u užem smislu: spojena tijela su u neposrednom kontaktu ili je ostvarena veza zavarivanjem ili nekim sličnim postupkom. Navesti će se samo osnovni slučajevi.

HWPK 85-90

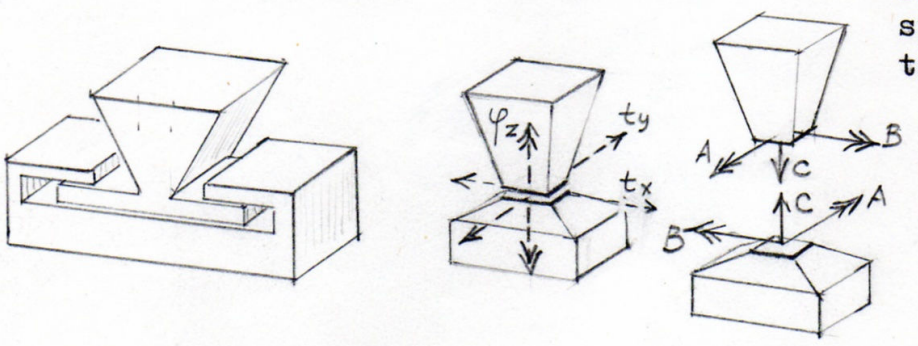
Kuglasti zglob



U kuglastom zglobu jedno tijelo ima oblik dijela kugle, a drugo ima oblik kuglaste udubine ili kuglastih udubina, koje kuglu prvog tijela obuhvaćaju tako da se bez deformacije ili sloma tijela ne mogu rastaviti. Pojavljuje se u primjeni.

Kod kuglastog zgloba su moguće tri relativne rotacije, što znači da ne prenosi niti jedan moment, a prenosi tri nekomplanarne sile na zadanim pravcima. Statičko djelovanje je odredjeno s tri skalarne veličine, može se reći i: tri reakcije.

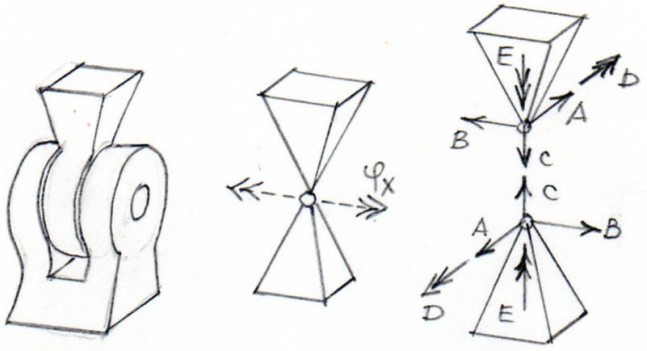
Ravninsko klizni spoj



Kod ravninsko kliznog spoja tijela su u kontaktu duž paralelnih ravnih ploha. Moguće se dvije translacije na pravcima paralelnim s kontaktnim ravninama i rotacija oko osi okomite

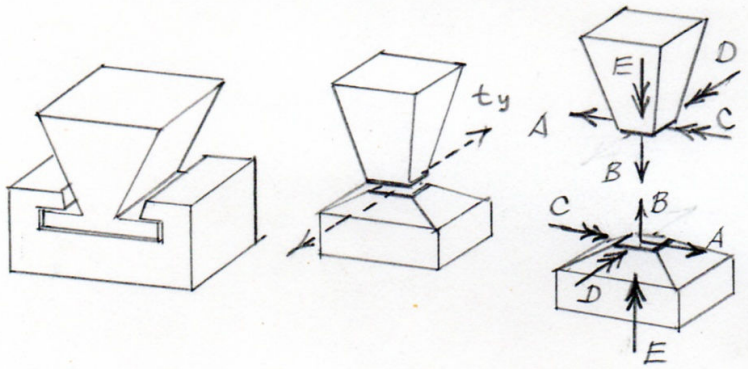
na kontaktne ravnine. Ravninsko klizni spoj će prenositi jednu silu okomitu na ravninu kontakta i dva momenta u ravnini kontakta. Statičko djelovanje je odredjeno s tri skalarne veličine; reakcije.

Linijski zglob



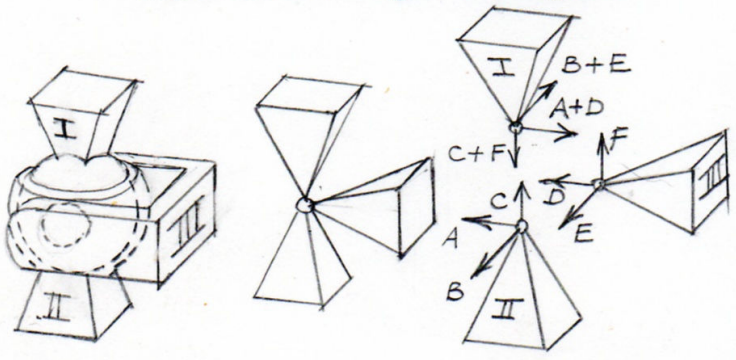
Kod linijskog zgloba tijela su u kontaktu duž oplošja kružnog valjka i duž dvije ravne plohe okomite na os valjka.
Moguća je samo jedna rotacija oko osi valjka, pa će samo odgovarajući moment iščezavati u rezultirajućem djelovanju. Linijski zglob prenosi tri komponente sile i dvije komponente momenta.
Linijski zglob se vrlo često pojavljuje u primjenama.

Linijski klizni spoj



Kod linijskog kliznog spoja tijela su u kontaktu duž ravnih ploha, koje su sve paralelne s jednim pravcem.
Moguća je samo jedna translacija duž pravca, pa će odgovarajuća sila iščezavati u rezultirajućem djelovanju.
Linjski klizni spoj prenosi dvije komponete sile i tri komponente momenata. Linijski klizni spoj se pojavljuje u primjenama.

Višestruki kuglasti zglob

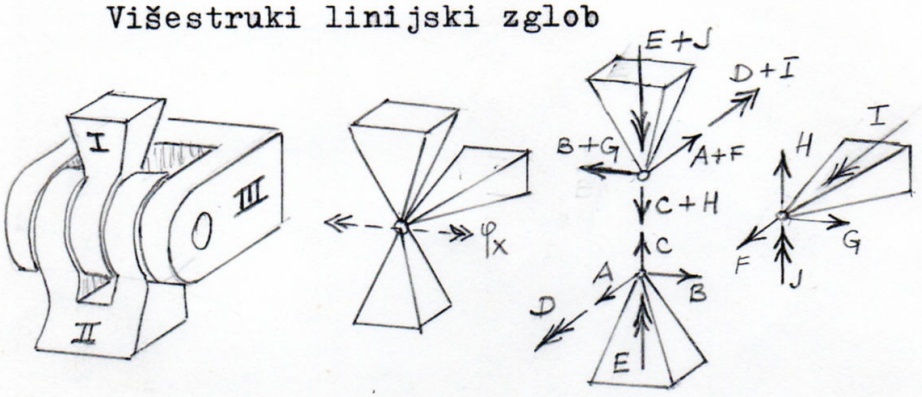


Višestruki zglob je spoj tri ili više tijela koja su u kontaktu duž dijelova oplošja koncentričnih kugli. Pri promatranju kinematičkih svojstava jedno tijelo treba odabrati kao osnovno, za svako preostalo su moguće po tri rotacije oko osi.
Statičko svojstvo spoja će se promatrati na isti način. Jedno se tijelo smatra osnovnim (na skici je to tijelo I), a druga se promatraju kao da su u spoju samo s osnovnim tijelom, pa će svojstvo višestrukog spoja triju tijela odgovarati zajedničkim svojstvima dvaju kuglastih zglobova. Spoj četriju tijela odgovarati će djelovanju triju kuglastih zglobova, itd. Ako je m broj tijela spojenih višestrukim kuglastim zglobom,

HWPK-85-91 11.11

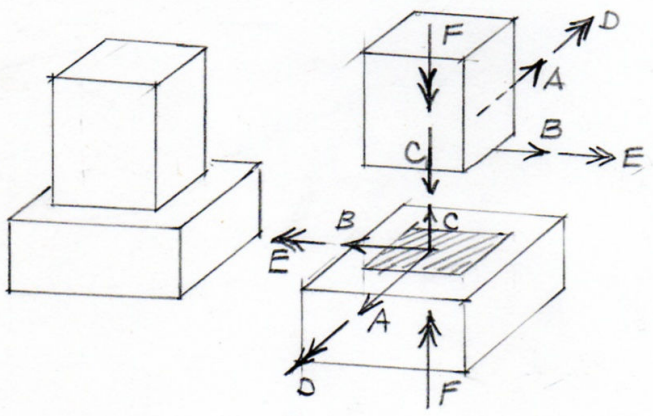
onda će statičko djelovanje biti odredjeno s 3·(m - 1) skalarnih podataka t.j. reakcija.
Na skici je kao osnovno tijelo odabrano tijelo I. Spoj tijela II i tijela I se statički može prikazati s tri sile na okomitim pravcima: A,B,C. Spoj tijela III i tijela I se statički može prikazati s daljnje tri sile na okomitim pravcima D,E,F. Najjednostavnije je, da su strijelice uz sile za tijelo II paralelne s odgovarajućim strijelicama za tijelo III. U tom slučaju će na tijelo I djelovati sile: A+D, B+E, C+F.

Višestruki linijski zglob



Višestruki linijski zglob je spoj tri ili više tijela duž oplošja koncentričnih kružnih valjaka, i ravnih ploha okomitih na os valjaka. Pri promatranju kinematičkih svojstava treba jedno tijelo odabrati kao osnovno; za svako preostalo moguća je po jedna rotacija oko osi valjka.
Statičko svojstvo će se analogno promatrati. Jedno se tijelo smatra osnovnim (na skici tijelo I) a druga se tijela promatraju tako kao da su u spoju samo s osnovnim tijelom. Prema tome će zglob u kojem su spojena tri tijela po funkciji odgovarati funkcijama dvaju linijskih zglobova. Ako je m broj tijela spojenih višestrukim zglobom njegova će funkcija odgovarati funkciji (m - 1) linijskih zglobova.
Na skici je kao osnovno tijelo odabrano tijelo I. Uz tijelo II su uvedene reakcije koje odgovaraju linijskom zglobu izmedju tijela I i tijela II. Uz tijelo III su uvedene reakcije koje odgovaraju linijskom zglobu izmedju tijela I i tijela III. Na tijelo I će djelovati zbrojevi odgovarajućih reakcija za tijela IIi III.

Kruti spoj



Kruti spoj pretstavlja sve načine spajanja koji su potpuni t.j. nisu mogući nikakovi relativni stupnjevi slobode gibanja i medju dva tijela. Praktična realizacija tog spoja može biti pomoću vijaka,zakovica, zavarivanja ili ljepljenja. Za promatranje rezultirajućeg djelovanja svi su ti slučajevi jednaki spoj;prenosi svih šest komponenti rezultirajućeg djelovanja, a to su tri sile i tri momenta.

Simbol krutog spoja u točki nije posebno prikazan, jer se kod njega tijela razdvajaju linijom, kao i kod spoja konačnih dimenzija.

HWPK-85-92

Posredni spojevi

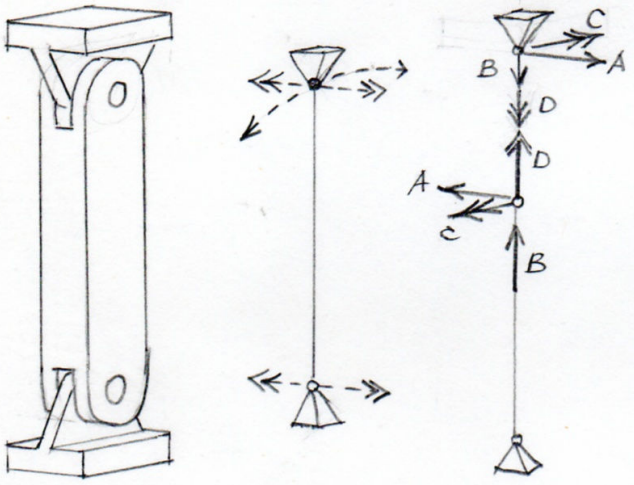
Kod posrednih spojeva se tijela statičkog sistema spajaju na jedno ili više specijalnih tijela, pomoću kojih se ostvaruje spoj. Ta specijalna tijela će se ovdje nazivati "spojni elementi". Spojni elementi su najčešće po dimenziji bitno manji od tijela u čijem spajanju posreduju.

Spojni element je specijalno tijelo u statičkom sistemu pomoću kojeg se spajaju druga tijela, a uvodi se zbog postizavanja traženih svojstava spoja.

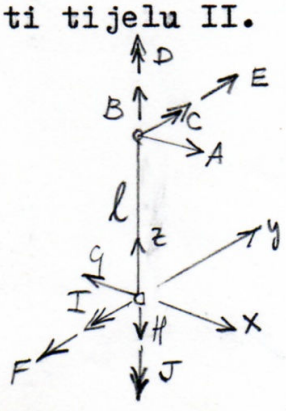
U najjednostavnijem slučaju promatranja uloge spojnih elemenata u statičkom sistemu uvodi se idealizacija, prema kojoj na spojni element djeluju samo sile u njegovim spojevima. Znači da se sve ostale sile, pa i vlastita težina elementa zanemaruju.

U tom slučaju iz uvjeta ravnoteže spojnog elementa proizlaze statička svojstva spoja, pa se pri promatranju ravnoteže statičkog sistema, ravnoteža spojnog elementa više ne treba promatrati.

Linijsko zglobni štap



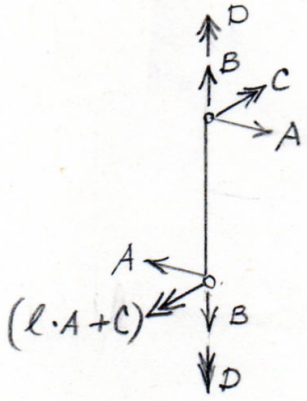
Linijsko zglobni štap posreduje pri spajanju dvaju tijela. Sa svakim od tih tijela je linijsko zglobni štap spojen s linijskim zglobom. Analiza svojstava spoja provesti će na jednom od tih zglobova. (na skici je odabran gornji zglob). U tom zglobu je omogućena relativna rotacija dvaju tijela oko osi gornjeg zgloba i zbog toga se ne će prenositi odgovarajući moment. Ali os gornjeg zgloba može još i translatorno rotirati oko donje osi. Kako se promatraju samo svojstva u mirovanju, ta mogućnost pomicanja po kružnici ekvivalentna je u proizvoljno maloj okolini translaciji po tangenti, pa se može smatrati da tijelo I ima u odnosu na tijelo II mogućnost translacije (infinitezimalne) po pravcu i rotacije oko osi.
U rezultirajućem djelovanju iščezavaju upravo komponente koje odgovaraju mogućim relativnim stupnjevima slobode, pa preostaju dvije sile i dva momenta. Štap će se pri daljenjem promatranju pridružiti tijelu II.



Do istog zaključka se može doći i isključivo statičkim razmatranjem. Promatra se spojni element i sile koje na njega djeluju prema svojstvima spojeva, a to su u ovom slučaju dva linijska zgloba. Iz suma projekcija na tri osi, dobiva se:

$G = A; \quad H = B; \quad F = E$

HWPK-85-93



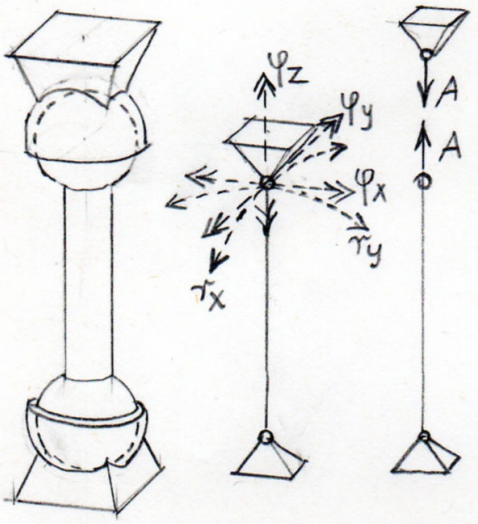
Iz uvjeta iščezavanja zbroja momenata oko osi x, dobiva se: $l \cdot E = 0$; slijedi: $E = 0$ i $F = 0$

Iz uvjeta iščezavanja zbroja momenata oko osi y dobiva se: $I = l \cdot A + C$

Iz uvjeta iščezavanja zbroja momenata oko osi z dobiva se: $J = D$

Nakon toga mogu se djelovanja na donjem linijskom zglobu direktno raziti pomoću djelovanja na gornjem. Pri tome komponente koje iščezavaju nisu ni označen strijelicom.

Kuglasto zglobni štap



Kuglasto zglobni štap posreduje pri spajanju dvaju tijela. Sa svakim od tih tijela je štap spojen pomoću kuglastog zgloba. Analiza svojstava tog posrednog spoja provesti će se na jednom od kuglastih zglobova. Na skici je odabran gornji zglob. U tom zglobu je omogućena rotacija oko tri osi, pa se ne prenosi niti jedan moment. Osim toga, može se centar gornjeg zgloba pomicati po oplošju kugle čije je središte u donjem zglobu. Ta mogućnost gibanja po kuglinoj plohi, ekvivalentna je u proizvoljno maloj okolini gibanju u ravnini, pa tijelo I ima u odnosu na tijelo II mogućnost dviju infinitezimalnih translacija po okomitim pravcima. Ti pravci su tangente na kuglinu plohu. Ukupno je moguće pet relativnih stupnjeva slobode gibanja, pa je povezana samo jedna sloboda, a to je translacija na pravcu koji spaja središta kugli. Statičko svojstvo čini samo jedna sila i to na pravcu koji spaja središte kugli.

U ovom slučaju je statičko svojstvo lakše izvesti direktno: na štapu su moguće samo kontaktne sile u dva kuglasta zgloba. Kontaktne sile su za svaku kuglu sigurno ekvivalentne nekoj koncentriranoj sili koja prolazi središtem. Prema tome je ukupno djelovanje ekvivalentno djelovanju dviju koncentriranih sila. Tijelo na koje djeluju dvije koncentrirane sile može biti u ravnoteži samo ako sile djeluju na istom pravcu, a to je u ovom slučaju spojnica središta kugli.

Kuglasto zglobni štap je osnovni tip spoja, jer prenosi samo jednu silu na zadanom pravcu. Pomoću više kuglasto zglobnih štapova mogu se prikazati djelovanja proizvoljnog spoja.

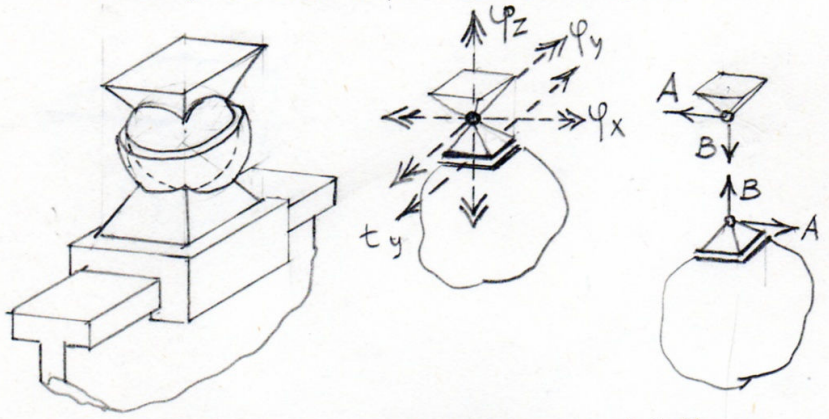
Kuglasto zglobni štap se u svakom slučaju može okretati oko svoje osi. To njegovo svojstvo ne utječe na ponašanje statičkog sistema kao cjeline, pa se o toj rotaciji ne vodi računa.

HWPK-85-94 12.11.

Kuglasto zglobni štap se pojavljuje u strojarskim primjenama i u nekim slučajevima ispitivanja materijala.

Kuglasto zglobni štap je po funkciji ekvivalentan spoju u kojem se kugla nalazi izmedju dvije paralelne ravne plohe. Zbog malih kontaktnih ploha se spoj s kuglom u praksi ne primjenjuje.

Linijsko klizni kuglasti zglob



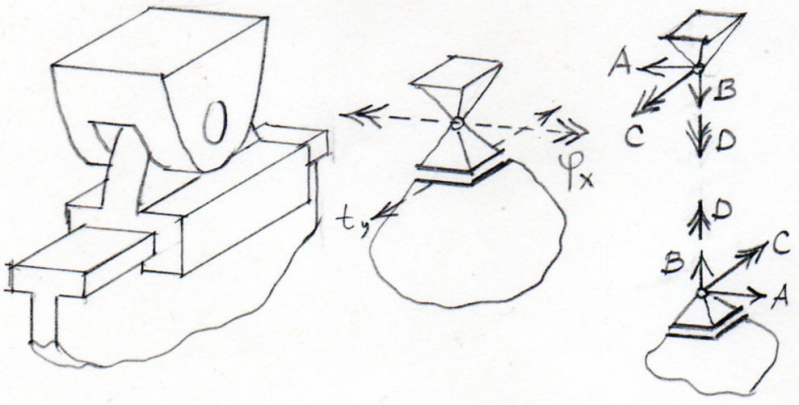
Linijsko klizni kuglasti zglob sadrži jedan spojni element koji je s jednim tijelom spojen kuglastim zglobom, a s drugim tijelom pomoću linijsko kliznog spoja. Izmedju dva tijela moguća se četiri relativna stupnja slobode gibanja: tri rotacije i jedna translacija po pravcu. Spriječene su samo dvije translacije na pravcima okomitim na pravac klizanja. Spoj će prenositi samo dvije sile na pravcima okomitim na pravac klizanja.

Linijsko klizni kuglasti zglob je po funkciji ekvivalentan spoju u kojem je kugla u kontaktu s valjkastim žlijebom, ali se zbog kontakta duž linije taj spoj u praksi izbjegava.

Linijsko klizni kuglasti zglob se pojavljuje u primjenama.

HWPK-85-95

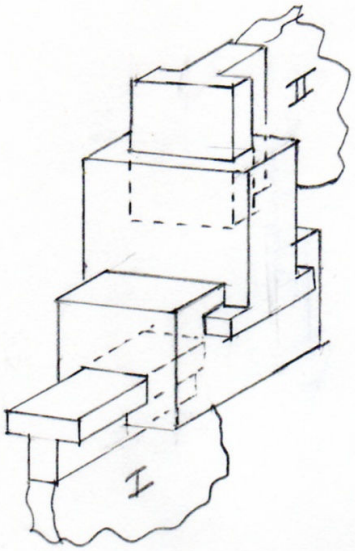
Linijsko klizni linijski zglob

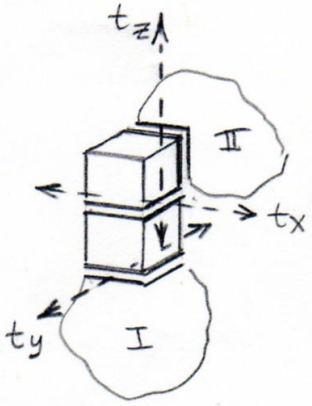


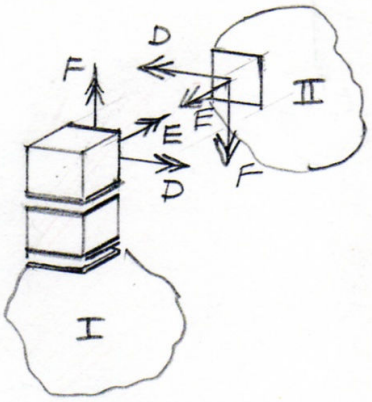
Linijsko klizni linijski zglob sadrži jedan spojni element, koji je s jednim tijelom spojen linijskim zglobom, a s drugim tijelom pomoću kliznog spoja. Izmedju dva tijela moguća su dva relativna stupnja slobode gibanja: jedna rotacija i jedna translacija oko osi. Sila i moment s istom mehaničkom karakterisistikom kao mogući stupnjevi slobode, iščezavaju. Prema tome spoj prenosi dvije sile na pravcima okomitim na pravac klizanja i dva momenta na pravcima okomitim na os rotacije.

Linijsko klizni linijski zglob se pojavljuje u primjenama.

Translatorni spoj



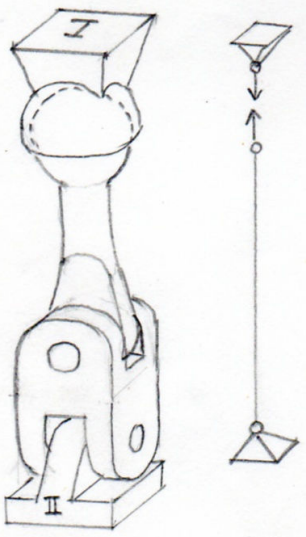


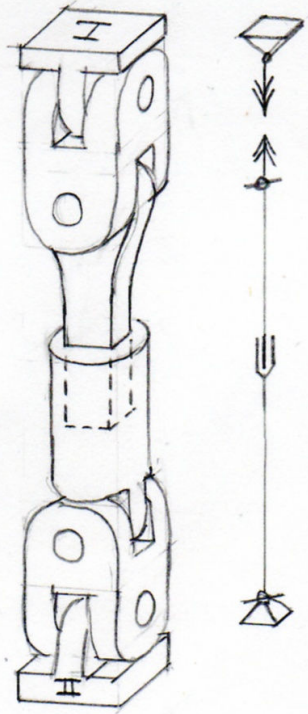


Translatorni spoj sadrži dva spojna elementa. Elementi su medjusobno spojeni linijskim kliznim spojem. Svaki od spojnih elemenata je s jednim od tijela spojen linijskim kliznim spojem. Ukupno se u translatornom spoju pojavljuju tri linijsko klizna spoja na okomitim pravcima klizanja. Tijelo I se prema tijelu II može proizvoljno translatirati, ali se ne može rotirati, pa će spoj prenositi tri sile na okomitim pravcima. Translatorni spoj je komplementaran kuglastom zglobu koji omogućuje sve tri rotacije, a spriječene su sve translacije.

Translatorni spoj se pojavljuje u primjenama.

Kardansko-kuglasti zglobni štap i kardanska osovina.





Kardanski zglob omogućuje dvije rotacije oko osi, pa ga se može izvesti pomoću spojnog elementa koji je sa svakim od tijela spojen s linijskim zglobom.

Kardansko-kuglasti zglobni štap je posredni spoj koji sadrži dva spojna elementa. Štap je na jedno tijelo spojen kuglastim zglobom, a na drugo kardanskim zglobom. Po mehaničkoj funkciji je ekvivalentan kuglasto zglobnom štapu, ali je u ovom slučaju spriječena rotacija štapa, pa bi i on mogao preuzeti statičku funkciju.

Kardanska osovina je posredni spoj analogan kardansko kuglastom zglobnom štapu jer prenosi samo jedan moment paralelan s osi štapa, što se lako uočava pomoću kinematičke analize. Primjenjuje se u strojarstvu. Sastoji se od dva štapa spojena linijskim kliznim spo-

AWPK-85-96

jem. Svaki od štapova je s karadanskim zglobom spojen s jednim od tijela koja osovina povezuje.

Opterećenje

Opterećenje čine sve sile koje djeluju u sistemu i na sistem, osim sila u spojevima sistema i umutarnjih sila.

Pojam opterećenja pogodan je za definiranje rješavanja sistema i opis prepoznavanja sistema koji je povezan s rješavanjem.

Rješavanje spojenih sistema

Rješavanje spojenih sistema je odredjivanje sila u spojevima sistema za zadano opterećenje.

Rješavanje je osnovni zadatak koji se pojavljuje u proračunu konstrukcija. Kao zadano opterećenje pojavljuje se: vlastita težina konstrukcije, kontaktna djelovanja ljudi i predmeta koji se nalaze na konstrukciji, sile u spojevima izmedju promatranog sistema i drugih sistema koje konstrukcija sadrži i koji su se mogli prethodno riješiti i takozvana kvazistatička djelovanja.

Kvazistatičko djelovanje se odredjuje teoretskim ili eksperimentalnim metodama, a radi se o zamišljenom opterećenju pri kojem se konstrukcija nalazi u mehaničkom stanju koje je zadovoljavajuće blisko kritičnom stanju koje nastaje prilikom djelovanja koje izaziva gibanje objekta. Npr. umjesto složene simulacije gibanja konstrukcije prilikom potresa uvode se zamišljena mirna opterećenja za koja se provjerava sigurnost.

13.11 HWPK-85-97

Pri rješavanju i prepoznavanju sistema bitno je pitanje:

Da li se sile u spojevima mogu odrediti isključivo iz uvjeta ravnoteže?

Odgovor na to pitanje dobiva se analizom uvjeta ravnoteže pogodno odabranih dijelova sistema. Izbor dijelova ovisi o načinu na koji se u isistemu pojavljuju spojni elementi. Razlikovati će se tri slučaja:

a) Sistem sadrži tijela, a posredni spojevi spajaju samo po dva tijela. U tom slučaju se promatraju uvjeti ravnoteže za sva tijela u sistemu osim jednoga; znači odabrani dijelovi su samo tijela koja sistem sadrži.

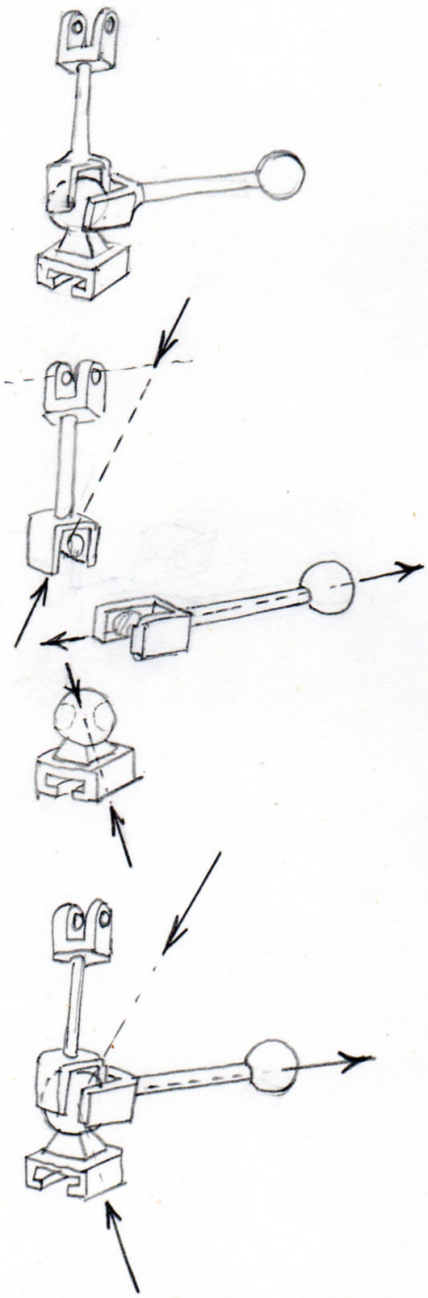
b) U sistemu postoje višestruki zglobovi koji spajaju samo spojne elemente, a sistem može, ali ne mora sadržavati tijela. U tom slučaju se osim uvjeta ravnoteže tijela moraju uvesti uvjeti ravnoteže i za neke daljnje dijelove sistema. Postupak će se objasniti u slijedećem odsjeku.

c)Situacije koje su različite i od a) i od b) se praktički ne pojavljuju, ali bi se svakako mogle analizirati tako, da se spojni

elementi više ne smatraju specijalnim tijelima, nego se tretiraju kao sva druga tijela. Time bi se broj uvjeta ravnoteže koji se simultano promatraju bitno povećao, a slučaj se formalno svodi na slučaj a).

Prostorni zglobni čvor

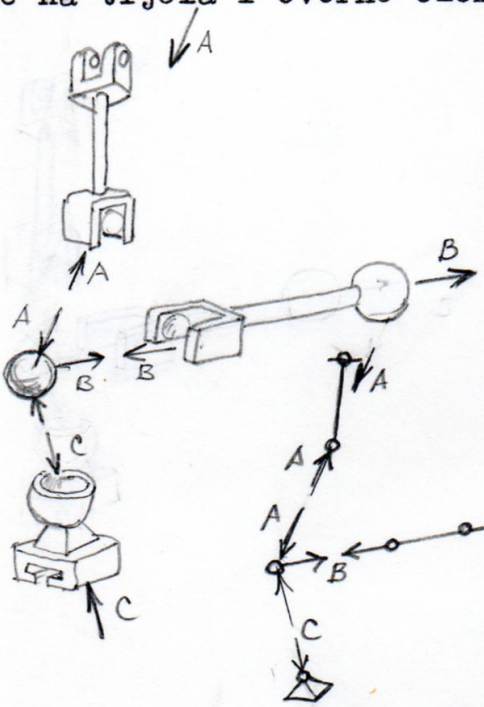
Prostorni zglobni čvor je višestruki kuglasti zglob u kojem se spajaju samo spojni elementi. U primjenama se čvorovi uglavnom formiraju samo sa zglobnim štapovima. Uvjeti ravnoteže svakog spojnog elementa zasebno su iskorišteni pri ustanovljavanju njegovih statičkih svojstava, što je omogućeno idealizacijom da djeluju samo sile u spojevima elementa. Ipak: za grupu spojnih elemenata kao za dio sistema mogu se postaviti neki uvjeti ravnoteže koji još nisu iskorišteni. Pokazati će se, da su to uvjeti ravnoteže točke.



Djelovanje kontaktnih sila u kuglastom zglobu može se za svaki element prikazati rezultantom koja prolazi središtem kugle. Element može biti u ravnoteži samo ako na proeee

broj čvorova. Kao šest zavisnih uvjeta mogu se odabrati svi uvjeti nekog tijela ili uvjeti nekih čvorova t.j. točaka što je već ranije pokazano.

Pokazako se pogodnim da se čvoru pridruži neki zamišljeni element za koji će se postavljati uvjeti ravnoteže točke, a spojni elementi bi se i u ovom slučaju mogli isključiti iz statičkih razmatranja o sistemu kao cjelini, i promatrale bi se samo sile koje oni prenose na tijela i čvorne elemente. Zamišlja se da čvor sadrži jednu zasebnu kuglu na koju su spojeni svi ostali elementi. Vidljivo je, da su sile kojima elementi djeluju na zamišljenu kuglu upravo jednake onima koje djeluju na sve priključene spojne elemente kao cjelinu, pa se umjesto ravnoteže tog dijela sistema može promatrati ravnoteža zamišljene kugle t.j. čvornog elementa.



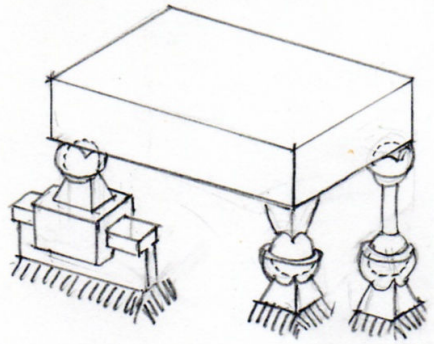
Kod sistema spojenih u točkama zamišljeni čvorni element je materijalna točka, pa se simbolički prikazuje kružnicom na koju djeluju sile spojnih elemenata.

Kako je prostorni zglobni čvor u konstrukcijama idealizacija, otpada i problem principjelnog prikazivanja funkcioniranja tog višestrukog zgloba.

Na čvor može djelovati zadana sila samo kao djelovanje spojnog elementa koji spaja promatrani sistem s drugim dijelovima konstrukcije, a uvjeti su takvi da se tu silu moglo unaprijed odrediti.
Ne sasvim precizno se kaže: "Opterećenje čvora može biti samo koncentrirana sila".

Podloga

Podloga je dio sistema koji se ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju. Uvodi se obično u izoliranim sistemima, pa se u tom slučaju za podlogu ne postavljaju uvjeti ravnoteže; upravo se ti uvjeti odabiru kao zavisni. Simbolički se prikazuje dijelovima konture sa sjenčanjem.

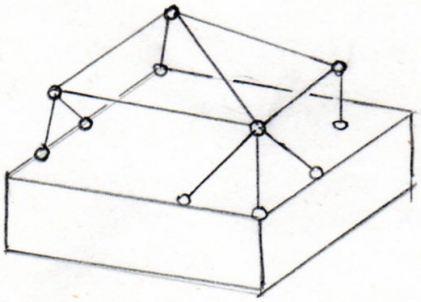


Ukoliko se u mehaničkom proračunu pojavljuju pomaci ili gibanja, a svojstva podloge nisu posebno definirana, smatrati će se da je podloga nepomična i nedeformabilna.

Treba uočiti da svi dijelovi konture prikazani na skicama i nacrtima označavaju samo jedan dio sistema, koji se ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.

AWPK-85-99

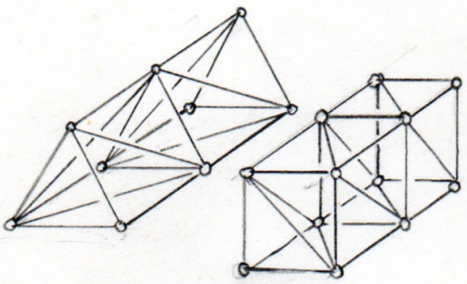
Prostorna rešetka



Prostorna rešetka je dio spojenog sistema koji sadrži samo prostorne zglobne čvorove i kuglasto zglobne štapove.

Štapni sistemi čiji su štapovi dovoljno vitki i spojeni krutim spojevima, smiju se proračunavati kao da su prostorne rešetke s idealnim kuglastim zglobovima.

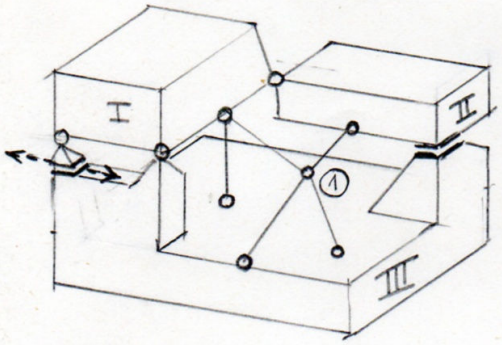
Rešetkasti nosač



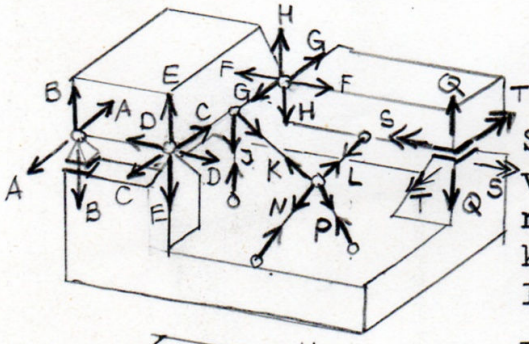
Rešetkasti nosač je geometrijski nepromjenjiv sistem koji sadrži samo prostorne zglobne čvorove i kuglasto zglobne štapove. Geometrijska nepromjenjivost se odnosi na medjusobne položaje čvorova

Osnovno o iskorištavanju uvjeta ravnoteže pri rješavanju spojenih sistema

HWPK-85-100

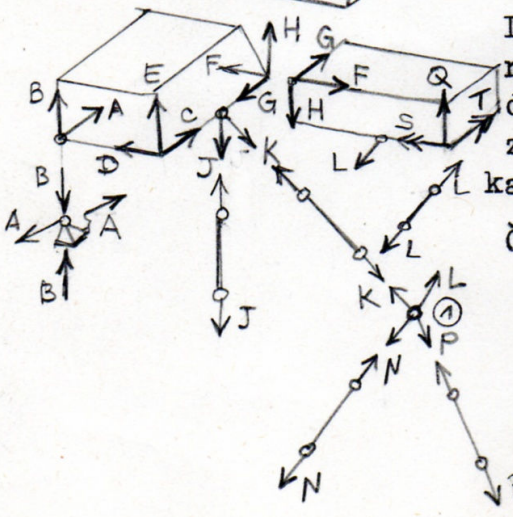


Pri rješavanju se obično koristi skica ili nacrt sistema, na kojima treba prepoznati dijelove sistema: tijela, čvorove, podlogu i spojne elemente.



Ucrtavaju se statička svojstva spojeva u tehničkoj notaciji i to tako da se prikažu djelovanja na oba dijela koje spoj povezuje. Odabiru se oznake za reakcije t.j. veličine komponenti rezultirajućeg djelovanja kontaktnih sila u spojevima.

Svakoj komponenti koja prikazuje djelovanje na jedno tijelo odgovara djelovanje na drugo tijelo u spoju, koje se prikazuje suprotnom strijelicom i istom veličinom t.j. reakcijom.



Djelovanja na spojne elemente se obično ne ucrtavaju u skicu sistema, ali se to dakako može provesti i tom slučaju se zbog preglednosti dijelovi sistema prikazuju razmaknuto.

Često se ne ucrtavaju djelovanja na podlogu.

U prikazu mora biti potpuno jasno, na koji se dio sistema pojedina strijelica odnosi.

Za odredjivanje sila u spojevima t.j. rješavanje sistema treba u općem slučaju postaviti $6t + 3n - 6$ uvjeta ravnoteže.

Najjednostavnije je, da se postave uvjeti za sva tijela osim jednoga i za sve čvorove (uvjeti ravnoteže točke). Ako postoje barem tri točke koje ne leže na istom pravcu, mogu se na poznati način odabrati šest uvjeta koji će biti zavisni, a svi preostali uvjeti točaka i svi uvjeti tijela će se postaviti za rješavanje.

Na taj se način dobiva sistem linearnih jednadžbi, pa se pitanje rješivosti svodi na ispitivanje determinante, a samo rješenje se svodi na rješavanje sistema linearnih algebarskih jednadžbi. Na taj način se mogu pregledno izvesti zaključci o rješenju i statičkim svojstvima sistema. Pri realizaciji može takav pristup voditi na velik broj računskih operacija. Prednost takovog pristupa je jednostavnost koja olakšava primjenu automatske obrade.

Nasuprot opisanom općem pristupu postoji razradjen niz specifičnih postupaka za većinu praktičnih slučajeva rješavanja, koji se ne mogu precizno obuhvatiti jednostavnim pravilom.

Zajedničko svojstvo tih postupaka je postavljanje niza pojedinačnih uvjeta ravnoteže tako, da se iz svakog uvjeta može odrediti direktno jedna reakcija, što znači da uvjet mora biti odabran tako da se u njemu osim tražene reakcije pojavljuje samo opterećenje i reakcije koje su već u prethodnim jednadžbama odredjene. To se uglavnom postiže tako, da se:

a) za postavljanje uvjeta ravnoteže osim pojedinih tijela i čvorova koriste pogodno odabrani podsistemi, koji mogu sadržavati više tijela i/ili čvorova, a mogu biti odabrani i samo radi postavljanja jednog uvjeta.

b) opterećenje rastavlja na pojedine dijelove i komponente za čija se djelovanja sistem zasebno rješava, a konačno rješenje dobiva zbrajanjem parcijalnih rješenja.

HWPK-85-101

Osnovno o prepoznavanju spojenih sistema pomoću statičkih svojstava

U uvodu o spojenim sistemima prikazana je podjela spojenih sistema pomoću kinematičkih svojstava. Podjela se može izvesti i iz statičkih svojstava.

Geometrijski nepromjenjivi sistemi se ponašaju kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju, što znači da su relativni pomaci dijelova sistema mogući samo uz deformaciju barem jednog dijela sistema. Djelovanje opterećenja unutar sistema izazvati će relativno pomicanje područja na koja opterećenje djeluje, a s time i deformaciju dijelova, dok unutarnje sile i sile u spojevima ne uravnoteže sistem. Može se zaključiti:

Geometrijski nepromjenjiv sistem može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje.

Opterećenje može biti proizvoljno u smislu rasporeda sila i momenata i smjerova njihovog djelovanja. Time još nije dobiven odgovor o veličini opterećenja koje sistem sa sigurnošću može izdržati. Da bi se ta veličina ustanovila, treba odrediti vezu napona u pojedinim tijelima s opterećenjem. Odgovarajući postupci će se kasnije uvesti.

Mehanizmi se ne ponašaju kao jedno kruto tijelo, što znači da su neki relativni pomaci dijelova sistema mogući bez deformacije dijelova sistema, dakle bez ikakovih unutarnjih sila, pa prema tome i bez sila u spojevima. Opterećenjima koja izazivaju upravo takove relativne pomake ne će se suprotstaviti sile u spojevima, pa ravnoteža ne će biti moguća. Postojati će specijalna opterećenja za koja će mehanizam moći ostati u ravnoteži. Može se zaključiti:

Mehanizam ne može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje.

Odredjeni sistem spada u geometrijski nepromjenjive. Specifično svojstvo odredjenog sistema je mogućnost promjene dimenzije bilo kojeg dijela, što će izazvati relativne pomake u spojevima, ali ne će izazvati deformacije u ostalim dijelovima, pa prema tome niti sile u spojevima. Deformaciju nekog dijela može izazvati optrećenje koje djeluje unutar tog dijela, koji će u cjelini biti u ravnoteži. Prema tome: ako je svako tijelo za sebe u ravnoteži, sile u spojevima iščezavaju. Zbog geometrijske nepromjenjivosti moguća je ravnoteža za proizvoljno opterećenje, pri čemu se mogu pojaviti sile u spojevima. Ove zaključke se može izraziti algebarski:

18.11 HWPK-85-102

Promatraju se svi nezavisni uvjeti ravnoteže iz kojih se mogu odrediti sile u spojevima sistema. Njihov broj je $s_o = 6t + 3n - 6$. Uvjeti će se shvatiti kao sistem lineranih jednadžbi iz kojih treba odrediti reakcije, t.j. sile i momente u spojevima. Desne strane će biti negativni doprinosi opterećenja, t.j zadanih djelovanja. Broj reakcija t.j. skalara koji odredjuju sile i momente u spojevima mora biti upravo s_o, a determinanta koeficijenata uz reakcije mora biti različita od nule, jer će se samo u tom slučaju biti moguća ravnoteža za proizvoljno opterećenje, t.j. proizvoljne desne strane, uz istovremeno zadovoljavanje uvjeta da sile u spojevima iščezavaju ako je svako tijelo za sebe u ravnoteži, t.j. desne strane identično iščezavaju (Cramerovo pravilo). Može se zaključiti:

Odredjeni spojeni sistem može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje, a sve sile u spojevima sistema mogu se odrediti iz uvjeta ravnoteže. Pri tome se ne računaju spojevi koji spajaju dijelove istog tijela; tzv. unutarnji spojevi.

Preodredjeni sistem spada u geometrijski nepromjenjive. Specifično svojstvo preodredjenog sistema jest, da u njemu postoji barem jedna mjera koju dva tijela moraju točno zadovoljavati da se sistem može

sastaviti bez deformacije dijelova. Ako se ta mjera na dva spojena tijela ne poklapa i sistem je spojen uz deformaciju dijelova, pojaviti će se unutarnje sile i sile u spojevima i bez opterećenja.

Svaki preodredjeni sistem može se uvodjenjem novih stupnjeva slobode u spojeve svesti na odredjeni sistem. Uvodjenje stupnjeva slobode znači ukidanje nekih reakcija, pa se može zaključiti da preodredjeni sistem ima broj reakcija, t.j. skalara koji odredjuju sile i momente u spojevima veći od s_0, pa se sve reakcije ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Na osnovi izloženog slijedi:

Preodredjeni spojeni sistem može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje, a sve sile u spojevima se ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Mehanizmi se dijela analogno kao geomterijski nepromjenjivi sistemi. Navesti će se samo definicije:

Mehanizam u užem smislu može ostati u stanju ravnoteže samo za neka posebna opterećenja, a sve sile u spojevima semogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Mehanizam koji sadrži preodredjenost može ostati u stanju ravnoteže samo za neka osebna opterećenja, a sve sile u spojevima se ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

HWPK-85-103

Pomoću prikazanih zaključaka i definicija provesti će se klasifikacija spojenih sistema. Pokazalo se pogodnim da se uvedu četiri tipa klasifikacija:

a) Opća klasifikacija spojenih sistema. Provodi se prema općim svojstvima i za djelovanje proizvoljnog opterećenja u prostoru.

b) Klasifikacija ravnih spojenih sistema. Ravni sistemi su specijalni slučaj spojenih sistema i promatraju se samo za djelovanje sila u posebnoj ravnini i pripadnih okomitih momenata.

c) Opća klasifikacija štapnih sistema. Štapni sistemi su specijalni slučaj spojenih sistema i njihovo rješavanje se definira kao odredjivanje svih reznih sila. Podjela na odredjene i preodredjene štapne sisteme se provodi prema takovoj definiciji rješavanja.

d) Klasifikacija ravnih štapnih sistema. Ravni štapni sistemi su specijalni slučaj štapnih sistema i promatraju se samo za djelovanje opterećenja čije sile su posebnoj ravnini, a momenti su okomiti na tu ravninu.

Opća klasifikacija spojenih sistema

Opća klasifikacija se zasniva na mehaničkim svojstvima sistema koja su definirana u prostoru, pa bi se mogla nazvati i "klasifikacija spojenih sistema prema djelovanju u prostoru".

U teoriji spojenih sistema se često uvodi pojam prostornih sistema, koji se odnosi na analizu svojstava u prostoru. U tom smislu opća klasifikacija sadrži opća promatranja o prostornim sistemima, a specijalni postupci u kojima se prostorna svojstva analiziraju pomoću ravnih podsistema će se ovdje obraditi zasebno.

Sam naziv "prostorni sistem" nije upotrijebljen jer su i ravni sistemi prostorne tvorevine, koje imaju mehanička svojstva vezana na jednu istaknutu ravninu, pa ima smisla uvodjenje odgovarajuće klasifikacije. Ravni sistemi se mogu klasificirati i prema općoj klasifikaciji, jer kao prostorne tvorevine imaju svojstva definirana u prostoru.

U općoj klasifikaciji spojenih sistema se ignoriraju spojevi koji spajaju dijelove istog tijela. Ti će se spojevi nazivati "unutarnji spojevi".

Spojeni sistemi se dijele na geometrijski nepromjenjive i mehanizme.

#WPK-85-104

Geometrijski nepromjenjivi sistemi

Statička definicija: Geometrijski nepromjenjivi spojeni sistemi mogu ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje.

Opće svojstvo: Geometrijski nepromjenjivi spojeni sistem se ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.

Kinematičko svojstvo: Kod geometrijski nepromjenjivog sistema su relativni pomaci točaka sistema mogući samo uz deformaciju barem jednog tijela ili spojnog elementa.

Geometrijski nepromjenjivi sistemi se dijele na odredjene spojene sisteme i preodredjene spojene sisteme.

Odredjeni spojeni sistemi

Statička definicija: Odredjen spojeni sistem može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje, a sve sile i momenti u spojevima se mogu odrediti isključivo iz uvjeta ravnoteže.

Algebarska formulacija statičke definicije: Broj reakcija u sistemu je jednak broju nezavisnih uvjeta ravnoteže izoliranog sistema. Determinanta koeficijenta uz reakcije različita od nule.

Opća svojstva: Odredjeni spojeni sistem se ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju. Promjena oblika bilo kojeg tijela moguća je bez pojave sila u spojevima i bez pojave unutarnjih sila u ostalim tijelima.
Prekidom bilo kojeg tijela i/ili isključenjem bilo kojeg spoja odredjeni spojeni sistem prelazi u mehanizam, dakle ne ponaša se više kao jedo tijelo u krutom agregatnom stanju.

Statičko svojstvo: Ako iščezava rezultirajuće djelovanje opterećenja za svako tijelo i čvor za bno, iščezavati će i sile i momenti u svim spojevima sistema.
Njjednostavniji slučaj: ako ne postoji opterećenje, iščezavaju reakcije u sistemu.

Kinamatička svojstva: Medjusobni pomaci točaka sistema mogući samo uz deformaciju barem jednog tijela ili spojnog elementa.
Deformacija bilo kojeg tijela ili skupa tijela moguća bez deformacije ostalih tijela, sve dok se raspored spojeva toliko ne promijeni da sistem prijedje u mehanizam.

Odredjeni spojeni sistemi će se podijeliti na : elementarne, ulančene, rekurzivno rješive, nepravilne i složene.

Elementarni sistemi

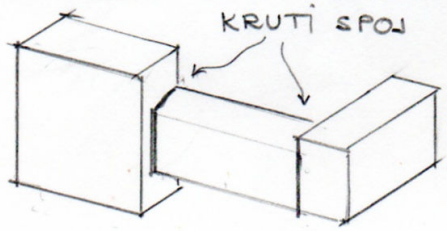
Elementarni sistemi su odredjeni spojeni sistemi koji se mogu neposredno prepoznati prema geometrijskim odnosima spojeva i svojstvima spojeva.

Elementarni sistemi će se podijeliti na: lanac krutih spojeva, prosto spojene sisteme, trozglobni sistem.

HWPK - 85 - 105

Lanac krutih spojeva

Lanac krutih spojeva je odredjen spojeni sistem koji se sastoji od dva ili više tijela spojenih krutim spojevima tako, da se prekidanjem bilo kojeg spoja lanac raspada na dva dijela.

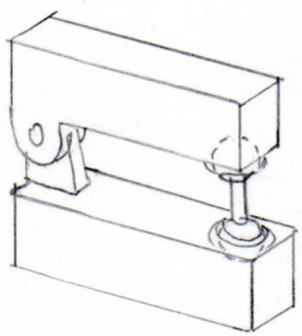


Očito se u tom slučaju sile u spojevima mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže za proizvoljno opterećenje.
Korisno je uočiti analogiju s otvorenim štapom.

Prosto spojeni sistemi

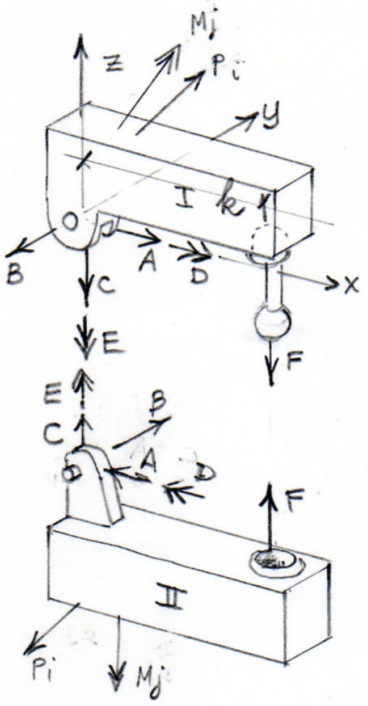
Prosto spojeni sistemi su odredjeni spojeni sistemi koji sadrže samo dva tijela ili samo jedno tijelo i jedan čvor, koji se mogu neposredno prepoznati prema geometrijskim od nosima i svojstvima spojeva.

Prosti spoj s linijskim zglobom i zglobnim štapom



Spojeni sistem koji sadrži dva tijela spojena linijskim zglobom i kuglasto zglobnim štapom biti će odredjen, ako statička os kuglasto zglobnog štapa ne siječe i nije paralelna s osi linijskog zgloba. Oblik tijela nije bitan.

Najjednostavniji je simetričan slučaj: os zglobnog štapa je okomita na os linij-



skog zgloba. Provesti će se analiza statičkih svojstava, t.j. postaviti će se nezavisni uvjeti ravnoteže izoliranog sistema i analizirati mogućnost odredjivanja sila i momenata u spojevima. Tijeka su skicirana razdvojeno. Kao nezavisni će se odabrati uvjeti jednog tijela (I). Treba ucrtati statička svojstva spojeva. Reakcije A,B,C, D,E odredjuju djelovanje linijskog zgloba, a reakcija F odredjuje djelovanje štapa. U osnovnoj formulaciji uvjeti ravnoteže tijela I u sistemu x,y,z glase:

$$A \qquad = -\sum_{OPT} P_{xi}$$

$$-B \qquad = -\sum_{OPT} P_{yi}$$

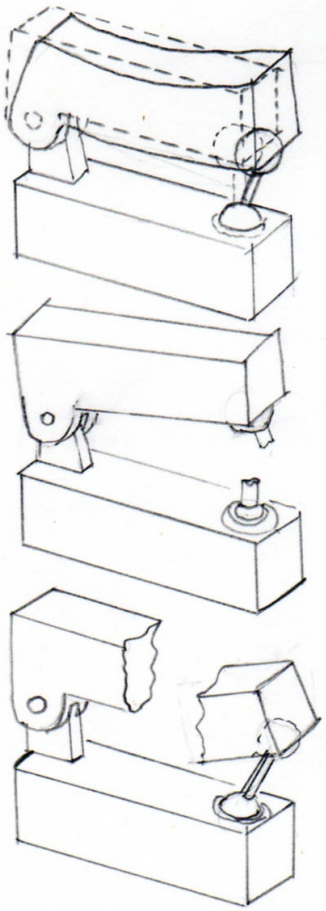
$$-C \quad -F \qquad = -\sum_{OPT} P_{zi}$$

$$D \qquad = -\sum_{OPT} M_{xi}$$

$$k \cdot F \qquad = -\sum_{OPT} M_{yi}$$

$$E \qquad = -\sum_{OPT} M_{zi}$$

Dobiven je dijagonalan sistem linearnih jednadžbi koji je rješiv ako je udaljenost statičke osi zglobnog štapa i osi linijskog zgloba k različita od nule. Desne strane pretstavljaju negativne doprinose opterećenja. Vidljivo je, da je rješenje moguće za proizvoljne desne strane i time je dokazana odredjenost. Ostala svojstva se mogu provjeriti intuitivno.



Na taj se način može prihvatiti da se sistem ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.

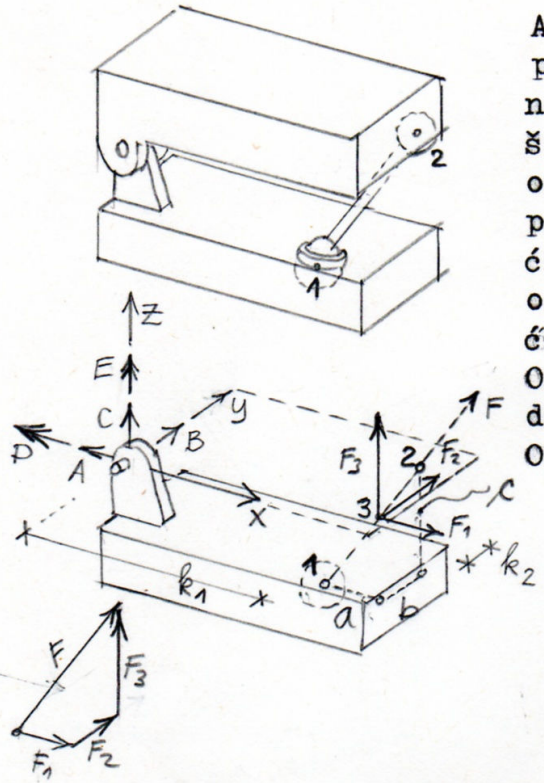
Moguća je bilo koja promjena oblika tijela unutar konačnih granica, bez deformacije drugih dijelova i bez sila u spojevima.

Skicirana je promjena oblika tijela I. Zaokretanjem u zglobu i promjenom položaja zglobnog štapa sistem će se "prilagoditi" toj promjeni.

Može se zamisliti isključenje nekog spoja napr. zglobnog štapa, pa je vidljivo da sistem prelazi u mehanizam.

Sistem će prijeći u mehanizam i ako se prekine jedno od tijela koje sadrži.

HWPL-85-106



Analizirati će se i opći slučaj kod kojeg pravac sile u zglobnom štapu nije okomit na os linijskog zgloba. Sila u zglobnom štapu ima veličinu F. Pravac sile F je odredjen spojnicom središta zglobova štapa, koja su označena s 1 i 2. Promatrati će se uvjeti ravnteže tijela II koji su odabrani kao nezavisni, a uvjeti tijela I će u ovom slučaju biti zavisni.
Odabran je koordinatni sistem x,y,z tako da se os y poklapa s osi linijskog zgloba. Odabrana je osnovna formulacija uvjeta ravnoteže i odredjivanje momenata pomoću duljina i veličina komponenti. Sila F je prikazana vlačnom strijelicom i rastavljena na tri komponete čije su veličine F_1, F_2, F_3. Za rastavljanje se može odabrati bilo koja točka s pravca djelovanja, ovdje je odabrana točka 3 u kojoj pravac sile F probada ravninu xy. Strijelice uz komponente su odabrane tako da veličine budu pozitivne ako je veličina sile F pozitivna. Medjusobni položaj točaka 1 i 2 odredjuju dužine a,b,c od kojih je svaka paralelna s po jednom koordinatnom osi. f je udaljenost točaka 1 i 2, odredjena s:

$$f = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Iz sličnosti lika a,b,c,f i poligona ekvivalencije F_1, F_2, F_3, F dobivaju se izrazi koji povezuju veličine komponenti s veličinom sile:

$$F_1 = \frac{a}{f} F \qquad F_2 = \frac{b}{f} F \qquad F_3 = \frac{c}{f} F$$

Za odredjivanje momenata oko osi po neformalnom postupku potrebne su udaljenosti pravaca komponenti od koordinatnih osi. Zbog pogodnog izbora točke u kojoj je F rastavljan potrebne su samo udaljenosti k_1 i k_2. Iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila na osi x,y,z i uvjeta iščezavanja svih momenata oko osi x,y,z, dobivaju se jednadžbe:

$$-A \qquad + \frac{a}{f} F = - \sum_{OPT} P_{xi}$$

$$B \qquad + \frac{b}{f} F = - \sum_{OPT} P_{yi}$$

$$C \qquad + \frac{c}{f} F = - \sum_{OPT} P_{zi}$$

$$-D \qquad + k_2 \cdot \frac{c}{f} F = - \sum_{OPT} M_{xi}$$

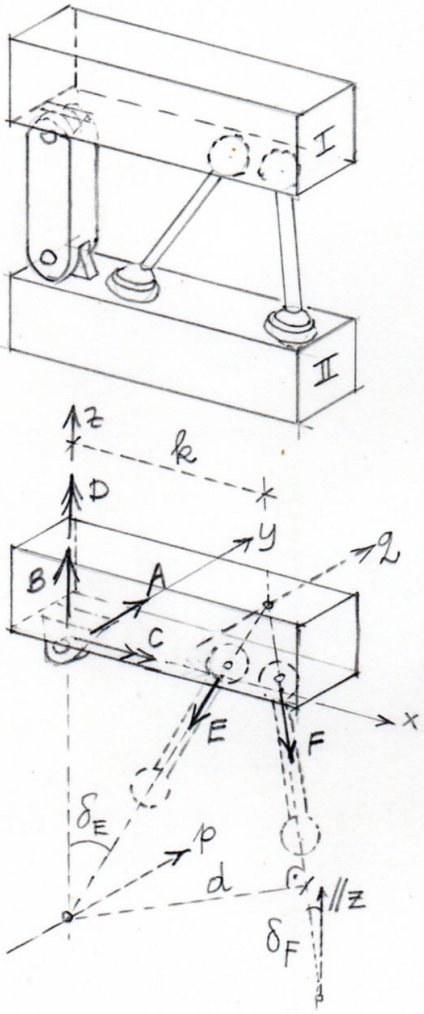
$$k_1 \cdot \frac{c}{f} F = - \sum_{OPT} M_{yi}$$

$$E + \left(k_1 \cdot \frac{b}{f} - k_2 \frac{a}{f} \right) F = - \sum_{OPT} M_{zi}$$

HWPL-85-107

I bez postavljanja determinante može se uočiti uvjet rješivosti k_1 i c moraju biti različiti od nule. Ako bi k_1 bio nula pravac sile bi sjekao os zgloba, a ako bi c bio nula pravac sile bi se nalazio u ravnini s osi zgloba, pa je time objašnjen geometrijski uvjet odredjenosti koji se svodi na uvjet rješivosti.

Prosti spoj s linijsko zglobnim štapom i dva kuglasto zglobna štapa.



Promatrati će se samo simetrični slučaj prikazan na skici. Kao šest nezavisnih uvjeta ravnoteže odabrani su uvjeti tijela I. Na zasebnoj skici je prikazano tijelo I i djelovanje sila u spojevima na njega. Reakcije A,B,C,D se odnose na linijsko zglobni štap, a reakcije E i F na kuglasto-zglobne štapove. Odabrana je jedna od alternativnih formulacija uvjeta ravnoteže. Koordinatne osi x,y,z su odabrane tako da osi x i z leže u ravnini simetrije. Os z presjeca osi linijskih zglobova, a os x presjeca os linijskog zgloba uz tijelo I. Uvodi se još os p koja prplazi presjecištem pravaca sila D i E i os q koje prolazi presjecištem pravaca sila E i F. Osi p i q su paralelne s osi y.

Iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila na osi y i z i uvjeta iščezavanja momenata oko osi od svih sila i koncentriranih momenata za osi x,z,p,q, dobiva se sistem lineranih algebarskih jednadžbi:

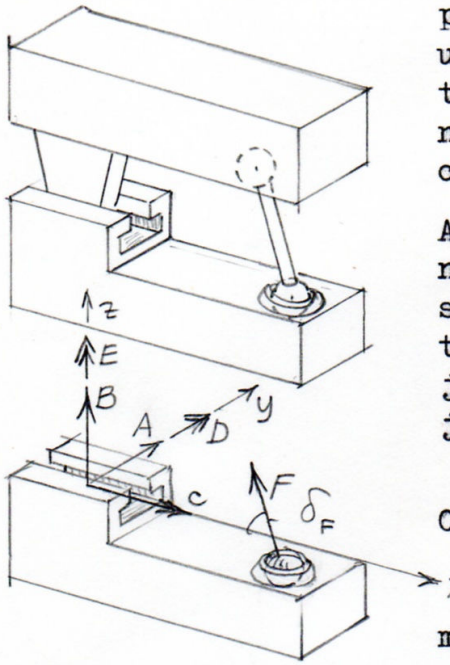
A	$= -\sum_{OPT} P_{yi}$
$D - \cos\delta_E E - \cos\delta_F F$	$= -\sum_{OPT} P_{zi}$
C	$= -\sum_{OPT} M_{xi}$
D	$= -\sum_{OPT} M_{zi}$
$d \cdot F$	$= -\sum_{OPT} M_{pi}$
$k \cdot B$	$= -\sum_{OPT} M_{qi}$

Zbog jednostavnosti sistema, može se i ovdje direktno zaključiti o uvjetu rješivosti, bez formalnog postavljanja determinante. Reakcije A,C,D se mogu odrediti bezuvjetno. Reakcije B i F se mogu odrediti ako udaljenosti k i d nisu nula i ako su definirane. Ako se mogu odrediti E i F , odredjivanje reakcije D je bezuvjetno. Geometrijski uvjet: k i d su definirani i nijedan nije nula, može se formulirati i ovako: osi zglobnih štapova nisu paralelne i ne

HWPK- 85- 108

sijeku se u istoj točki. Kako se u tom slučaju sile i momenti u spojevima mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže za proizvoljno opterećenje to je ujedno i uvjet odredjenosti prikazanog sistema.

Prosti spoj s linijsko kliznim spojem i kuglasto zglobnim štapom



Promatrati će se samo simetričan slučaj prikazan na skici. Kao šest nezavisnih uvjeta ravnoteže odabrani su uvijeti tijela II, koje je prikazano na zasebnoj skici. Postupak je analogan postupcima prikazanim za prethodne slučajeve.

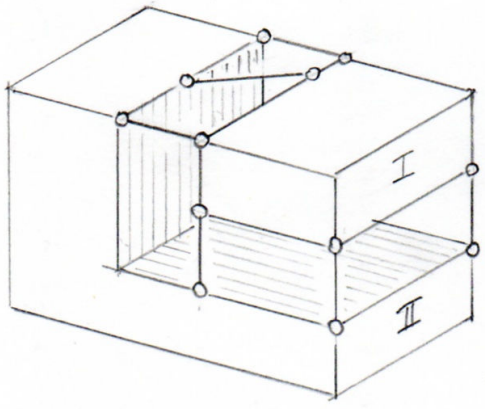
Ako se postave uvjeti ravnoteže u osnovnoj formulaciji, lako se zaključuje da se sve reakcije mogu bezuvjetno odrediti, osim reakcije C, koja se jedina pojavljuje u uvjetu iščezavanja projekcija svih sila na os x:

$$-\cos\delta_F \cdot F = -\sum_{OPT} P_{xi}$$

C se iz te jednadžbe može odrediti ako je $\cos\delta_F$ različit od nule, t. j. ako statička os zglobnog štapa nije okomita na pravac klizanja linijskog spoja, a to je ujedno i uvjet odredjenosti prikazanog sistema. Analogno se može zaključiti i koji je uvjet odredjenosti za nesimetrični slučaj: statička os zglobnog štapa ne leži u ravnini okomitoj na pravac klizanja linijskog spoja.

HWPK- 85-109

Prosti spoj dvaju tijela s šest kuglasto zglobnih štapova.



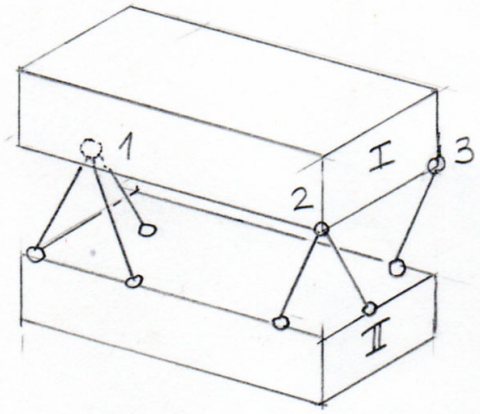
Opći slučaj spajanja dvaju tijela sa šest zglobnih štapova spada u nepravilne sisteme. Ovdje će se prikazati dva grupiranja štapova kod kojih se odredjenost može direktno ustanoviti.

a) Tri štapa su paralelna, a daljnja tri leže u ravnini koja nije paralelna s prva tri pravca.

Prikazana je skica sistema spojenog u točkama. Sistem s konačnim nedeformabilnim spojevima rješavati će se analogno; kao točke u kojima su tijela spojena pojaviti će se središta kuglastih zglobova.

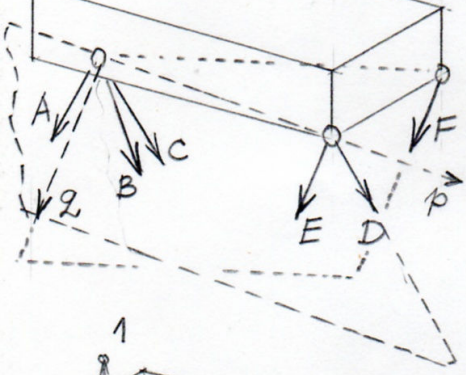
Prikazani slučaj se u rješavanju svodi na odredjivanje šest uravnotežavajućih sila koje leže na zadanim pravcima. Ovakovo grupiranje sila je prikazano na str. 24. pa su uvjeti rješivosti poznati. Pomoću uvjeta rješivosti se direktno mogu izraziti uvjeti odredjeno-

sti:
a) paralelni zglobni štapovi ne smiju ležati u istoj ravnini
b) zglobni štapovi koji leže u ravnini ne smiju biti paralelni i njihove osi se ne smiju sijeći u istoj točki.

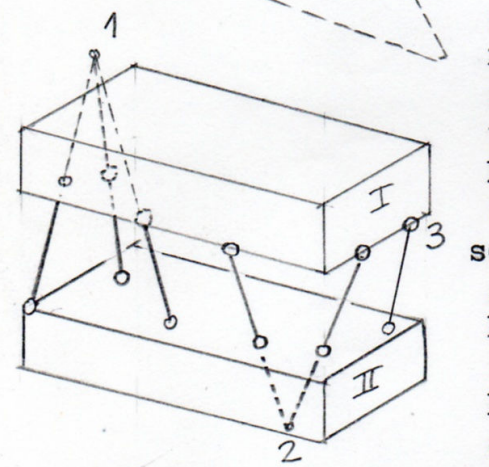


b) Tri štapa se sijeku u jednoj točki, dva daljnja štapa se sijeku u drugoj točki i šesti štap prolazi trećom točkom.

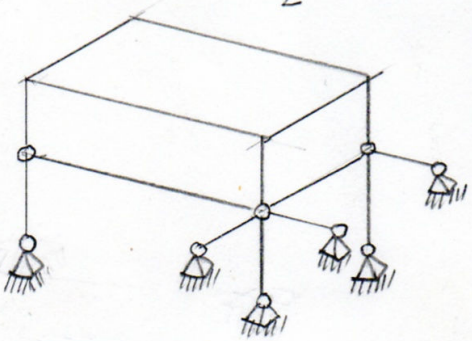
Rješavanje ovog sistema vodi na uravnotežavanje sa šest sila na zadanim pravcima koje su specifično grupirane. Ovaj slučaj nije prikazan u statici tijela, pa će se sada prikazati. Uvjeti ravnoteže tijela I su odabrani kao nezavisni; na skici je prikazano to tijelo i sile u spojevima koje na njega djeluju. Sjecišta štapova će se navoditi kao "prva","druga"i "treća" točka, a na skici su označena odgovarajućim brojevima. Veličina sile u štapu kroz treću točku (na skici:F) odrediti će se pomoću momenata oko osi koja prolazi kroz prve dvije točke (na skici:os p). Slijedi prvi uvjet rješivosti: Pravac sile F ne leži u istoj ravnini s prvom i drugom točkom.



Sile kroz drugu točku se odredjuju na isti način. Polaže se ravnina kroz preostalu silu u drugoj točki (na skici:D) i prvu točku i ravnina kroz silu F i prvu točku. Na presječnici tih ravnina definira se os (na skici:q) i pomoću momenata oko te osi se direktno odredjuje tražena sila kroz drugu točku (na skici:E). Preostala sila kroz drugu točku se odredjuje analogno (na skici:D). Pokazano je da se sile kroz drugu i treću točku mogu nezavisno odrediti, ali treba biti zadovoljen drugi uvjet rješivosti: ravnina odredjena silama kroz drugu točku ne sadrži prvu točku.



Uz već odredjene sile kroz drugu i treću točku, mogu se sile kroz prvu točku odrediti na poznati način; npr sila C će se odrediti pomoću projekcija na os kroz vektor $\vec{A} \times \vec{C}$. Slijedi treći uvjet rješivosti Sile kroz prvu točku ne smiju biti komplanarne.

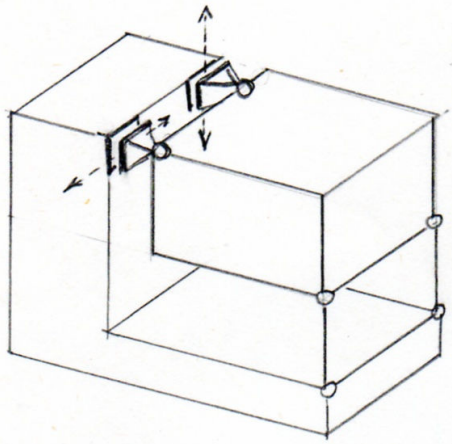


Točke u kojima se sijeku štapovi ne moraju biti upravo višestruki zglobovi; bitno je da se sijeku statičke osi štapova, kao što je prikazano na skici. Prikazan je i jedan daljnji slučaj, koji se

HWPK-85-110

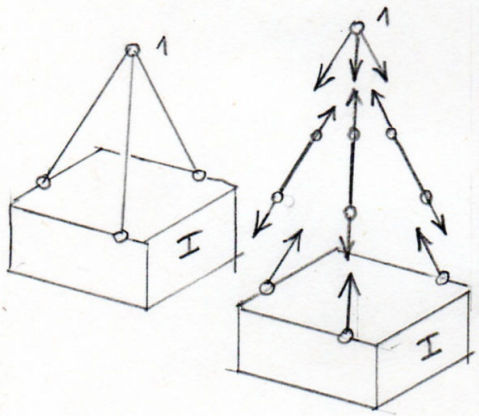
može svrstati u oba slučaja grupiranja štapova.

Prosti spojevi dvaju tijela koji se svode na uravnotežavanje sa šest sila na zadanim pravcima



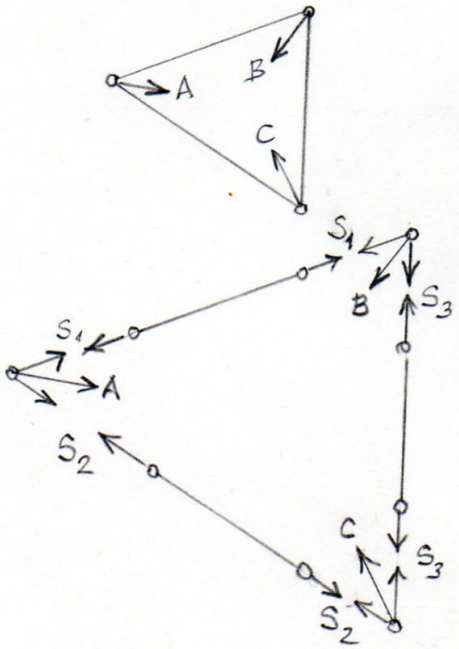
Svi sistemi koji sadrže dva tijela, a statičko djelovanje u njihovim spojevima se može prikazati pomoću šest sila na pravcima koje su grupirane kao u prethodnom odsjeku; biti će prosto spojeni sistemi.
Sistem prikazan na lijevoj skici biti će ekvivalentan sistemu prikazanom na str. 109. dolje.
Sistem prikazan na str. 99. dolje ekvivalentan je sistemima prikazanim na str 110.

Prosti spoj tijela i čvora



Čvor je prosto spojen s tijelom s tri nekomplanarna kuglasto zglobna štapa. Kako se ravnoteža čvora svodi na ravnotežu točke, a djelovanje kuglasto zglobnih štapova se može prikazati silama koje prolaze središtima zglobova, svodi se odredjivanje sila u štapovima na uravnotežavanje točke s tri sile na zadanim pravcima. Poznato je, da je uvjet rješivost tog slučaja nekomplanarnost pravaca.

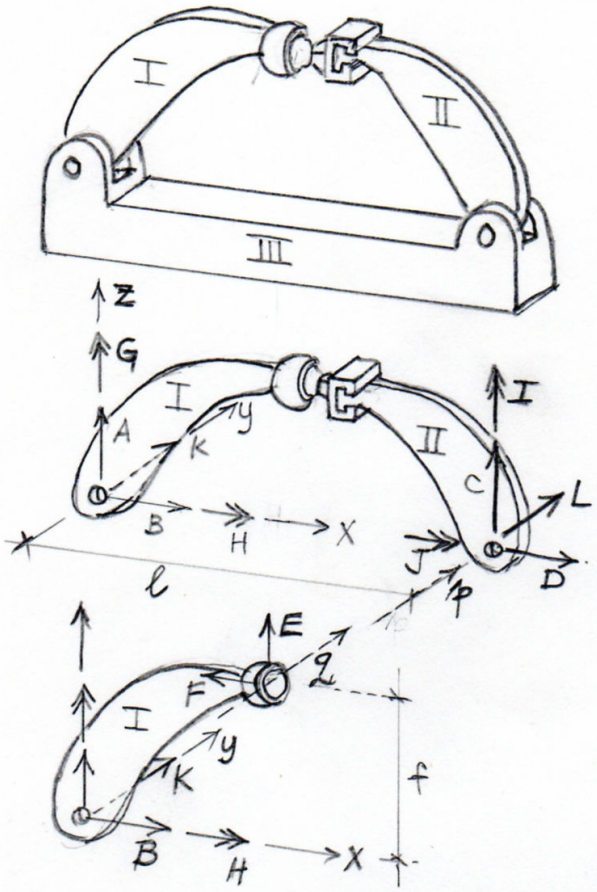
Prosti spoj triju čvorova



Tri čvora čine prost spoj ako su spojeni štapovima koji ne leže na istom pravcu. Sistem može biti u ravnoteži samo ako izmedju čvorova djeluju sile koje leže u ravnini odredjenoj središtima čvorova. Sile u štapovima se mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže: najjednostavnije je zamisliti da se dvije sile odrede iz uvjeta ravnteže jednog čvora, a preostala sila iz uvjeta ravnoteže jednog daljnjeg čvora. Tri uvjeta će biti zavisna

HWPR-85-111

Trozglobni sistem



Promatrati će se samo ravninsko-simetrični slučaj koji spada u elementarne sisteme. U sistemu se pojavljuju dva linijska zgloba (na skici:1 i 2) i linijsko klizni kuglasti zglob.

U ovom slučaju je pogodno da se rješavanje započne promatranjem ravnoteže podsistema koji sadrži dva tijela (na skici označena s I i II). Linijski zglob prenosi sve tri komponente sile, pa se one mogu odabrati na bilo koja tri nekomplanarna pravca. U ovom slučaju je pogodno da se u svakom linijskom zglobu po jedna komponenta odabere na presječnici ravnine simetrije i ravnine odredjene osima linijskih zglobova (na skici su to komponente B i D). Preostale dvije se odabiru okomito na prvu i to tako da jedna od preostalih leži u ravnini simetrije (na skici su to A i C).

Iz uvjeta iščezavanja momenata oko osi kroz jedan linijski zglob, direktno se može odrediti veličina komponente u ravnini simetrije za drugi linijski zglob.(na skici: sila A se odredjuje iz sume momenata oko osi p, a sila C se odredjuje iz sume momenata oko osi y).

Rješavanje se nastavlja promatranjem ravnoteže samo jednog tijela, npr. tijela I. Na tijelo I djeluje još samo šest nepoznantih reakcija,koje se, ako je uvjet rješivosti zadovoljen, mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Obično se sila na spojnici linijskih zglobova (na skici:B) odredjuje iz uvjeta iščezavanja sume momenata oko osi kroz srednji zglob (na skici: os q). Iz svakog od pet daljnjih uvjeta ravnoteže se direktno može odrediti po jedna reakcija. (prema skici: F iz projekcije sila na x, K iz projekcije sila na y, E iz projekcije sila na z, G iz sume momenata na os z i H iz sume momenata oko osi x). Uvjeti rješivosti su: udaljenost linijskih zglobova različita od nule(jer se ne bi mogle odrediti sile A i C) i: udaljenost središta srednjeg zgloba od ravnine kroz osi linijskih zglobova različita od nule (jer se ne bi mogla odrediti sila B). Uvjeti rješivosti, a s time i uvjet odredjenosti trozglobnog sistema mogu se svesti na jedna geometrijski uvjet:

Središte srednjeg zgloba i osi linijskih zglobova ne smiju ležati u istoj ravnini.

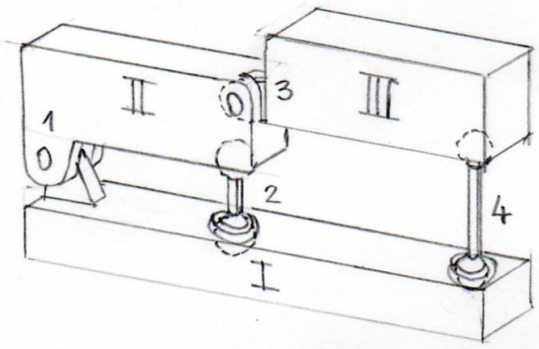
HWPK- 85 - 112

Preostale četiri reakcije se analogno odredjuju iz uvjeta ravnoteže drugog tijela (na skici:II). Dva uvjeta ravnoteže drugog tijela će biti zavisni. Daljnja četri zavisna uvjeta će biti uvjeti tijela III, jer iskorištavanje uvjeta za podsistem koji sadrži tijela I i II, je ekvivalentno iskorištavanju odgovarajućih uvjeta za tijelo III.

Ulančeni sistemi

Ulančeni sistemi su odredjeni spojeni sistemi koji se mogu sastaviti nizom elementarnih spojeva. Pri tome elementarni način spajanja može povezivati i dva podsistema. Sile u spojevima ulančenih sistema se odredjuju za svako elementarno spajanje zasebno i to iz uvjeta ravnoteže pripadnog tijela ili podsistema. Redoslijed rješavanja je obrnut od redoslijeda postepenog sastavljanja. Navesti će se samo neki jednostavni primjeri.

a) Sistem s dva prosta spajanja podsistema

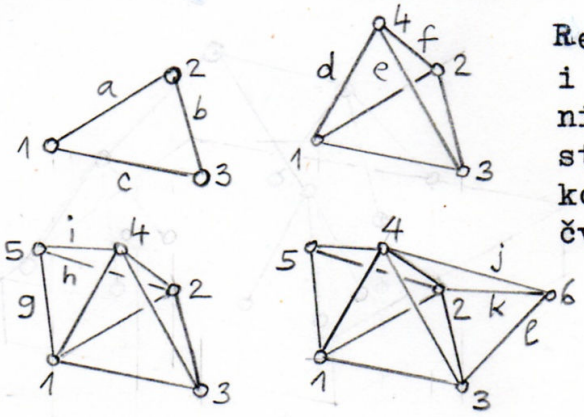


Promatra se ulančeni sistem koji sadrži tri tijela. Sistem je ulančen jer ga se može sastaviti nizom elementarnih spojeva.

U prvoj fazi će se tijelo I spojiti s tijelom II u podsistem. Promatrani zasebno tijelo I i II čine prosto spojeni sistem, a u smislu promatranog sistema, tijela I i II su odredjeni podsistem, koji se prema tome ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.
U drugoj fazi se na podsistem I II, prosto spaja tijelo III, pomoću linijskog zgloba 3 i kuglasto-zglobnog štapa 4.

Rješavanje se započinje iskorištavanjem uvjeta ravnoteže tijela III. tako se dobivaju reakcije u zglobu 3 i zglobnom štapu 4. Sile koje u zglobu 3 djeluju na tijelo II su sada poznate, pa se sile i momenti u zglobu 1 i sila u zglobnom štapu 2 mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže tijela II.

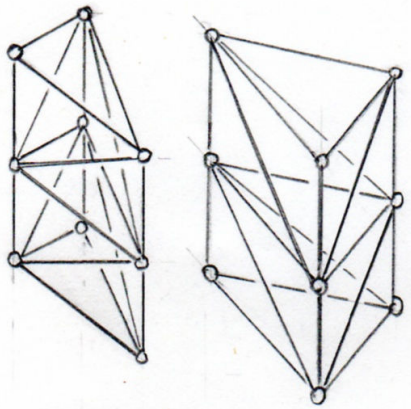
b) Ulančeni prostorni rešetkasti nosač



Rešetkasti nosač sadrži samo čvorove i kuglasto zglobne štapove. Za jednostavni prostorni rešetkasti nosač mora postojati barem jedan način sastavljanja koji započinje prostim spojem triju čvorova, a svaki daljnji čvor se spaja pomoću tri nekomplanarna štapa. Ustvari se stalno koristi princip prostog spoja tijela i čvora, ali se umjesto tijela pojavljuje geom

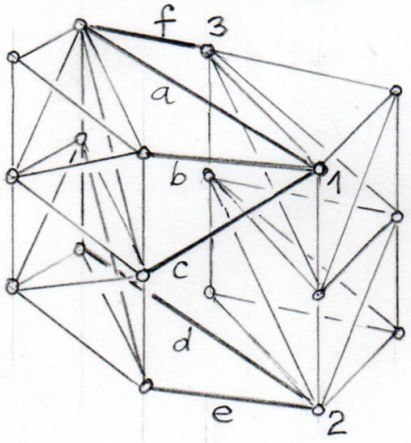
HWPK-85-113

metrijski nepromjenjiv rešetkasti podsistem. Na skicama je u kosoj aksonometriji prikazan tok spajanja jednog rešetkastog nosača: Čvorovi 1,2,3 su spojeni štapovima a,b,c. Na te čvorove se štapovima d,e,f spaja čvor 4. Na čvorove 1,2,4 se s štapovima g,h,i spaja čvor 5, te konačno se na čvorove 2,3,4 štapovima j,k,l spaja čvor 6.
Rješavanje se svodi na uzastopno iskorištavanje ravnoteže čvorova, dakle ravnoteže točaka, pri čemu je redoslijed obrnut: Iz uvjeta ravnoteže čvora 6 odredjuju se sile u štapovima j,k,l. Djelovanje tih sila na čvorove 2,3,4 je po smjeru suprotno od djelovanja na čvor 6. Na isti način se odredjuju sile u čvorovima 5 i 4. Odredjivanje sila u početnom "trokutu" je već poznato.



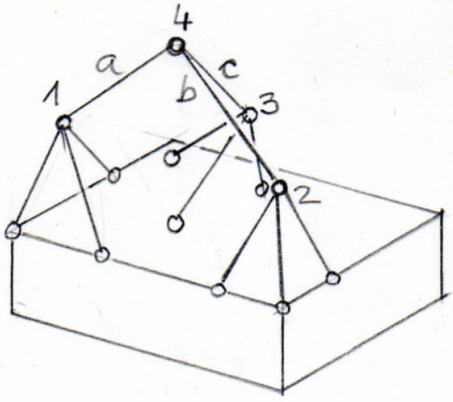
Složeni ulančeni prostorni rešetkasti nosač se ne može sastaviti samo postepenim dodavanjem čvorova. U tom se slučaju pojavljuje više jednostavnih podsistema, koji su kao tijela prosto spojeni u cjelinu.

Na skici su prikazana dva jednostavna ulančena prostorna rešetkasta nosača.



Složeni ulančeni prostorni rešetkasti nosač je dobiven tako da su jednostavni nosači kao cjeline, dakle analogno spajanju tijela, prosto spojeni u novu cjelinu. Odabran je slučaj grupiranja štapova u tri točke. Štapovi a,b,c se sijeku u čvoru 1. Štapovi d,e se sastaju u čvoru 2, a njihova ravnina ne sadrži čvor 1. Šesti štap, označen s f, ne leži u istoj ravnini s spojnicom čvorova 1 i 2.

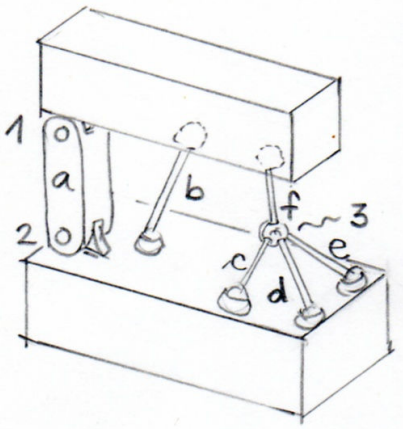
c) Ulančena prostorna rešetka



Pod ulačenom prostornom rešetkom podrazumijevati će se sistem koji osim čvorova i kuglasto zglobnih štapova sadrži samo jedno tijelo ili podlogu.
Na skici je prikazano tijelo na koje su prosto spojeni čvorovi 1,2,3.
Drugu fazu sistema čini samo čvor 4, koji je štapovima a,b,c prosto spojen sa podsistemom spojenim u prvoj fazi, a koji se ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.

HWPK- 85- 114

Kombinacija tijela i čvorova



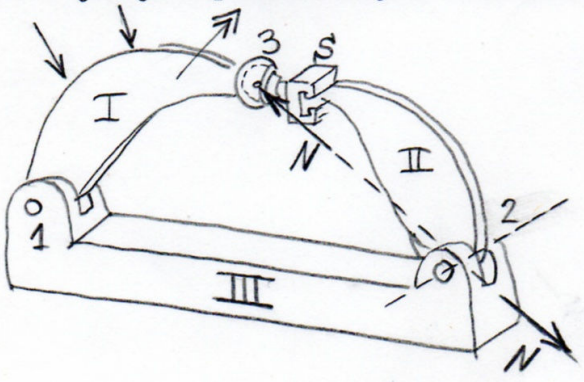
Ulančeni sistemi mogu sadržavati i kombinacije tijela i čvorova.
Na skici je prikazan vrlo jednostavan sistem, kojisadrži samo jedan čvor (3) i dva tijela(I i II). Redoslijed spajanja je slijedeći: u prvoj fazi se čvor 3 prostim spojem, pomoću štapova c,d,e spaja s tijelom II. U drugoj fazi se tijelo prosto spaja s podsistemom II 3 dobivenim u prvoj fazi.
Sile u spojevima se odredjuju obrnutim redoslijedom: iz ravnoteže tijela I odredjuju se sile u štapovima a,b,f. Uz poznatu silu f odredjuju se iz uvjeta ravnoteže čvora 3 sile u štapovima c,d,e.

Rekurzivno rješivi sistemi.

Kod reukurzivno rješivih sistema se pogodnim postavljanjem uvjeta ravnoteže pojedinih tijela i/ili podsistema dobiva sistem linearnih jednadžbi s trokutnom shemom koeficijenata ili se opterećenje rastavlja na pogodne dijelove tako samo nepoznanice uz trokutni dio sheme koeficijenata budu različite od nule.

Kao jednostavni primjer rekurzivno rješivog sistema može se shvatiti trozglobni sistem. Kod prikazanog načina rješavanja postignuta je trokutna shema koeficjenata uz reakcije pogodnim iskorištavanjem uvjeta ravnoteže podsistema.

Na primjeru trozglobnog sistema može se prikazati i primjena drugog pristupa pomoću kojeg se postizava rekurzivnost, a to je rastavljanje opterećenja. Zasebno će se riješiti sistem opterećen



samo na tijelima I i III i zasebno će se riješiti sistem opterećen na tijelima II i III. Rezultati parcijalnih opterećenja će se na kraju zbrojiti.

Ako je opterećeno samo tijelo I može se neopterećeno tijelo II shvatiti kao spojni element,koji zajedno sa spojnim elementom S čini posredni spoj izmedju tijela I i III. Točka 3 spojnog elementa S ima u odnosu na tijelo III pet relativnih stupnjeva slobode: tri rotacije oko osi i dvije translacije po pravcima. Jedna od translacija je infinitezimalna. Slijedi da spojni element S i neopterećeno tijelo II prenose samo jednu silu na pravcu koji prolazi točkom 3 i probodištem osi linijskog zgloba 2 s ravninom simetrije. Tako gledano je tijelo I

HWPK- 85- 115

prosto spojeno s tijelom III: linijskim zglobom 1 i dijelovima S i II koji se ponašaju kao zglobni štap.

Ako se isključe sva djelovanja opterećenja izmedju tijela I i ostalih tijela može se na isti način djelovanje sistema shvatiti kao prosti spoj tijela II i III.

Zbrajanjem parcijalnih rješenja, dakle superpozicijom, dobiva se konačno rješenje.

Nepravilni sistemi

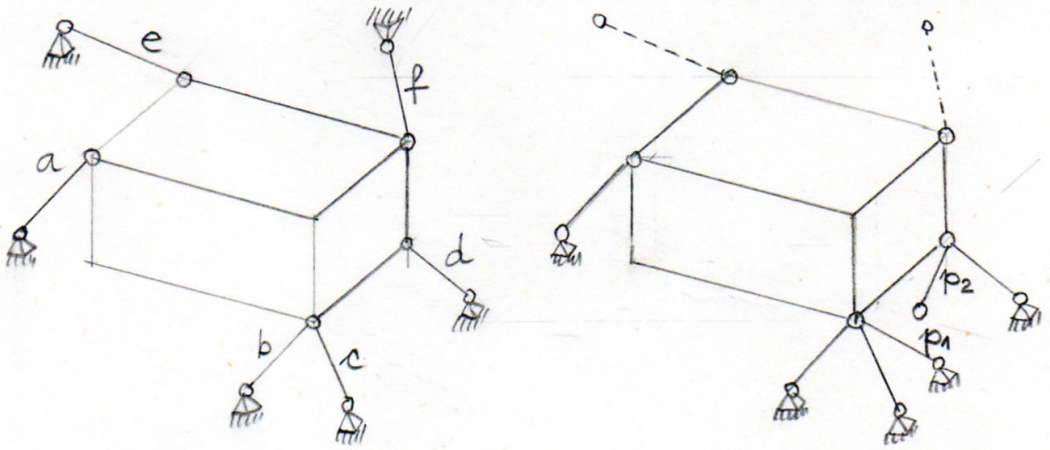
Nepravilni sistemi se ne mogu direktno prepoznati prema geometrijskim svojstvima i ne postoji način da se rekurzivno riješe. Mogu se prepoznati i riješiti općim algebarskim postupkom ili metodom zamjene spojeva.

Opći algebarski postupak za prepoznavanje odredjenog sistema

Postavlja se $s_o = 6t + 3n - 6$ nezavisnih uvjeta ravnoteže kao za izolirani sistem. Ukupni broj reakcija s mora biti jednak broju nezavisnih uvjeta ($s = s_o$) i determinanta koeficijenata uz reakcije mora biti različita od nule. Reakcije t.j. skalarne veličine koje odredjuju sile i momente u spojevima odredjuju se rješavanjem pripadnog sistema linearnih algebarskih jednadžbi u kojem će se na desnoj strani pojaviti negativni doprinos opterećenja.

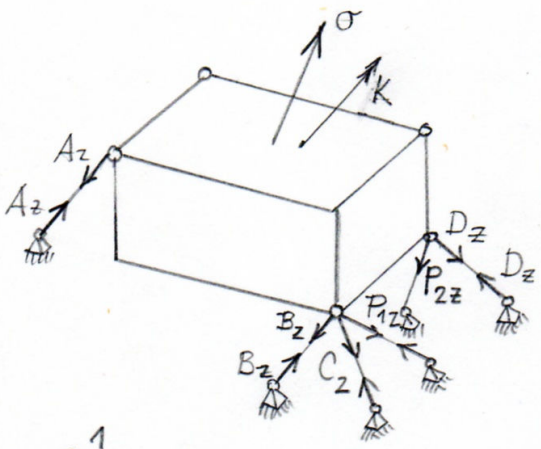
Metoda zamjene spojeva

Metdoda zamjene spojeva zasniva se na pridruživanju zamjenjujućeg odredjenog sistema zadanom sistemu. Rješenje zadanog sistema dobiva se rješavanjem zamjenjujućeg, koji je rekurivno rješiv ili ulančen.
Zamjenjujući sistem se dobiva iz zadanog tako, da se u zadanom neki spojevi isključe ili zamijene jednostavnijim spojevima, pa se osim toga dodaju pomoćni spojevi. Zamjenjujući sistem se rješava za djelovanje opterećenja i za djelovanje zasada nepoznatih sila koje odgovaraju silama u isključenim spojevima ili komponentama koje su isključene zamjenom spojeva jednostavnijim. Nepoznate sile se odredjuju iz uvjeta iščezavanja sila u pomoćnim spojevima.

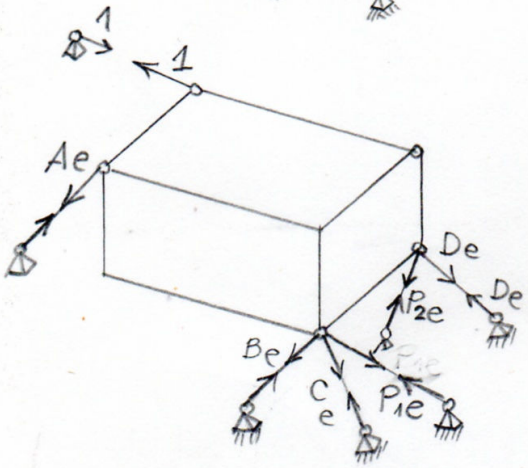


HWPK-85-116

Opisati će se provedba metode zamjene spojeva i popratiti skicama jednostavnog primjera. Zadanom sistemu (skica na str.116 lijevo) pridružuje se zamjenjujući sistem(desna skica na str 116). Isključena su dva štapa (e i f)i uvedena dva pomoćna (p_1 i p_2) tako da zamjenjujući sistem bude elementaran. Zamjenjujući sistem će se riješiti za zadano opterećenje. Pripadne sile u štapovima će se označiti indeksom z.

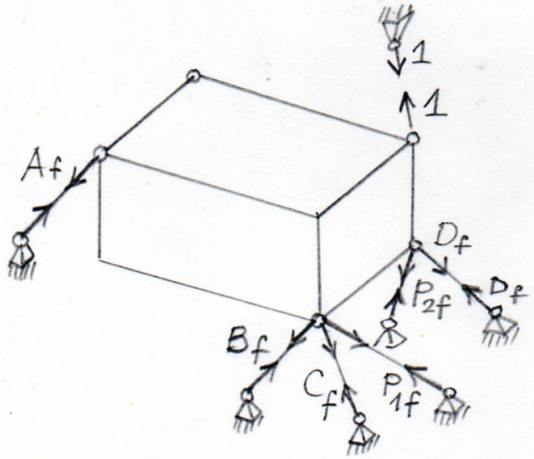


Nadalje će se zamjenjujući sistem riješiti zasebno za svaku komponentu sila u spojevima koji su isključeni,odnosno za svaku komponentu koja je isključena zamjenom. Pri tome će veličine tih komponenti biti jedinične. Sile u spojevima tih rješenja će se pregledno označiti.



Prikazano je jedinično djelovanje sile koja odgovara štapu e. Pripadne sile u spojevima označiti će se indeksom "e".

Na trećoj skici je prikazano jedinično djelovanje sile koja odgovara štapu f. Zamjenjujući sistem će se riješiti, a dobivene sile u spojevima su označene indeksom f.



Dobivena su tri rješenja odabranog zamjenjujućeg sistema, dakle tri ravnotežna stanja.

Rješenje zadanog sistema dobiti će se superpozicijom ovih triju rješenja zamjenjujućeg sistema.

Rješenje zamjenjujućeg sistema za nepoznatu veličinu sile E dobiti će se tako da se rješenje za odgovarajuću jediničnu silu pomnoži s nepoznanicom E. Analogno će se i rješenje za zsada nepoznatu silu F dobiti množenjem jediničnog rješenja s nepoznanicom F.

Rješenje zadanog sistema će biti zbroj rješenja zamjenjujućeg sistema za zadano opterećenje i rješenja za nepoznate sile E i F. Sila u bilo kojem štapu će prema tome biti funkcija opterećenja i nepoznanica E i F.Npr za silu A:

$$A = A_z + A_e \cdot E + A_f \cdot F$$

Na analogni način se izražavaju i sile u štapovima p_1 i p_2, koji u traženom rješenju i ne postoje, pa će superpozicija rješenja na zamjenjujućem sistemu biti jednaka traženom rješenju, ako sile

HWPK-85-117

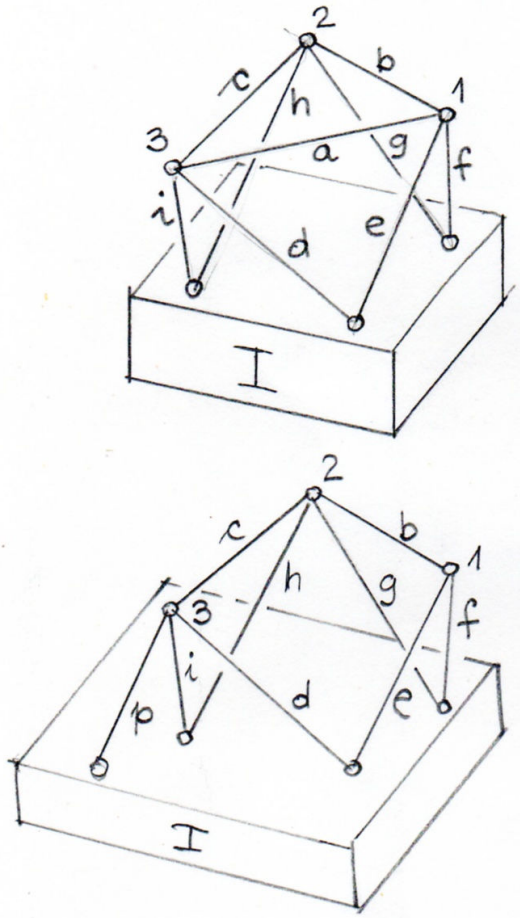
u pomoćnim štapovima iščeznu. Taj zahtjev izriču slijedeće jednadžbe:

$$P_{1z} + P_{1e} \cdot E + P_{1f} \cdot F = \emptyset$$

$$P_{2z} + P_{2e} \cdot E + P_{2f} \cdot F = \emptyset$$

Dobivene jednadžbe pretstavljaju sistem od dvije linearne algebarske jednadžbe za nepoznanice E i F. Ako je zadani nepravilni sistem odredjen, te će se jednadžbe moći riješiti, t.j. determinanta $\neq 0$.

U općem slučaju broj isključenih komponenti ne mora dakako biti dva, nego može biti bilo koji konačan broj "n". U tom slučaju će se veličine tih komponenti odrediti iz sistema s "n" nepoznanica.



Metoda zamjene spojeva se preteženo koristi kod prostornih rešetki, pa se i uvodi kao "metoda zamjene štapova" ili "Hennebergova metoda" prema imenu autora metode.

Kao primjer je odabrana jednostavna prostorna rešetka s tri čvora. U svakom čvoru se sastaju po četiri štapa, pa nije moguć rekurzivni pristup.

Isključivanjem jednog štapa, npr "a" i dodavanjam pomoćnog štapa "p" dobivena je jednostavna ulančena prostorna rešetka. Redoslijed spajanja te rešetke je slijedeći: čvor 3 je spojen na tijelo štapovima d,i,p; čvor 2 je spojen štapovima c,h,g na podsistem (I+3); čvor 1 je spojen štapovima b,e,f na podsistem(I+3+2). Redoslijed rješavanja će biti obrnut.

HWPK-85-118

Složeni sistemi

Složenisistemi su statički odredjeni spojeni sistemi koji sadrže statički odredjene podsisteme. Važno je uočiti svojstvo složenih sistema koje je poopćenje statičkog svojstva odredjenih sistema:

Ako iščezavaju rezultirajuća djelovanja opterećenja za svaki pod sistem zasebno, iščezavaju i sve sile i momenti u spojevima koji spajaju podsisteme.

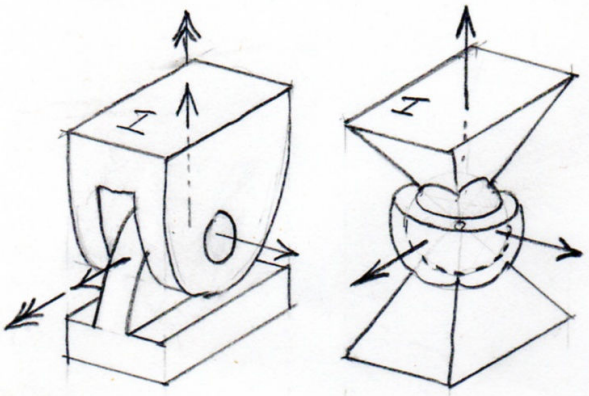
Primjer prikazan na donjoj skici može se shvatiti kao složen sistem. Neka jedan podsistem bude tijelo i čvorovi 2 i 3, a drugi podsistem je samo čvor 1. Ako opterećenje djeluje samo izmedju tijela i čvo-

nova 2 i 3, iščezavati će sile u štapovima b,f,g.

Daljnji primjer za složeni sistem je sistem prikazan na str 114 u sredini. Dva odredjena rešetkasta nosača su spojena štapovima a,b,c,d,e,f. Ako opterećenje djeluje tako, da je svaki od tih rešetkastih nosača za sebe u ravnoteži biti će u štapovima koji ih spajaju sile nula.

Preodredjeni spojeni sistemi

Pri opisu preodredjenih sistema pogodno je uvesti pojam jednostavnijeg spoja pridruženog zadanom spoju. Jednostavniji spoj prenosi samo neke sile i/ili momente od onih koje prenosi zadani spoj.



Primjer: Kuglasti zglob se kao jednostavniji spoj može pridružiti linijskom zglobu, jer kuglasti prenosi tri sile kao i linijski, a ne prenosi momente.

Na skici su za oba spoja prikazane sile odnsono momenti koji djeluju na tijelo I.

Važno je uočiti da nije svaki spoj koji ima manji broj komponenti od zadanog ujedno i jednostavniji. Npr kuglasti zglob nije jednostavniji od linijskog kliznog jer linijski klizni neprenosi tri sile, a kuglasti prenosi,, dakle pojavila se komponenta koju ne sadrži zadani spoj.

Statička definicija preodredjenog spojenog sistema: Preodredjen spojeni sistem može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje, ali se sve sile u spojevima **ne mogu** odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Statičko svojstvo: U preodredjenom spojenom sistemu su moguća netrivijalna ravnotežna stanja i ako opterećenje iščezava. U tom slučaju se pojavljuju samo sile u spojevima i unutarnje sile.

Opća svojstva: Preodredjeni spojeni sistem seponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.
Moguće je zamijeniti neke spojeve jednostavnijim spojevima i/ili isključiti neke spojeve, a da se tako dobiveni sistem takodjer ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.
Neki preodredjeni sistemi seponašaju kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju i nakon prekida jednog ili više tijela.

Kinematička svojstva: medjusobni pomaci točaka sistema mogući su samo uz deformaciju barem jednog tijela ili spojnog elementa.
Postoje načini deformiranja pojedinih tijela koji su mogući samo uz istovremeno deformiranje barem jednog daljnjeg tijela i/ili spojnog elementa.

HWPK-85-119

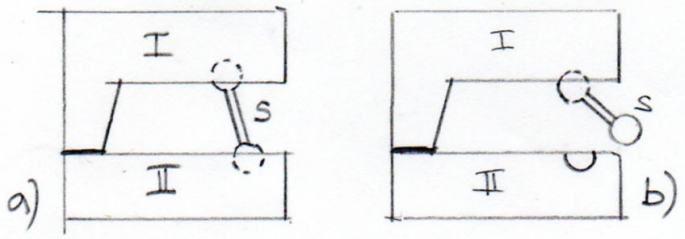
DEfinicija pomoću odredjenog spojenog sistema: Preodredjeni spojeni sistem sadrži barem jedan statički odredjeni sistem, pa se svaki preodredjeni sistem može isključivanjem spojeva i/ili zamjenom nekih spojeva jednostavnijim spojevima, svesti na barem jedan odredjeni spojeni sistem.

Algebarska formulacija statičke definicije: Preodredjeni spojeni sistem ima više reakcija od broja nezavisnih uvjeta ravnoteže izoliranog sistema. Izmedju svih rekacija može ih se pronaći upravo toliko,koliko ima nezavisnih uvjeta ravnoteže izoliranih sistema, i to tako da determinanta koeficijenata uz te reakcije bude različita od nule.

Podjela preodredjenih sistema zasniva se na podjeli odredjenih sistema koje preodredjeni sistemi sadrže.

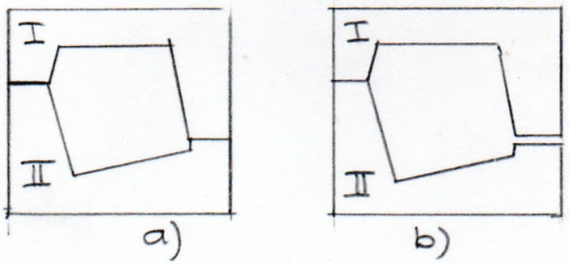
Navesti će se samo neki jednostavniji primjeri.

Dva tijela spojena krutim spojem i zglobnim štapom



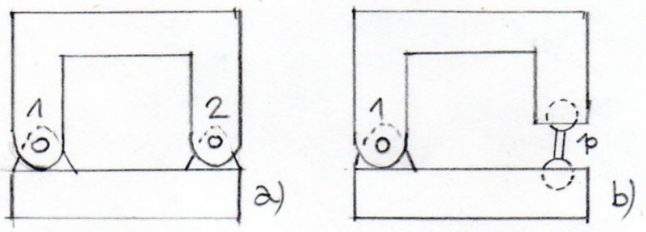
Sistem a) je preddredjen jer nakon isključenja štapa "s" prelazi u lanac krutih spojeva, koji spada u odredjene sisteme a prikazan je na b). Sistem a) sadrži i druge odredjene sisteme, npr zamjenom krutog spoja linijskim zglobom sistem prelazi u prosto spojeni sistem.

Dva tijela spojena s dva kruta spoja



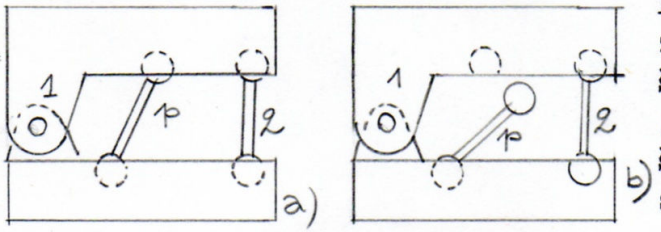
Dva tijela spojena s dva kruta spoja čine preodredjen sistem (a), jer se isključenjem jednog od krutih spojeva sistem može svesti na lanac krutih spojeva, koji je odredjen (b).

Dva tijela spojena s dva linijska zgloba



Dva tijela spojena s dva linijska zgloba čine preodredjeni sistem, jer se zamjenom jednog linijskog zgloba kuglasto zglobnim štapom, zadani sistem može svesti na prosto spojen sistem (b)

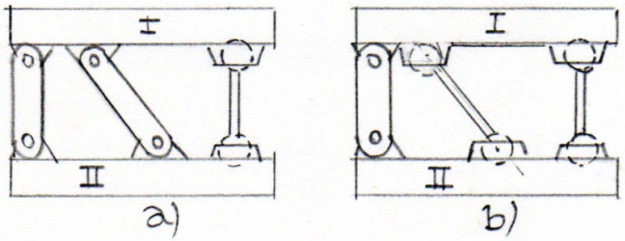
Dva tijela spojena linijskim zglobom i dva zglobna štapa.



Dva tijela spojena linijskim zglonom i dva kuglasto-zglobna štapa čine preodredjeni sistem jer se isključivanjem jednog štapa svodi na prosto spojen sistem(b).

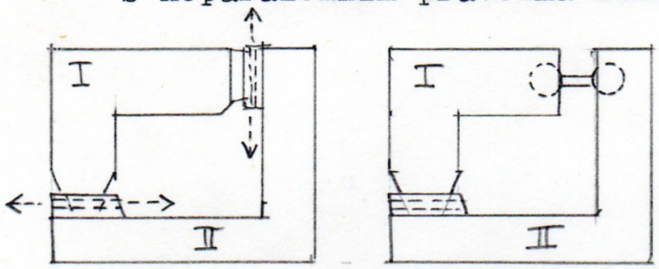
HWPK-85-120

Dva tijela spojena s dva linijsko zglobna štapa i jednim kuglasto zglobnim štapom



Sistem prikazan na skici a) je preodredjen , jer zamjenom jednog linijsko zglobnog štapa s kuglasto zglobnim štapom, prelazi u prosto spojen sistem(b).

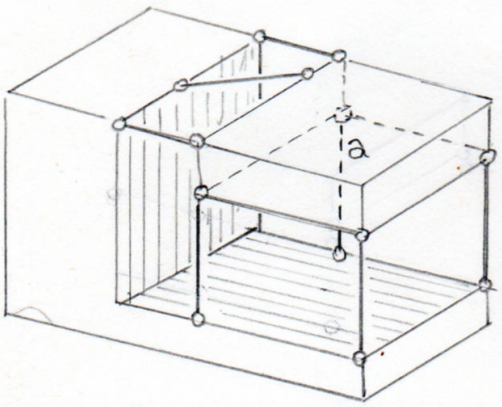
Dva tijela spojena s dva linijsko klizna spoja s neparalelnim pravcima klizanja



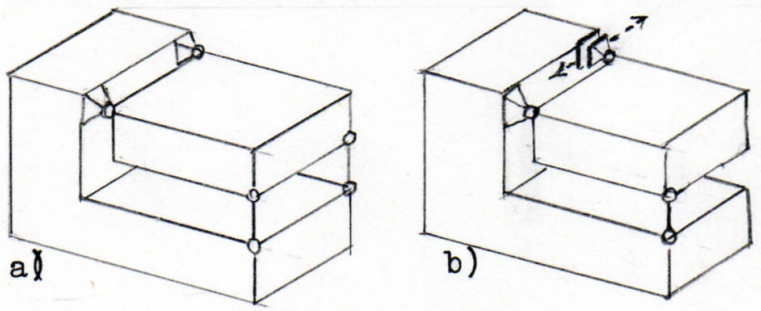
Sistem prikazan na skici a) je preodredjen, jer zamjenom jednog linijsko kliznog spoja s kuglasto zglobnim štapom, prelazi u prosto spojen sistem (b).

HWPK-85-121

Dva tijela spojena s više od šest kuglasto zglobnih štapova

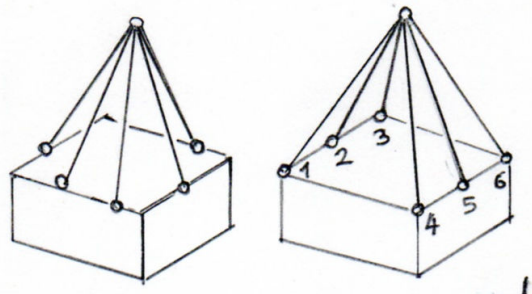


Prikazan je sistem koji sadrži dva tijela spojena s sedam kuglasto zglobnih štapova. Na osnovi tog broja se može zaključiti da je sistem ili preodredjen ili mehanizam koji sadrži preodredjenost. O kojem se slučaju radi ovisi o rasporedu spojeva.
Isključivanjem štapa "a" sistem prelazi u prosto spojen sistem opisan na str.109.dolje, što znači da je zadani sistem preodredjen.
Isključivanjem bilo kojeg od štapova paralelnih s štapom "a" prelazi zadani sistem u odredjeni, dok isključivanjem jednog tri preostala štapa prelazi u mehanizam, što bi moglo navesti na pogrešan zaključak da je i zadani sistem mehanizam. Za dokaz preodredjenosti je dovoljno pronaći jedan odredjeni na koji se zadani može svesti; daljnje mogućnosti nisu bitne za prepoznavanje.



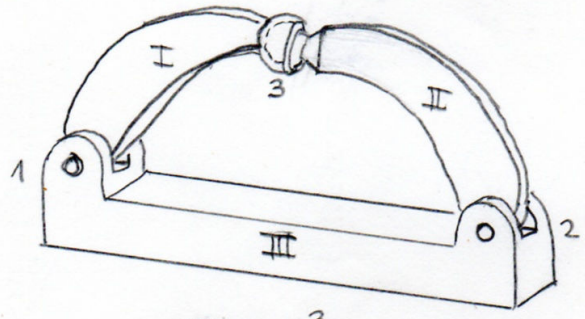
Na skici a) je prikazan preodredjeni sistem, koji se zamjenom kuglastog zgloba linijsko kliznim zglobom i isključenjem jednog štapa moće svesti na odredjeni (skica b).

Preodredjeni spoj tijela i čvora



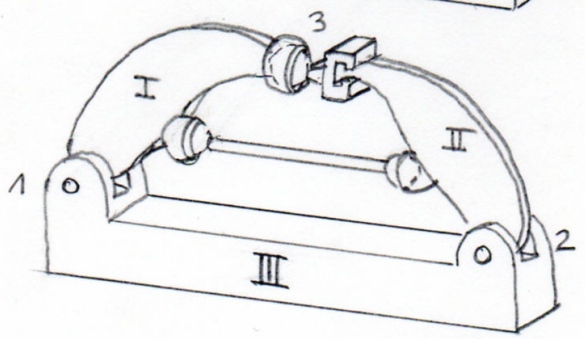
Sistem u kojem je čvor spojen s tijelom s četiri i više nekomplanarnih štapova je preodredjen, jer se isključivanjem nekih štapova može svesti na prosti spoj tijela i čvora, koji sadrži samo tri nekomplanarna štapa.
Na skici a) je prikazan primjer kod kojeg je bilo koja trojka štapova nekomplanarna, pa nije bitno koja će se dva štapa isključiti da se zadani sistem svede na odredjeni.
Na skici b) je prikazan primjer kod kojeg su štapovi grupirani u dvije ravnine. Odredjeni sistem će se dobiti, ako se iz jedne ravnine odabaci samo jedan štap, a iz druge ravine dva štapa, čime je dokazano da je zadani sistem preodredjen. Isključivanje svih štapova jedne ravnine vodi na mehanizam koji sadrži preodredjenost.

Preodredjeni sistemi koji se svode na trozglobni sistem



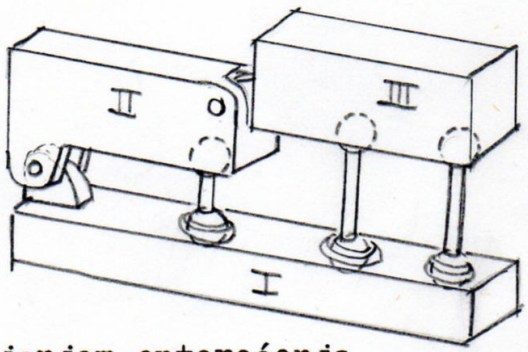
Prikazana su dva sistema koji se svode na trozglobni sistem.

Zamjenom kuglastog zgloba 3 s linijsko kliznim kuglastim zglobom svodi se prikazani sistem na odredjeni trozglobni sistem koji je obradjen na str.112.



Isključenjem štapa "s" svodi se prikazanisistem na odredjeni trozglobni sistem.

Preodredjeni sistemi koji se svode na ulančene sisteme

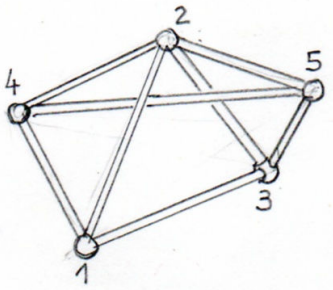


Sistem prikazan na skici sadrži tri tijela i tri kuglasto zglobna štapa. Tijela su spojena s dva linijska zgloba. Isključivanjem jednog od štapova f ili g, dobiva se ulančeni sistem koji sadrži dva jednostavna spajanja, prikazan na str.113.
Isključenjem štapa "e" dobiva se rekurzivno rješiv sistem. Odredjenost tog sistema može se objasniti rastavljanjem opterećenja. Neopterećeno tijelo II pretstavlja za

HWPK-85-122

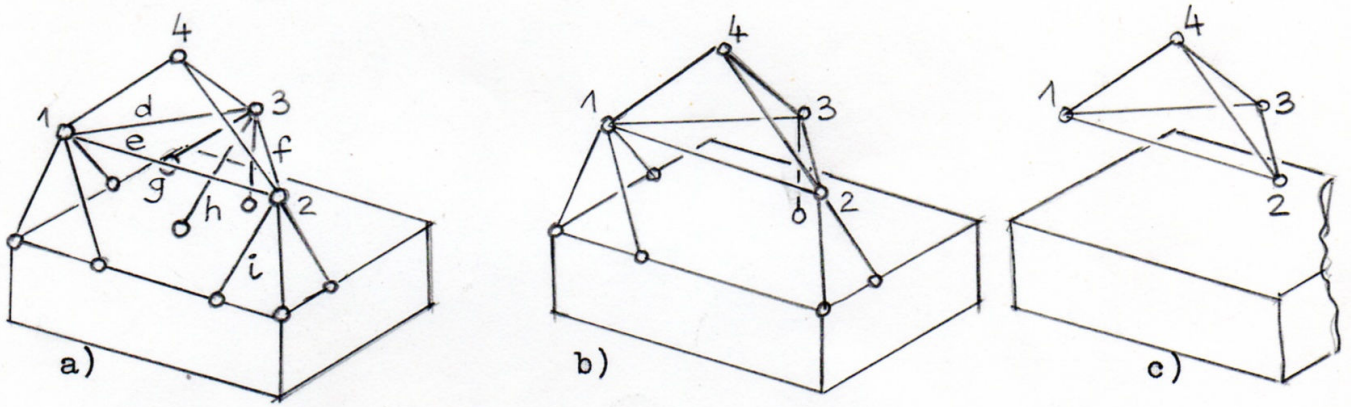
za tijelo III linijsko zglobni štap, pa se za djelovanje opterećenja na tijelo III sistem može riješiti isključivo iz uvjeta ravnoteže. Neopterećeno tijelo III pretstavlja za tijelo II posredni spoj statički ekvivalentan kuglasto zglobnom štapu, pa se i za djelovanje opterećenja na tijelo II sistem može riješiti isključivo iz uvjeta ravnoteže, što znači da će sistem uz isključenje štapa "e" biti rekurzivno rješiv, dakle odredjen.

Preodredjeni rešetkasti nosači i rešetkasti sistemi

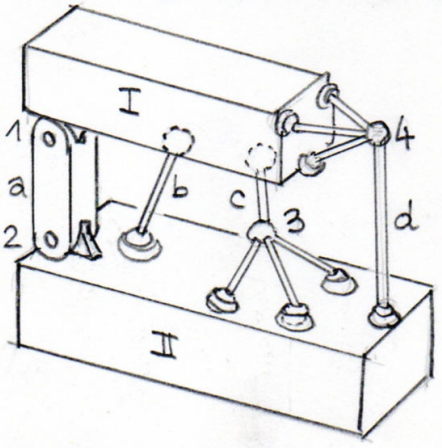


Prikazan je jednostavan primjer preodredjenog rešetkastog nosača koji sadrži 5 čvorova i 10 štapova. Isključivanjem bilo kojeg štapa dobiti će se jednostavan ulančen prostorni rešetkasti nosač. Najjednostavnije je zamisliti isključenje štapa koji spaja čvorove 4 i 5.

HWPK- 85- 123



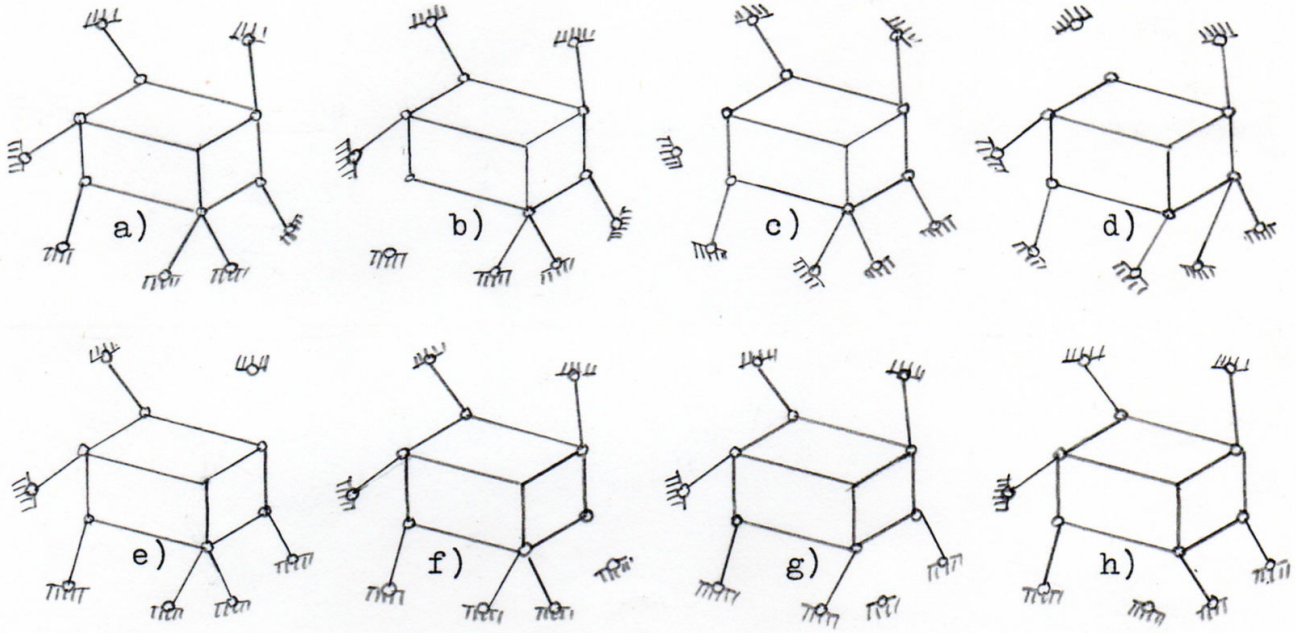
Na gornjim skicama su prikazane dvije prostorne rešetke. Rešetka a) je preodredjena. Prikazati će se dva načina pomoću kojih se ta rešetka može svesti na odredjenu. Rešetka b) je nastala iz rešetke a) tako da su uklonjeni štapovi g,h,i. Pokazati će se da je rešetka b) ulančena. Spajanje se započinje čvorovima 1,2,3 koji su sa tri štapa spojeni u najjednostavniju rešetku t.j. prosti spoj triju čvorova. Načvorove 1,2,3 je s tri štapa spojen čvor 4, pa podsistem 1,2,3,4 čini odredjeni rešetkasti nosač(skica c). Taj je nosač prosto spojen s tijelom I pomoću šest štapova grupiranih u 3 točke. Taj tip prostog spajanja je pokazan na str.110.



Na lijevoj skici je prikazan sistem koji sadrži dva tijela i dva prostorna zglobna čvora. Sistem je preodredjen, jer isključivanjem štapa d vodi na ulančen sistem. Redoslijed spajanja: čvor 3 spojen s tri štapa s tijelom II. Podsistem (II + 3) spojen prosto štapovima a,b,c s tijelom I. Na tijelo I spojen s tri štapa čvor 4. (Ulančen sistem bez 4, prikazan je na str,115).

Preodredjeni sistemi koji se svode na nepravilni odredjeni sistem

Promatra se sistem kod kojeg je broj reakcija "s" veći od broja $s_o = 6t + 3n - 6$, t.j. ukupnog broja nezavisnih uvjeta ravnoteže izoliranog sistema. Isključivanjem nekih spojeva i/ili zamjenom nekih spojeva jednostavnijim spojevima može se promatranom sistemu pridružiti sistem koji ima upravo s_o reakcija. Taj će se sistem nasalje nazivati "pridruženi sistem". Ukupni broj mogućih pridruženih sistema je $\binom{s}{r}$ pri čemu je $r = s - s_o$. U općem slučaju će se pridruženi sistem analizirati kao nepravilni sistem. Ako je barem jedan pridruženi sistem odredjen, onda je zadani sistem preodredjen.



Na gornjoj slici je pod a) prikazan promatrani sistem koji se sastoji od jednog tijela i podloge. Tijelo i podloga su spojeni sa sedam kuglasto zglobnih štapova. Zasada je poznato da sistem može biti preodredjen ili mehanizam koji sadrži preodredjenost. Isključivanjem jednog od štapova može se dobiti sedam pridruženih sistema koji su nepravilni i treba provjeriti da li su odredjeni. Ako je barem jedan od pridruženih sistema prikazanih od b) do h) odredjen znači da je sistem a) preodredjen.

Broj pridruženih sistema može biti vrlo velik: za dva tijela spojena s 8 štapova, pojavljuje se 28 pridruženih sistema, a za dva tijela spojena s 9 štapova, pojavljuju se 84 pridružena sistema.

U praktičnim slučajevima se nepravilni sistemi pojavljuju vrlo rijetko. Kod ručne provedbe postupka se zbog toga problem velikog broja pridruženih sistema i ne pojavljuje.

Opći postupak je praktički zanimljiv kod automatske obrade, jer je zbog jednostavnosti olakšano programiranje, a problem ispitivanja većeg broja pridruženih sistema nije toliko važan kao kod ručne obrade.

HWPK - 85 - 124

Mehanizmi

Statička definicija: Mehanizam je spojeni sistem, koji ne može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje.
Može se reći: Mehanizam je spojeni sistem koji može ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja.

Opće svojstvo: Ne ponaša se kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.

Kinematsko svojstvo: Relativni pomaci nekih tpčaka sistema mogući i bez deformacije dijelova sistema.

Mehanizmi se dijele na: mehanizme u užem smislu i mehanizme koji sadrže preodredjenost.

Mehanizmi u užem smislu

Statička definicija: Mehanizam u užem smislu je spojeni sistem koji može ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja, a pri tome se sve sile u spojevima mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Statičko svojstvo: kao za odredjeni spojeni sistem.

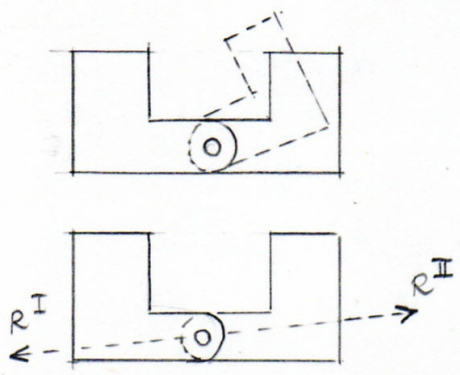
Opće svojstvo: kao za mehanizam.

Kinematsko svojstvo: Mogući su konačni relativni pomaci nekih točaka sistema bez deformacije dijelova sistema.

Definicija pomoću odredjenog sistema: Mehanizam u užem smislu, može se dodavanjem spojeva upotpuniti na barem jedan odredjeni spojeni sistem.

Algebarska formulacija statičke definicije: Iz s_o nezavisnih uvjeta ravnoteže izoliranog sistema može se postaviti samo "r" linearno nezavisnih algebarskih jednadžbi ($r < s_o$), a broj reakcija "s" jednak je broju nezavisnih jednadžbi ($s = r$).
Desne strane t.j. doprinosi opterećenja mogu za "r" nezavisnih jedandžbi biti proizvoljni. Preostale jednadžbe se mogu prikazati kao linearna kombinacija od "r" nezavisnih. Mehanizam u užem smislu će ostati u ravnoteži samo ako se desne strane preostalih jednadžbi odrede prema istoj linearnoj kombinaciji iz desnih strana uz "r" nezavisnih jednadžbi.

Mehanizmi koji se mogu upotpuniti na prosti spoj



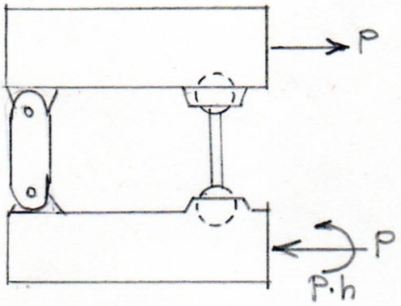
Dva tijela su spojena linijskim zglobom.
Vidljivo je da su mogući konačni pomaci bez deformacije dijelova.
Lako se odredjuje i barem jedno opterećenje za koje sistem ne može ostati u ravnoteži, čime je dokazano da je mehanizam; npr. suprotni momenti koji djeluju na tijela.

Direktno se može opisati svojstvo opterećenja za koje sistem može ostati u ravnoteži:

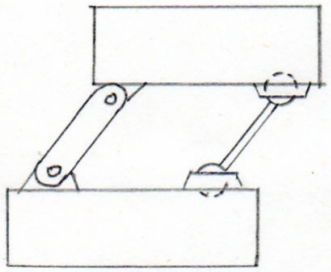
HWPK- 85- 125

Rezultanta opterećenja za svako tijelo mora prolaziti kroz os linijskog zgloba.

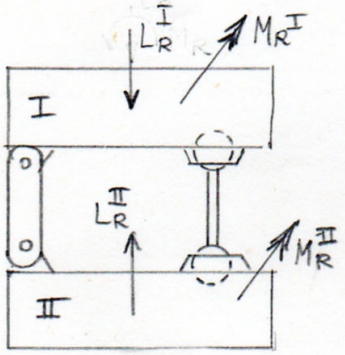
Prikazani sistem može se dodavanjem jednog zglobnog štapa upotpuniti na odredjeni spojeni sistem. Takav sistem je prikazan na str. 105.



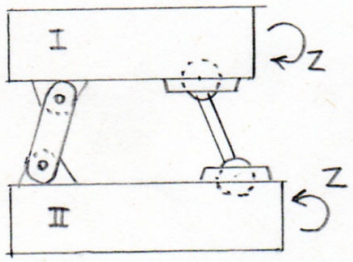
Prikazani sistem sadrži jedan linijsko zglobni štap i jedan kuglasto zglobni štap. Sistem je simetričan i osi štapova su paralelne. Dodavanjem jednog kuglasto zglobnog štapa koji nije paralelan s prva dva štapa može se upotpuniti na odredjeni spojeni sistem, što je dovoljan dokaz da se radi o mehaniznu u užem smislu.



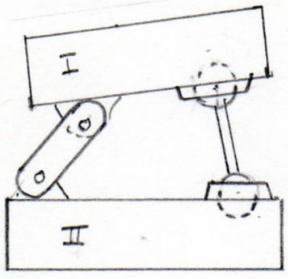
Direktno je vidljivo da su mogući konačni pomaci bez deformacije dijelova, i da se svaki dio može nezavisno deformirati.



Sile u spojevima imaju samo komponente okomite na osi štapova u ravnini simetrije, pa nije moguća ravnoteža za silu okomitu na os štapa (na sl. sila P) Time je samo dokazano da se radi o mehanizmu. Posebno opterećenje za koje sistem može ostati u ravnoteži mora imati rezultirajuću silu paralelnu s osima štapova i proizvoljni rezultirajući moment. U tom slučaju se sve sile u spojevima mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže, pa se prema statičkim svojstvima može zaključiti da je sistem mehanizam u užem smislu.

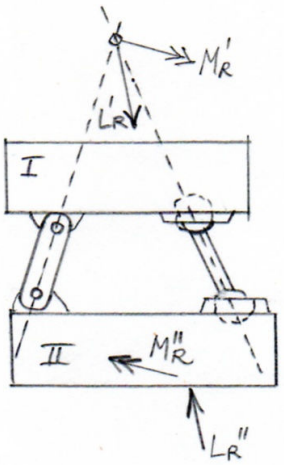


Promatra se sistem koji sadrži jedan linijsko zglobni štap i jedan kuglasto zglobni štap. Sistem ima jedmu ravninu simetrije, a osi štapova nisu paralelne. Dodavanjem jednog kuglasto zglobnog štapa može se zadani sistem upotpuniti na odredjeni sistem, što je dovoljan dokaz da se radi o mehanizmu u užem smislu.

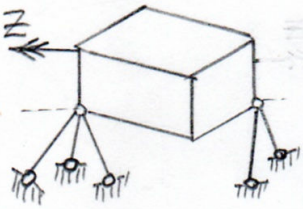


Direktno je vidljivo da su mogući relativni pomaci. Na osnovi toga se može zaključiti da je sistem mehanizam. Ne postoji ni jedan način deformiranja dijelova koji bi bio moguć samo uz deformaciju drugog dijela, pa se na temelju toga i ranijeg zaključka da je sistem mehanizam, može zaključiti da je to mehanizam u užem smislu.

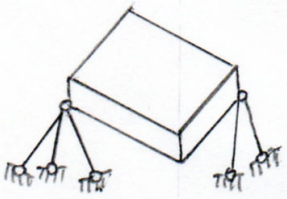
HWPK- 85-126



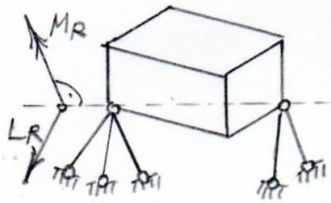
U ravnini simetrije postoje samo komponente sila u spojevima koje se sijeku u istoj točki, pa nije moguća ravnoteža za opterećenje momentom u toj ravnini (na skici moment $\underline{Z}$). Time je statički dokazano da je sistem mehanizam. Posebno opterećenje za koje sistem može ostati u ravnoteži, mora imati rezultirajuću silu koja prolazi kroz sjecište osi štapova i vektor rezultirajućeg momenta u ravnini simetrije. Za takovo opterećenje se sve sile u spojevima mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže, pa se na temelju toga i ranijeg zaključka može zaključiti da je sistem mehanizam u užem smislu.



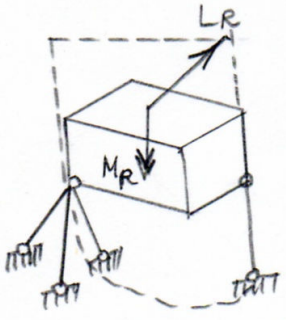
Promatra se sistem koji sadrži dva tijela spojena sa šest kuglasto zglobnih štapova od kojih su tri nekomplanarna grupirana u jednoj točki, a dva preostala u drugoj točki, a njihova ravnina ne sadrži prvu točku. Dodavanjem jednog kuglasto zglobnog štapa može se zadani sistem upotpuniti na prosto spojen sistem, dakle može se upotpuniti na odredjen sistem, što je dovoljan dokaz da se radi o mehanizmu u užem smislu.



Sistem se može prepoznati i na osnovi kinematičkih svojstava: moguća je konačna rotacija oko osi koja spaja točke grupiranja štapova i ne postoji način deformiranja dijelova sistema koji bi bio moguć samo uz deformaciju drugog dijela, pa je to mehanizam u užem smislu.



Sistem se može prepoznati i na osnovi statičkih svojstava: nemože ostati u ravnoteži za proizvoljno opterećenje, jer za djelovanje koncentriranog momenta paralelnog s osi ne može ostati u ravnoteži(na skici Z). Posebno opterećenje za koje može ostati u ravnoteži mora imati rezultirajuću silu koja prolazi spojnicom točaka grupiranja i moment čiji je vektor okomit na tu spojnicu. Za to specijalno opterećenje se sile u spojevima mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže pa se radi o mehaniznu u užem smislu.

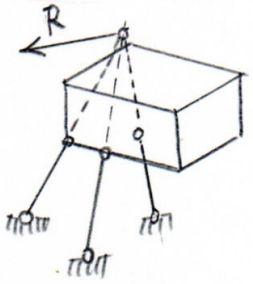


Promatra se sistem koji sadrži tijelo, podlogu i četri kuglasto zglobna štapa, rasporedjena tako da se sistem može upotpuniti na odredjeni sistem, što znači da se radi o mehanizmu u užem smislu.

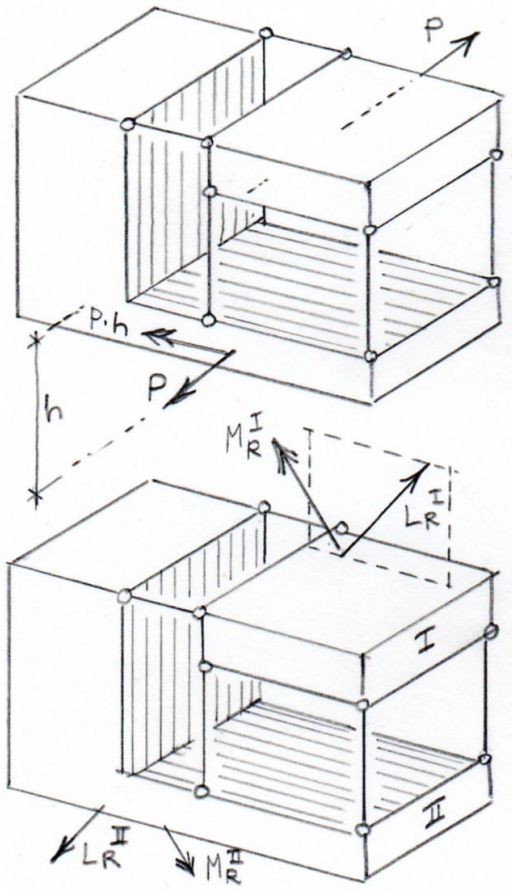
Kinematička i statička razmatranja se mogu provesti slično kao u ranijim primjerima. Opisati će se samo posebno opterećenje za koje sistem može ostati u ravnoteži: ustanovljava se ravnina odredjena točkom grupiranja štapova i četvrtim štapom. Rezultirajuća sila mora

HWPK-85-127

ležati u toj ravnini, a rezultirajući moment mora biti okomit na tu ravninu.



Promatra se sistem koji sadrži tijelo, podlogu i tri zglobna štapa čiji se pravci sijeku u istoj točki i nekomplanarni su. Sistem se može upotpuniti na odredjeni sistem, pa se radi o mehanizmu u užem smislu, što se može zaključiti i na osnovi kinematičkih i zasebno na osnovi statičkih svojstava. Posebno opterećnje za koje sistem može ostati u ravnoteži mora imati rezultantu koja prolazi sjecištem osi štapova ($M_R = 0$!).

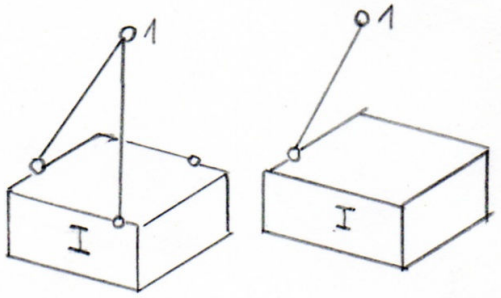


Promatra se sistem koji sadrži dva tijela i pet kuglasto zglobnih štapova, od kojih su tri paralelni i ne leže u istoj ravnini, a daljnja dva su paralelna i leže u ravnini okomitoj na prva tri pravca. Sistem se može upotpuniti na prosto spojeni sistem, dakle općenito: može se upotpuniti na odredjeni sistem, pa je zadani sistem mehanizam u užem smislu.

Kako postoji pravac na koji su okomiti svi štapovi, sistem ne će moći ostati u stanju ravnoteže za silu paralelnu tom pravcu (na skici:P).

Posebno opterećenje za koje sistem može ostati u stanju ravnoteže mora imati rezultirajuću silu okomitu na taj pravac. Rezultirajući moment može biti proizvoljan. U tom slučaju se sve sile u spojevima mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Sistem koji može ostati u stanju ravnoteže samo za posebno opterećenje, a sile u spojevima se mogu izračunati iz uvjeta ravnoteže je mehanizam u užem smislu.

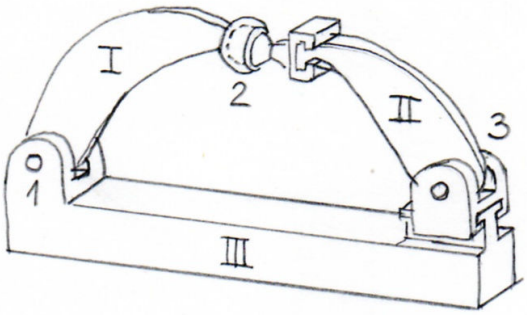
Do istog zaključka se može doći i kinematskim razmatranjem: mogući su konačni pomaci, a bilo koji način deformiranja jednog dijela ili više dijelova moguć je bez deformiranja nekog daljnjeg dijela.



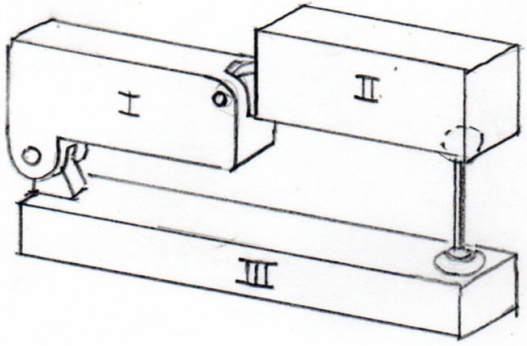
Mehanizam u užem smislu koji sadrži samo jedno tijelo i jedan čvor, može imati dva štapa koji ne leže na istom pravcu ili samo jedan štap. Dodavanjem štapova mogu se upotpuniti na odredjeni spojeni sistem, što je dokaz da su to mehanizmi u užem smislu. Specijalno opterećenje čini u prvom slučaju sila u ravnini štapova, a u drugom slučaju sila na pravcu štapa.

HAIPE - 85 - 128

Daljnji primjeri

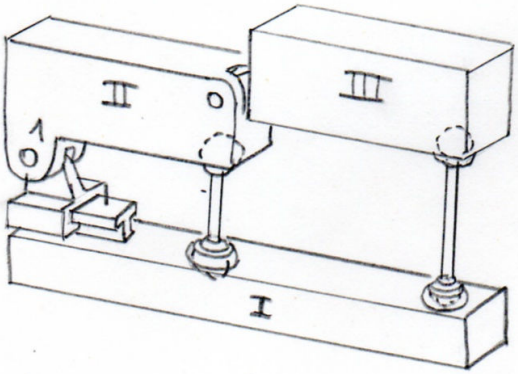


Prikazan je spojeni sistem koji sadrži tri tijela spojena linijskim zglobom, linijsko kliznim kuglastim i linijsko kliznim linijskim zglobom.
Ako se linijsko klizni linijski zglob (na skici: 3) zamijeni samo linijskim zglobom prelazi zadani sistem u odredjeni spojeni sistem i to u trozglobni sistem, pa je dokazano da je zadani sistem mehanizam u užem smislu.

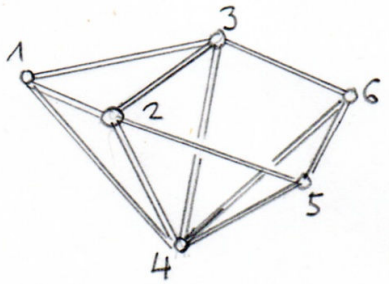


Prikazani sistem je mehanizam u užem smislu jer se dodavanjem jednog kulasto zglobnog štapa izmedju tijela I i III može upotpuniti na odredjeni sistem i to na ulančeni sistem.

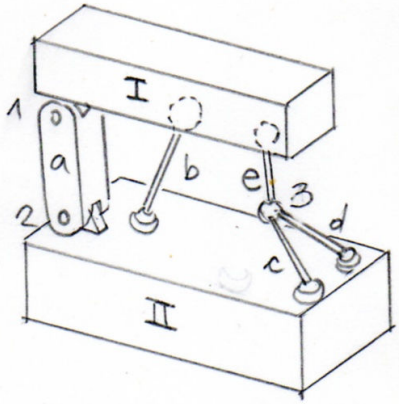
HWPK- 85- 129



Prikazani sistem je mehanizam u užem smislu, jer nakon zamjene linijsko kliznog linijskog zgloba s linijskim zglobom prelazi u odredjeni spojeni sistem i to u ulančeni sistem.



Prikazan je rešetkasti sistem sa šest čvorova. Čvorovi 1,2,3,4 odredjeni podsistem. Dodavanjem jednog štapa npr. izmedju čvorova 2 i 6 bio bi čvor 6 prosto spojen s podsistemom 1,2,3,4, a čvor 5 bi bio prosto spojen s podsistemom 1,2,3,4,6, pa bi cijeli sistem bio ulančen i prema tome odredjen. Pokazano je da se rešetkasti sistem može upotpuniti na odredjeni, što znači da se radi o mehanizmu u užem smislu.



Prikazan je sistem s dva tijela i jednim čvorom, koji se dodavanjem jednog štapa može upotpuniti na odredjeni, što znači da je to mehanizam u užem smislu.

Mehanizmi koji sadrže preodredjenost

Statička definicija: Mehanizam koji sadrži preodredjenost je spojeni sistem koji može ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja, a pri tome se sve sile u spojevima sistema ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Algebarska formulacija statičke definicije: Iz s_o nezavisnih uvjeta ravnoteže izoliranog sistema može se postaviti samo "r" linearno nezavisnih algebarskih jednadžbi ($r < s_o$), a broj reakcija "s" veći je od broja nezavisnih algebarskih jednadžbi ($s > r$).

Desne strane t.j. doprinosi opterećenja mogu za "r" nezavisnih algebarskih jednadžbi biti proizvoljni. Preostale jednadžbe se mogu prikazati kao linearna kombinacija od "r" nezavisnih. Mehanizam će ostati u ravnoteže samo ako se desne strane preostalih jednadžbi odrede prema istoj linearnoj kombinaciji iz desnih strana uz "r" nezavisnih jednadžbi.

Statičko svojstvo: kao za preodredjeni spojeni sistem

Opće svojstvo: kao mehanizam

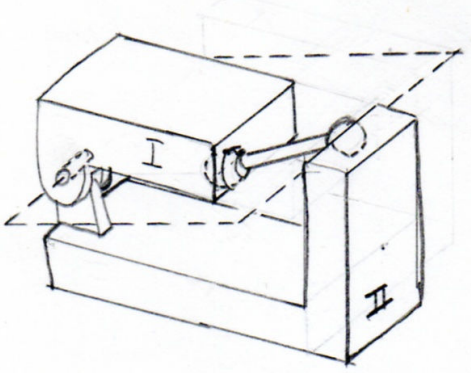
Kinematsko svojstvo: Mogući relativni pomaci točaka sistema i bez deformacije dijelova. Ti su pomaci u nekim slučajevima samo infinitezimalni, a u nekim slučajevima i konačni.

Napomena: Jednostavan mehanizam kod kojeg su mogući konačni pomaci lako se može i intuitivno prepoznati. Složeniji mehanizmi koji sadrže preodredjenost se uglavnom ne mogu intuitivno prepoznati, pa je pogodnije koristiti analizu statičkih svojstava.

Definicija pomoću odredjenog sistema: Mehanizam koji sadrži preodredjenost može se isključivanjem nekih spojeva i/ili zamjenom nekih spojeva jednostavnijim spojevima te obaveznim dodavanjem nekog spoja ili spojeva svesti na odredjeni spojeni sistem.

Definicija pomoću preodredjenog sistema: Mehanizam koji sadrži preodredjenost može se dodavanjem spojeva upotpuniti na barem jedan preodredjeni spojeni sistem.

Mehanizmi koji se mogu svesti na prosto spojeni sistem



Promatra se sistem koji sadrži dva tijela spojena linijskim zglobom i kuglasto zglobnim štapom. Os štapa leži u istoj ravnini kao i os linijskog zgloba.

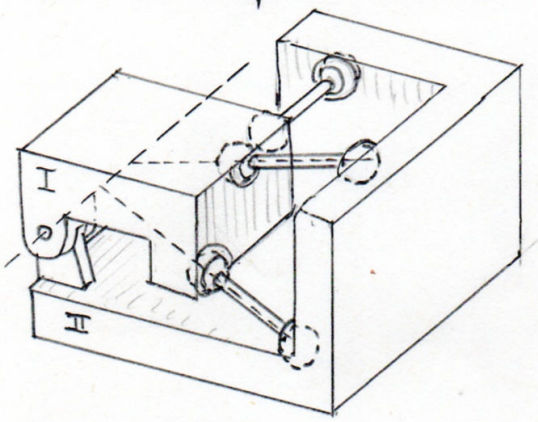
Moment oko osi linijskog zgloba iščezava identično za sve sile u spojevima, pa sistem ne može ostati u stanju ravnoteže za koncentrirani moment čiji je vektor paralelan s osi linijskog zgloba, što znači da je sistem mehanizam. Posebno opterećenje za koje može ostati u ravnoteži sadrži rezultirajuću silu,

HWPL-85-130

koja mora sijeći os linijskog zgloba i rezultirajući moment okomit na tu os. Iz preostalih pet uvjeta ravnoteže ne može se odrediti svih šest reakcija, što znači da je sistem mehanizam koji sadrži preodredjenost.

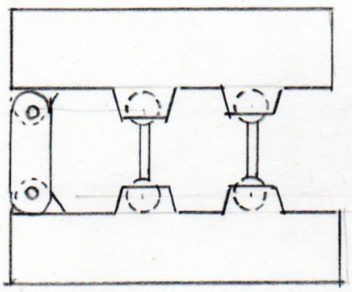
Isključivanjem zglonog štapa i uvodjenjem novog koji ne bi ležao u ravnini s linijskim zglobom se prikazani sistem može svesti na odredjeni, pa se i na taj način može zaključiti da je to mehanizam koji sadrži preodredjenost.

Intuitivno se može prihvatiti da je sistem samo infinitezimalno pomičan, jer nakon male rotacije oko osi linijskog zgloba prelazi formalno uodredjeni sistem. Takav mehanizam se može pogrešno prepoznati kao odredjeni sistem.



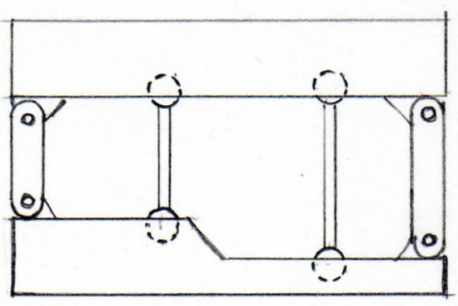
Mehanizam koji sadrži preodredjenost je svaki sistem s dva tijela spojena linijskim zglobom i više zglobnih štapova čije osi sijeku os linijskog zgloba ili su paralelne s njom. Postupak prepoznavanja je analogan postupku za prethodni primjer.

Takav sistem se može pogrešno prepoznati kao preodredjeni sistem ($s > s_o$).



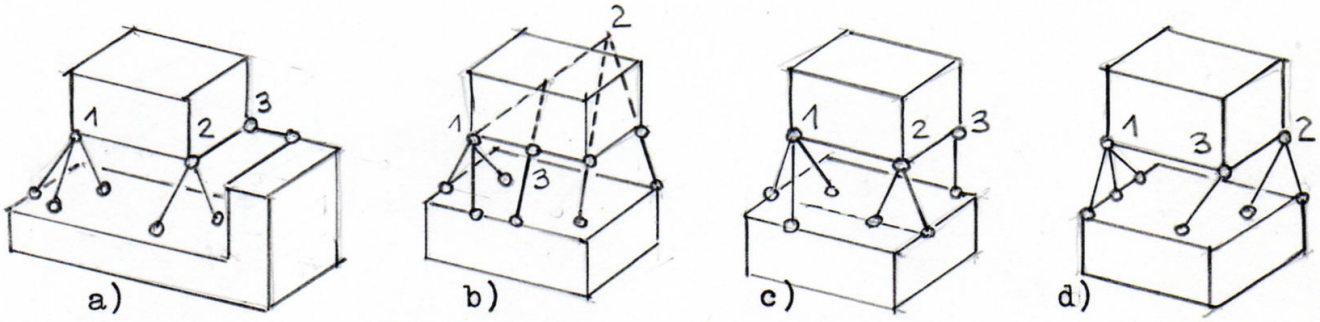
Prikazan je sistem s jednom ravninom simetrije, koji sadrži dva tijela, jedan linijsko zglobni štap i dva kuglasto zglobna štapa. Osi štapova su paralelne, a razmaci osi odnosno središta kugli jednaki za sva tri štapa.

Isključenjem jednog kuglasto zglobnog štapa i uvodjenjem novog koji nije paralelan s preostala dva štapa, može se ovaj sistem svesti na odredjeni, što znači da se radi o mehanizmu, koji sadrži preodredjenost. Do istog rezultata vodi i statička analiza: Sistem ne može ostati u ravnoteži za silu okomitu na osi štapova koja leži u ravnini simetrije. Specijalno opterećenje za koje može ostati u ravnoteži mora sadržavati rezultirajuću silu u ravnini okomitoj na ravninu simetrije i paralelnoj s osima štapova i proizvoljni rezultirajući moment. Sile u spojevima se ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Takav sistem se može pogrešno prepoznati kao odredjen. Zbog jednakog razmaka središta rotacije zglobova ovaj sistem je konačno pomičan.



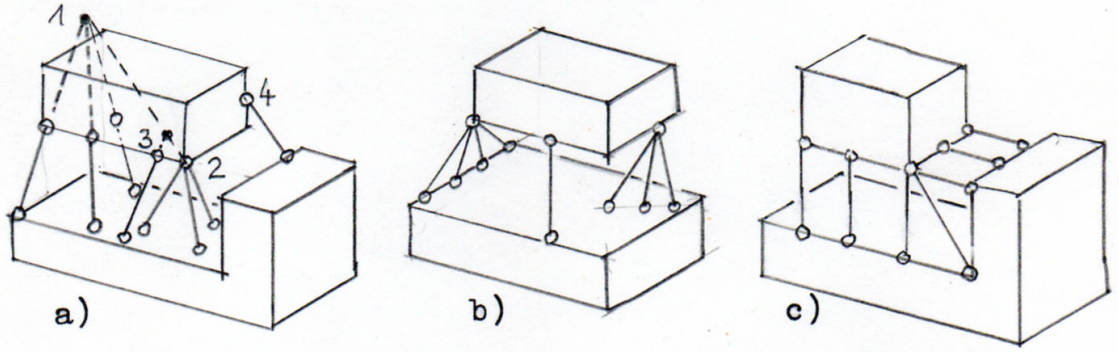
Sistemi s bilo kojim brojem paralelnih štapova većim od tri su također mehanizmi koji sadrže preodredjenost. Takovi se sistemi mogu pogrešno prepoznati kao preodredjeni.

HWPK- 85-131

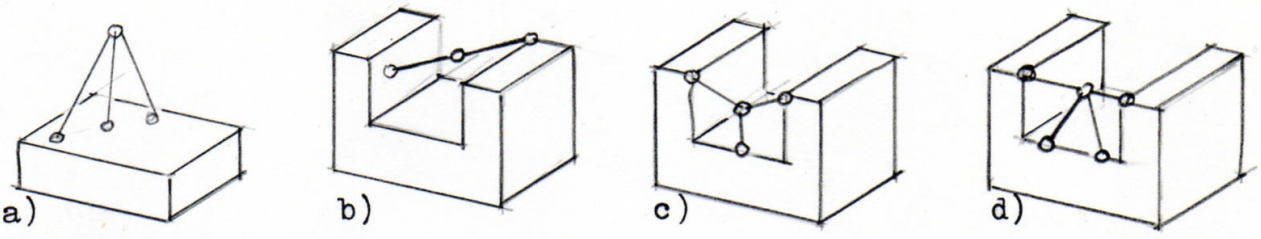


Na gornjim skicama su prikazani mehanizmi koji sadrže preodredjenost, a sastoje se od dva tijela i šest zglobnih štapova grupiranih u tri točke. To su sistemi koji upravo ne ispunjavaju uvjete odredjenosti i mogu se isključivanjem jednog štapa i dodavanjem novog u odgovarajućem položaju svesti na odredjeni sistem.
U slučaju a) štap kroz treću točku je paralelan s spojnicom točaka 1 i 2. U slučaju b) os štapa kroz treću točku se siječe s spojnicom točaka 1 i 2. U oba slučaja rezultirajuća sila mora sjeći spojnicu točaka 1 i 2, a rezultirajući moment mora biti okomit na tu spojnicu. U slučaju c) dva štapa kroz drugu točku leže u ravnini zajedno s prvom točkom. Sile u spojevima su tako raspoređene da iščezavaju njihovi momenti oko osi koja je paralelna s štapom "f" a leži u ravnini s štapovima "d" i "e". Na ksici je označena s "p". Sistem će biti u ravnoteži samo ako rezultirajuća sila opterećenja prolazi tom osi a rezultirajući moment je okomit.
U slučaju d) su tri štapa koja prolaze točkom 1 komplanarni. Lako se dokazuje da sistem ne može ostati u ravnoteži za proizvoljno opterećenje, dok opći zaključci o posebnom opterećenju nisu jednostavni.

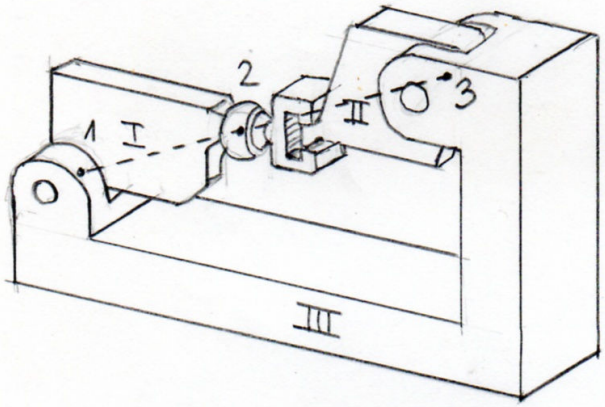
HWPK-85-132



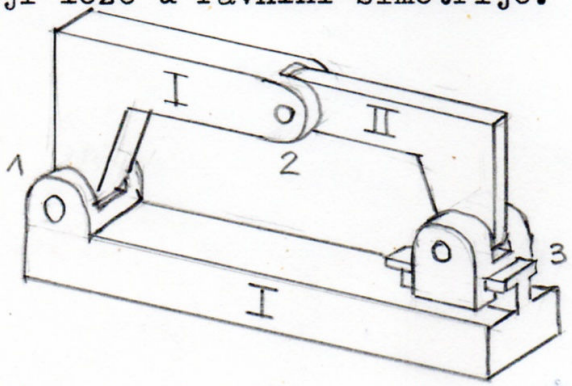
Mehanizmi koji sadrže preodredjenost će biti i svi sistemi s više od šest štapova ukoliko postoje analogna ograničenja za njihov raspored. U slučaju a) se u točkama 1 i 2 sijeku po tri nekomplanarna štapa, a osi preostalih štapova ili sijeku spojnicu 1 i 2 ili su s njom paralelne. U slučaju b) se u točki 1 sijeku četiri štapa koja leže u istoj ravnini, a u točki 2 se sijeku tri štapa koji leže u istoj ravnini. Položaj jednog daljnjeg štapa nije bitan. Mehanizam kojisadrži preodredjenost je prikazan i na skici c) jer ga se može svesti na odredjeni sistem samo ako se isključe tri štapa i uvedu dva na odgovarajućim mjestima. Da je taj sistem mehanizam vidljivo je po tome što su svi štapovi okomiti na jedan pravac.



Na gornjim skicama su prikazani tipični primjeri mehanizama koji sadrže preodredjenost a sastoje se od tijela i jednog čvora, pri čemu su tijelo i čvor povezani s dva ili više štapova na istom pravcu ili tri ili više štapova u istoj ravnini. Spedijalno opterećenje se lako odredjuje: ako su svi štapovi na pravcu i zadana sila na čvor može ležati samo na pravcu, a ako su svi štapovi u ravnini, ravnoteža je moguća ako na čvor djeluju sile u ravnini. Slučaj a) je konačno pomičan, dok su svi drugi primjeri samo infinitezimalno pomični.



Na lijevoj skici je prikazan spojeni sistem koji sadrži sve dijelove i spojeve kao trozglobni sistem, ali su probodišta osi linijskih zglobova u ravnini simetrije i centar kuglastog zgloba na istom pravcu, pa je taj sistem mehanizam u užem smislu. Isključenjem jednog linijskog zgloba i uvodjenjem novog čija os ne leži na spojnici preostalih središta, može se ovaj sistem svesti na trozglobni sistem, dakle na odredjeni sistem, pa se i tako može zaključiti da je to mehanizam koji sadrži preodredjenost. Posebno opterećenje mora sadržavati rezultirajuće sile koje leže u ravnini odredjenoj osima linijskih zglobova i rezultirajuće momente, koji leže u ravnini simetrije.



Na skici je prikazan sistem koji sadrži tri tijela, dva linijska zgloba i jedan linijsko klizni linijski zglob. Zamjenom linijskog zgloba 2 s linijsko kliznim kuglastim i posrednog spoja u 3 s linijskim zglobom može se ovaj sistem svesti na trozglobni sistem koji je odredjen. Kako je za taj postupak bilo potrebno neke reakcije isključiti (u zglobu 2) i neke daljnje dodati (u zglobu 3) može se zaključiti da je taj sistem mehanizam koji sadrži preodredjenost.

HWPK-85-133

Pregled opće klasifikacije i rješavanja spojenih sistema algebarskim postupkom

Pri algebarskom postupku treba prepoznati spojeve i opisati njihovo statičko djelovanje komponentama rezultirajućeg djelovanja. Veličine tih komponenti se kraće nazivaju reakcije. Ukupni broj reakcija označiti će se sa "s".

Postavlja se $s_o = 6t + 3n - 6$ nezavisnih uvjeta ravnoteže, pri čemu se sistem promatra kao izoliran. U tim uvjetima se reakcije smatraju nepoznanicama, pa se dobiva sistem od s_o linearnih algebarskih jednadžbi sa "s" nepoznanica.

Treba ustanoviti koliko linearno nezavisnih jednadžbi sadrži dobiveni sistem, što znači treba odrediti tip najveće determinante različite od nule koju sadrži tabela koeficijenata uz reakcije. Ukupni broj linearno nezavisnih jednadžbi će se označiti s "r"

Odabrati će se "r" nezavisnih jednadžbi i te će se jednadžbe nazvati "osnovne jednadžbe".

Odabrati će se "r" reakcija takovih da determinanta koeficijenata uz te reakcije u osnovnim jednadžbama bude različita od nule. Te će se reakcije nazvati "osnovne reakcije"

Preostale reakcije kojih ima (s - r) nazvati će se "prekobrojne veličine".

Klasifikacija se sada svodi na jednostavne odnose uvedenih veličina. Kod svih zaključaka vrijedi i obrat.
Ako vrijedi $r = s_o$, sistem je geometrijski nepromjenjiv

Ako vrijedi $r = s_o$ i $s = r$, sistem je odredjen (slijedi $s = s_o$)
Ako vrijedi $r = s_o$ i $s > r$, sistem je preodredjen (slijedi $s > s_o$).

Ako vrijedi $r < s_o$, sistem je mehanizam

Ako vrijedi $r < s_o$ i $s = r$, sistem je mehanizam u užem smislu (slijedi $s < s_o$)
Ako vrijedi $r < s_o$ i $s > r$, sistem je mehanizam koji sadrži preodredjenost (može biti $s \geq s_o$ ili $s < s_o$).

Veze brojeva s i s_o su u prva tri slučaja nužni ali ne i dovoljni uvjeti za prepoznavanje, jer u četvrtom slučaju se mogu pojaviti sve kombinacije.

Zbog mogućnosti nesporazuma pri klasifikaciji, prikazati će se cijeli postupak na nešto dulji način kod kojeg se osnovno grupiranje provodi prema odnosu s i s_o i kod kojeg ne vrijedi obrat u svim slučajevima.

Ako vrijedi $s < s_o$ sistem je mehanizam

Ako vrijedi $s < s_o$ i $s = r$, sistem je mehanizam u užem smislu (vrijedi obrat).
Ako vrijedi $s < s_o$ i $s > r$ sistem je mehanizam koji sadrži preodredjenost.

Ako vrijedi $s = s_o$ sistem može biti odredjen ili mehanizam koji sadrži preodredjenost.

HWPK-85-134

Ako vrijedi $s = s_o$ i $r = s_o$ sistem je odredjen(vrijedi obrat).
Ako vrijedi $s = s_o$ i $r < s_o$ sistem je mehanizam koji sadrži preodredjenost.

Ako vrijedi $s > s_o$ sistem može biti preodredjen ili mehanizam koji sadrži preodredjenost.

Ako vrijedi $s > s_o$ i $r = s_o$ sistem je preodredjen (vrijedi obrat).
Ako vrijedi $s > s_o$ i $r < s_o$ sistem je mehanizam koji sadrži preodredjenost.

Pri rješavanju geometrijski nepromjenjivih sistema može opterećenje biti proizvoljno.

Pri rješavanju mehanizama može doprinos opterećenja osnovnim jednadžbama biti proizvoljan. Preostale jednadžbe se mogu izraziti kao linearna kombinacija osnovnih, pa će sistem imati rješenje samo ako se i desne strane preostalih jednadžbi odrede prema istoj linearnoj kombinaciji.

Pri rješavanju preodredjenih sistema i mehanizama koji sadrže preodredjenost moraju prekobrojne veličine biti poznate, ili se sistem mora proširiti dodavanjem $(s - s_o)$ daljnjih jednadžbi.

HWPK-85-135

Ravni statički sistemi
Uvod

Ravni spojeni sistemi su spojeni sistemi kod kojih svi spojevi leže u istoj ravnini i simetrični su obzirom na tu ravninu. Kod preodredjenih sistema i mehanizama koji sadrže preodredjenost biti će sva mehanička svojstva sistema simetrična na tu ravninu.

Za opterećenje u ravnini, koje sadrži samo sile u ravnini i momente okomite na tu ravninu, pojaviti će se u ravnom sistemu odgovarajuće sile i momenti u spojevima,a ostale komponente će iščezavati.

Klasifikacija ravnih spojenih sistema

Pri klasifikaciji ravnih spojenih sistema promatraju se samo statička i kinematička svojstva sistema definirana u ravnini.

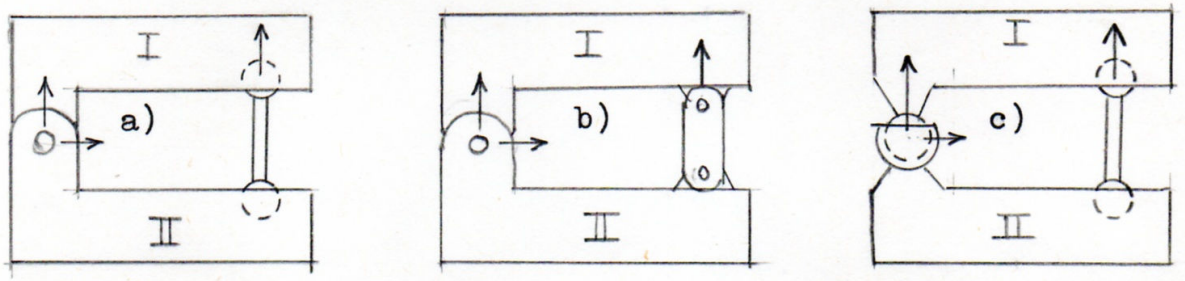
Pri klasifikaciji se postavlja pitanje; da li sistem može ostati u ravnoteži za proizvoljno opterećenje u ravnini, te da li se sve komponente sila u spojevima u toj ravnini i momenti okomiti na tu ravninu mogu odrediti isključivo iz uvjeta ravnoteže.

Algebarski postupci se zasnivaju na broju nezavisnih uvjeta ravnoteže za izolirani sistem na koji djeluju sile u ravnini:

$s_1 = 3t + 2n - 3$

Posljedica tako definirane klasifikacije jest, da različiti spojeni sistemi imaju isto svojstvo u ravnini, pri tome pripadnost prema općoj klasifikaciji ne mora biti jednaka pripadnosti prema klasifikaciji u ravnini.

Odredjeni ravni spojeni sistemi mogu prema općoj klasifikaciji biti odredjeni,preodredjeni i mehanizmi.

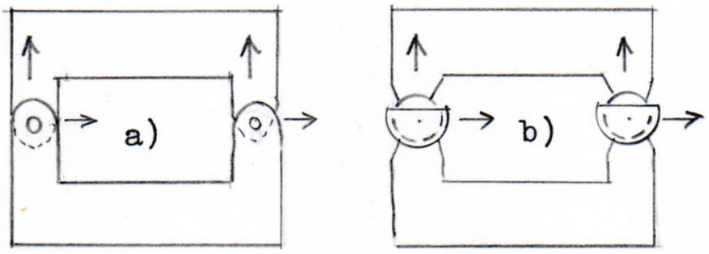


Prikazana su tri sistema koji su prema klasifikaciji ravnih spojenih sistema odredjeni. I kuglasti i linijski zglob imaju u ravnini samo po dvije komponente sile, a oba prikazana zglobna štapa prenose u ravnini samo jednu komponentu sile. Ucrtano je djelovanje sila u spojevima na tijela I. Tri sile na zadanim pravcima koji nisu paralelni i ne sijeku se u istoj točki mogu se u ravnini odrediti iz uvjeta ravnoteže, pa je odredjenost u ravnini dokazana.

Ranije je pokazano da je sistem pod a) odredjen u prostoru, a sistem b) preodredjen u prostoru. Da je sistem pod c) mehanizam se može intuitivno prepoznati, a i upotpunjavanje na odredjeni sistem je jednostavno: kuglasti zglob se može zamijeniti linijskim zglobom.

HWPK-85-136

Preodredjeni ravni spojeni sistemi mogu prema općoj klasifikaciji biti preodredjeni ili mehanizmi koji sadrže preodredjenost.

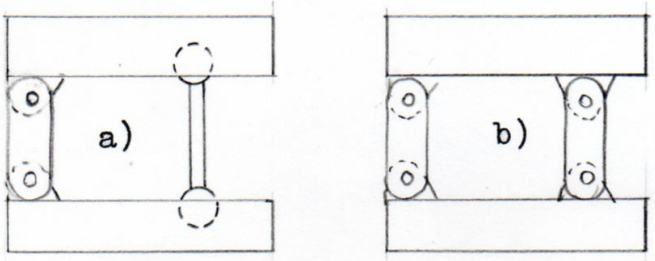


Prikazana su dva jednostavna spojena sistema koji spadaju u ravne sisteme. Prema klasifikaciji ravnih spojenih sistema su oba sistema jednaka; i to preodredjena. To se lako zaključuje promatranjem sila koje prenose spojevi, a koje leže u ravnini simetrije sistema. Na skicama su ucrtane sile koje u spojevima djeluju na tijela I.

Ranije je pokazano da je sistem a) preodredjen u prostoru. Da je sistem b) mehanizam može se intuitivno prepoznati. Taj mehanizam može ostati u ravnoteži samo za opterećenje čije sile leže u ravnini simetrije a pripadni momenti su okomiti na tu ravninu. Pri tome se sve sile u spojevima ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže, pa je to mehanizam koji sadrži preodredjenost.

Sistem koji je prema klasifikaciji ravnih sistema mehanizam u užem smislu može prema općoj klasifikaciji biti ili mehanizam užem smislu ili mehanizam koji sadrži preodredjenost.

HWPK- 85- 137



Prikazana su dva jednostavna spojena sistema koji spadaju u ravne sisteme. Prema klasifikaciji ravnih sistema ta dav sistema su jednaka: mehanizmi u užem smislu.
Svaki od dva štapa prenosi u ravnini simetrije sistema samo po jednu silu na zadanom pravcu, pa sistem ne može ostati u ravnoteži za opterećenje silom u ravnini koja je okomita na osi štapova.
Za sistem a) je ranije pokazano da je mehanizam u užem smislu prema općoj klasifikaciji. U slučaju b) na tijelo djeluju ukupno četiri sile na pravcima i četiri momenta koji se pojavljuju u samo pet uvjeta ravnoteže (doprinos šestome iščezava), pa se očito sile u spojevima ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže i slučaj b) je prema općoj klasifikaciji mehanizam koji sadrži preodredjenost.

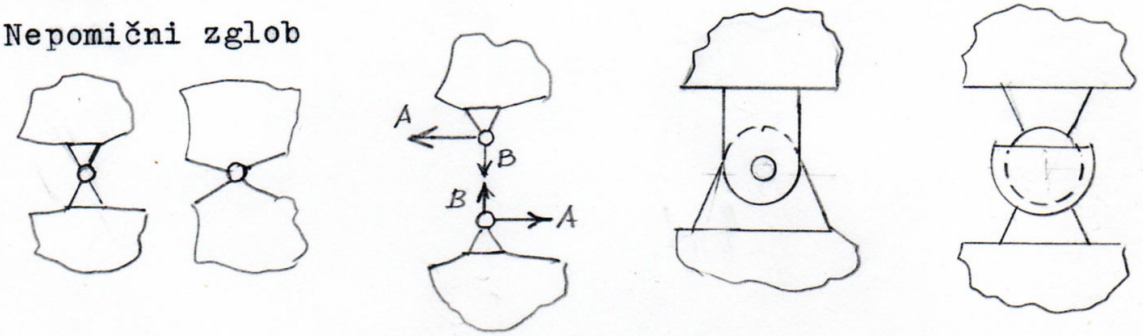
Sistem koji je prema klasifikaciji ravnih sistema mehanizam koji sadrži preodredjenost ima istu pripadnost i prema općoj klasifikaciji. Primjeri na str 131.(sredina i dolje).

Pri promatranju ravnih sistema ne treba mogućnost postojanja ravnoteže za proizvoljno opterećenje u ravnini zamijeniti sa pojmom stabilnosti. Stabilnost će se ovdje smatrati karakteristikom ravnotežnog stanja, a ne pojmom koji se koristi pri klasifikaciji. Tako npr ravnotežno stanje nekog sistema koji je geometrijski nepromjenjiv u ravnini može biti nestabilno t.j. labilno.

Spojevi ravnih sistema

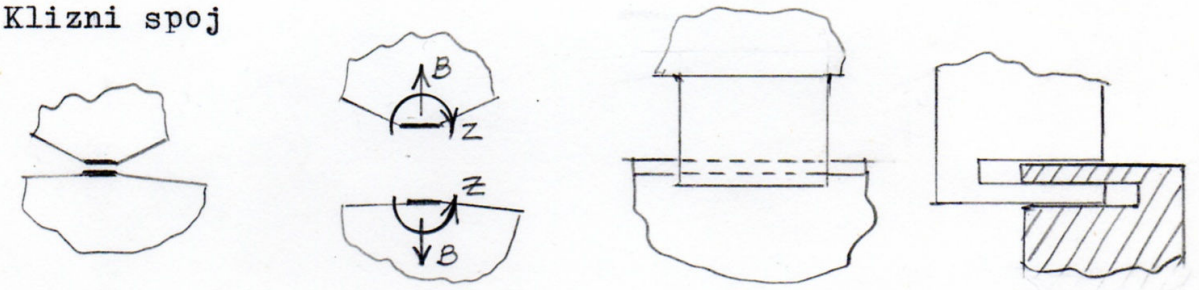
Različiti spojevi mogu imati istu funkciju u ravnini, pa se prema toj funkciji razlikuje samo sedam tipova spojeva. Radi jednostavnosti će se ti tipovi ravninske funkcije spojeva nazvati "spojevi ravnih sistema. Za spojeve u točkama ravnih sistema uvedeni su simboli. Za svaki spoj će se prikazati neki primjeri realizacije u prostoru.

a) Nepomični zglob



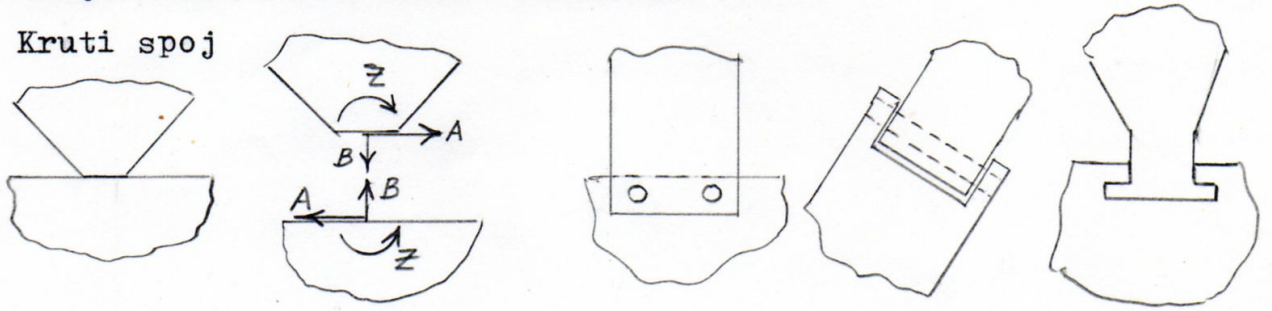
Nepomični zglob omogućava samo rotaciju oko osi okomite na ravninu. Obje translacije u ravnini su spriječene(mjerodavne su samo karakteristike u ravnini). Zbog toga nepomični zglob prenosi dvije sile na zadanim pravcima. Simbolički se može prikazati na dva načina. Primjeri realizacije su linijski zglob čija je os okomita na ravninu i kuglasti zglob.

b) Klizni spoj



Klizni spoj omogućava samo jednu translaciju po pravcu u ravnini. Druga translacija po pravcu i rotacija su spriječeni. Zbog toga klizni spoj prenosi silu okomitu na pravac klizanja i moment. Simbolički se prikazuje s dvije bliske debele linije. Primjeri realizacije su linijsko klizni zglob kojemu pravac klizanja leži u ravnini sistema i ravninsko klizni zglob kojemu je ravnina klizanja okomita na ravninu sistema.

c) Kruti spoj

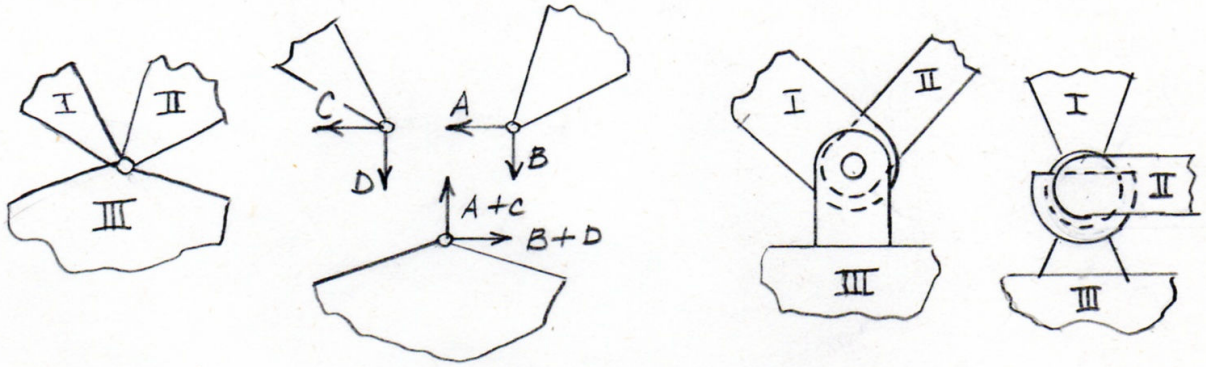


Kruti spoj kao spoj ravnih sistema ne omogućava relativne stupnjeve slobode gibanja u ravnini, pa prenosi dvije komponente sila i jedan moment. Simbolički se prikazuje samo linijom koja razdvaja

HWPK - 85 - 138

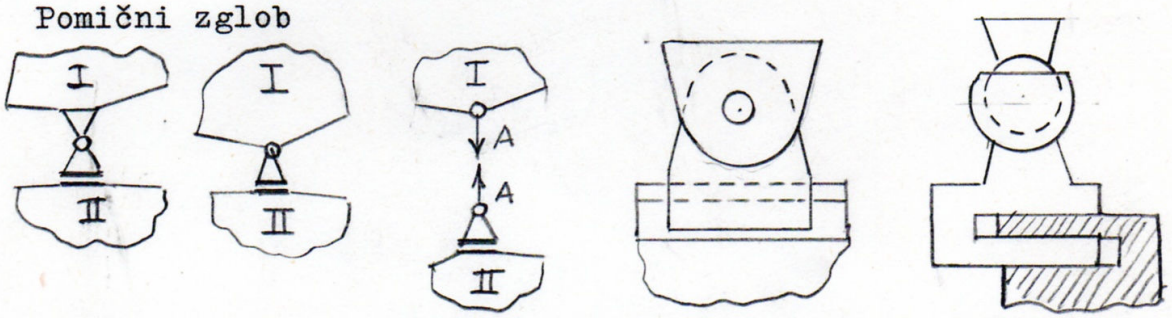
spojene dijelove. Primjeri realizacije su: kruti spoj realiziran u prostoru pomoću vijaka, varenja ili ljepljenja, linijski zglob čija os leži u ravnini sistema, linijsko klizni spoj čiji je pravac klizanja okomit na ravninu sistema.

Višestruki zglob



Višestruki zglob povezuje tri ili više tijela tako da je omogućena rotacija oio osi okmite na ravninu sistema. Sve relativne translacije su spriječene. Pri opisivanju statičkog svojstva odabire se jedno tijelo kao osnovno (na skicama tijelo III) a za druga se pretpostavlja kao da su nepomičnim zglobom spojena s osnovnim tijelom. Ako je "m" broj tijela spojenih višestrukim zglobom ravnog sistema, ondaće statičko djelovanje biti odredjeno s $2^{*}(m - 1)$ skalarnih podataka t.j. reakcija. Primjeri realizavije su: višestruki linijski zglob kojemu je os rotacije okomita na ravninu sistema i višestruki kuglasti zglob čije središte leži u ravnini sistema.

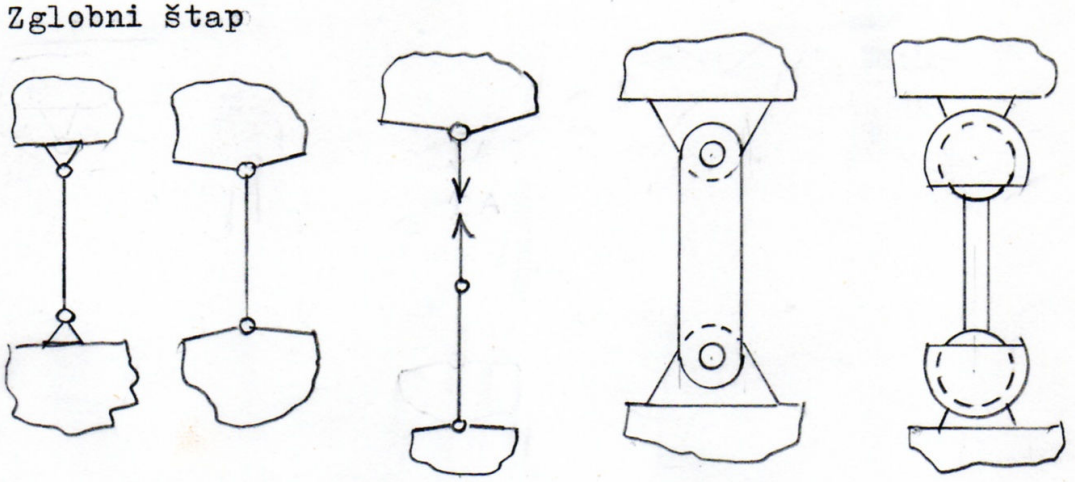
Pomični zglob



POmični zglob je posredni spoj s jednim spojnim elementom, koji je s jednim tijelom spojen nepomičnim zglobom, a s drugim pomoću kliznog spoja. Izmedju spojenih tijela moguća su dva relativna stupnja slobode: translacija i rotacija , pa će spoj prenositi samo jednu silu okomitu na pravac klizanja, Ta sila prolazi središtem zgloba. Realizacija je moguća sa svim kombinacijama realizacija nepomičnog zgloba i kliznog spoja, ovdje su skicirane samo dvije jedan kojoj su stupnjevi slobode u ravnini ujedno i svi stupnjevi slobode i druga koja u prostoru omogućuje pet relativnih stupnjeva slobode izmedju spojenih tijela.

HWPL-85-139

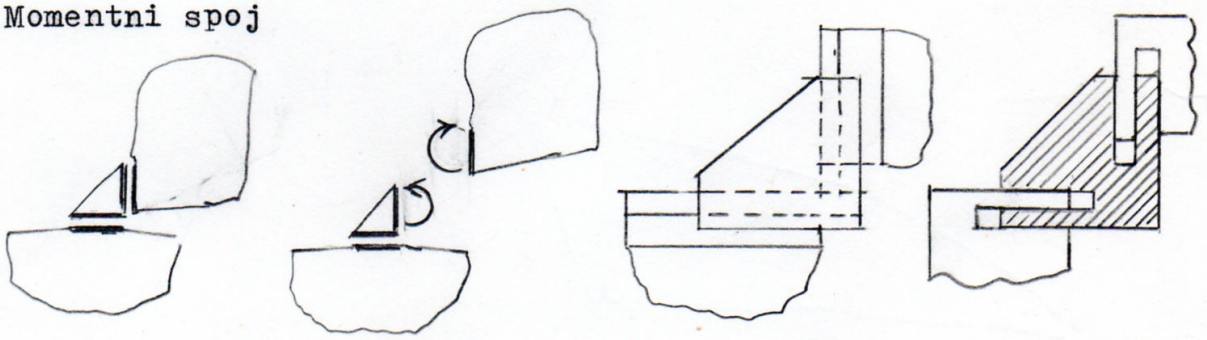
Zglobni štap



Zglobni štap je posredni spoj s jednim spojnim elementom, koji je sa svakim od dva tijela spojen s nepomičnim zglobom. Izmedju spojenih tijela su moguća dva relativna stupnja slobode gibanja: dvije rotacije oko paralelnih osi. Za odredjivanje statičkih svojstava spoja može se jedna od rotacija shvatiti kao mogućnost infinitezimalne translacije, pa je spriječena samo jedna translacija po pravcu i spoj prenosi odgovarajuću silu.koja prolazi središtima zglobova. Po statičkoj funkciji zglobni štap je ekvivalentan pomičnom zglobu. Realizacija je moguća s linijsko zglobnim štapom, kuglasto zglobnim štapom, te štapom koji ima jedan kuglasti i jedan linijski zglob (nije skiciran).

HWPK-85-140

Momentni spoj



Momentni spoj spada u posredne spojeve s jednim spojnim elementom, koji je sa svakim od dva tijela spojen kliznim spojem.Izmedju spojenih tijela moguće su dvije translacije na okomitim pravcima, dok je rotacija spriječena, pa spoj prenosi samo moment u ravnini sistema (vektor momenta okomit na ravninu). Realizacija je moguća sa svim kombinacijama realizacije kliznog spoja.

Rješavanje ravnih spojenih sistema

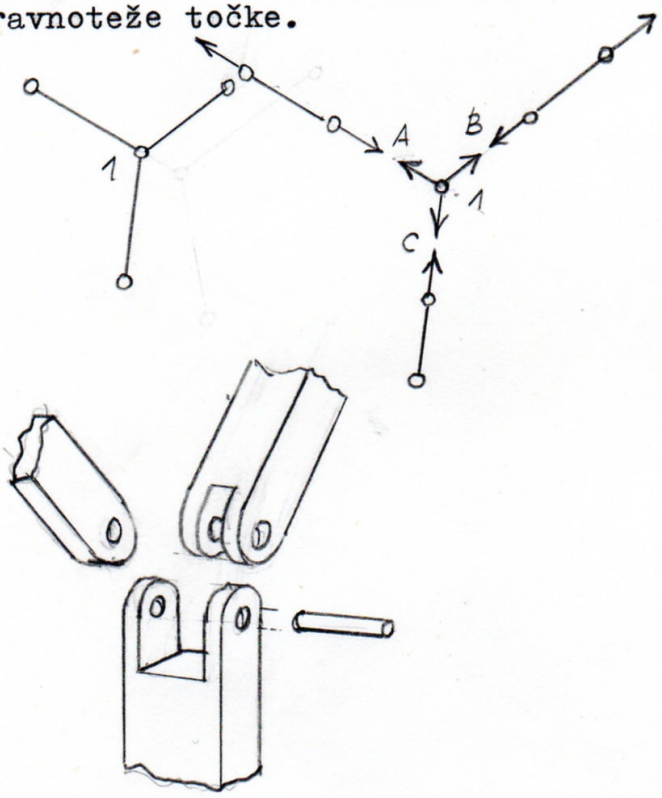
Rješavanje ravnih spojenih sistema je restrikcija rješavanja spojenih sistema i može se definirati kao odredjivanje sila u spojevima ravnog sistema uz zadano opterećenje u ravnini.

I ovdje je bitno, da li se sile u spojevima mogu odrediti isključivo iz uvjeta ravnoteže? Postupak je analogan općem postupku. I u ovom slučaju je pogodno da se osim ravnoteže tijela promatra

i ravnoteža čvorova. I ovdje su teoretski mogući slučajevi koji se ne mogu obuhvatiti podjelom sistema na tijela i čvorove; u tom bi se slučaju i spojni elementi promatrali kao i sva druga tijela.

Ravninski zglobni čvor

Ravninski zglobni čvor je višestruki zglob ravnog sistema u kojem se spajaju samo spojni elementi. Kao i kod prostornog zglobnog čvora , pridružuje se čvoru zamišljeni čvorni element na koji su spojeni svi spojni elementi i za koji će se postavljati uvjeti ravnoteže točke.



Kod sistema spojenih u točkama, zamišljeni čvorni element je materijalna točka, pa se simbolički prikazuje kružićem na koji djeluju sile spojnih elemenata.

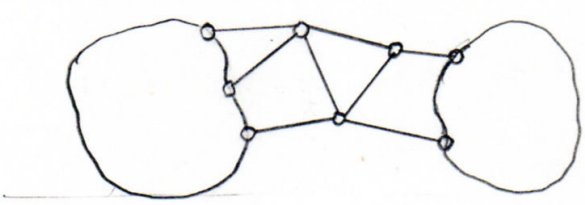
Realizacija ravninskog zglobnog čvora je moguća s kuglastim zglobovima, kao kod prostornog zglobnog čvora ili sa linijskim zglobovima čije su osi okomite na ravninu sistema, i koji se pojavljuju u primjenama. Moguća je izvedba u kojoj će jedan element sadržavati osovinu na koju su spojeni ostali elementi. Ta se osovina može shvatiti kao realizacija čvornog elementa.

Na čvor može djelovati zadana sila samo kao djelovanje spojnog elementa koji nije dio promatranog sistema, a uvjeti su takovi da se ta sila mogla unaprijed odrediti.To se djelovanje svakako može zamijeniti rezultantom koja prolazi kroz os čvora, pa se kaže:"Opterećenje čvora može biti samo koncentrirana sila".

Podloga

Definicija podloge u ravnom spojenom sistemu odgovara općoj definiciji navedenoj u ranije.

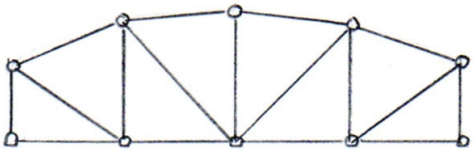
Ravna rešetka

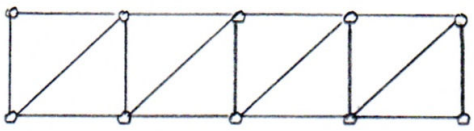


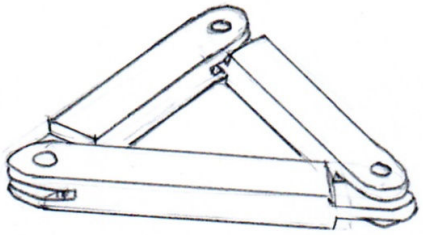
Ravna rešetka je dio ravnog spojenog sistema, koji sadrži samo ravninske zglobne čvorove i zglobne štapove. Realizacija u gradjevinarstvu je vrlo rijetka, ali kao idealizacija se koristi pri proračunu rešetaka s krutim čvorovima i dovoljno vitkim štapovima.

HWPK-85-141

Ravni rešetkasti nosač







Ravni rešetkasti nosač je ravni spojeni sistem, koji je geometrijski nepromjenjiv u ravnini sistema, a sadrži samo ravninske zglobne čvorove i zglobne štapove. Geometrijska nepromjenjivost se odnosi na medjusobni položaj čvorova u ravnini.
Treba uočiti da ravan rešetkasti nosač realiziran linijskim zglobovima nije ujedno i prostorni rešetkasti nosač nego preodredjeni spojeni sistem. Prikazan je spojeni sistem koji pripada i revnim spojenim sistemima. Kao ravan spojeni sistem ima tri čvora i tri zglobna štapa, pa je u ravnini odredjen (čvorovi ne leže na istom pravcu). Prema općoj klasifikaciji to nije rešetka nego sistem koji sadrži tri tijela spojena linijskim zglobovima. Intuitivno se može prihvatiti da je sistem geometrijski nepromjenjiv t.j. da se ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju koje može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje. Prema tome može biti samo odredjen ili preodredjen. Ukupni broj reakcija je $s = 5 \cdot 3 = 15$. Broj nezavisnih uvjeta ravnoteže izoliranog sistema $s_o = 6 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 6 = 12$. Slijedi $s > s_o$, dakle se sve sile u spojevima ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Sistem je geometrijski nepromjenjiv, a sve sile u spojevima se ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže što znači da je sistem preodredjen. Da bi se istakla razlika prema pripadnosti tog sistema kao ravnog, može se i reći "preodredjen u prostoru".

HWPK-85-142

Napomena o iskorištavanju uvjeta ravnoteže pri rješavanju ravnih spojenih sistema.

Iskorištavanje uvjeta ravnoteže ravnih sistema je potpuno analogno iskorištavanju uvjeta ravnoteže u prostoru, ali će se postaviti samo dio jednadžbi t.j. $s_1 = 3t + 2n - 3$, pri čemu je "t" broj tijela, a "n" broj čvorova ravnog spojenog sistema.

Napomena o prepoznavanju ravnih spojenih sistema pomoću statičkih svojstava

Ravni spojeni sistemi će se dijeliti na geometrijski nepromjenjive ravne spojene sisteme i na ravne mehanizme.

Geometrijski nepromjenjivi ravni spojeni sistemi će se dijeliti na odredjene i preodredjene.

Zaključci o statičkim svojstvima su analogni zaključcima o općim,

svojstvima sistema, ali se ovdje ograničavaju samo na svojstva definirana u ravnini.

Mehanizmi će se podijeliti na mehanizme u užem smislu i mehanizme koji sadrže preodredjenost.

Klasifikacija ravnih spojenih sistema

U klasifikaciji ravnih spojenih sistema ignoriraju se unutarnji spojevi. Unutarnji spojevi su spojevi koji spajaju dijelove istog tijela.

Geometrijski nepromjenjivi sistemi

Definicije i svojstva su analogni općim definicijamai svojstvima, pri čemu se promatraju samo svojstva definirana u ravnini sistema. Navesti će se samo statička definicija:

Geometrijski nepromjenjiv ravni spojeni sistem može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje u ravnini sistema (sile leže u ravnini, a vektori momenata okomiti).

HWPK-85-143

Odredjeni ravni spojeni sistemi

Statička definicija: Odredjeni ravni spojeni sistem može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje u ravnini sistema, a sve sile i momenti u spojevima ravnog sistema mogu se odrediti isključivo iz uvjeta ravnoteže.

Ostali zaključci i svojstva odgovaraju onima iz općeg slučaja.

Odredjeni ravni spojeni sistemi će se podijeliti na: elementarne, ulančene, rekurzivno rješive, nepravilne i složene.

Elementarni sistemi

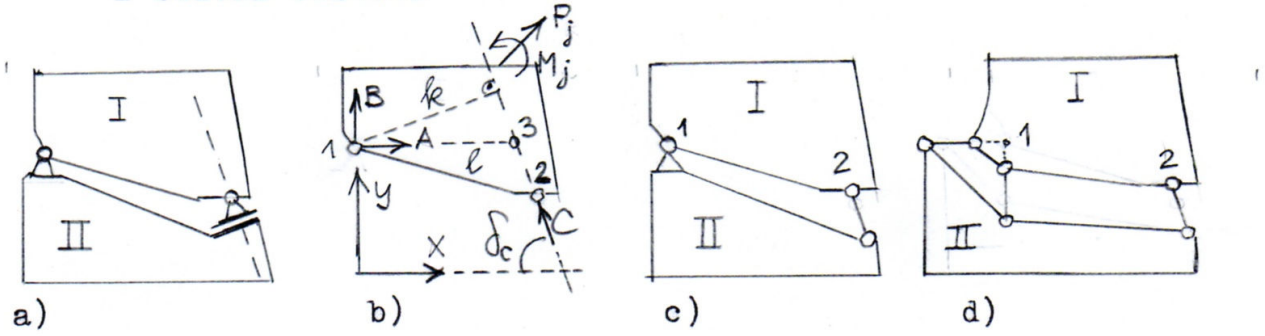
Elementarni ravni sistemi su odredjeni ravni spojeni sistemi koji se mogu neposredno prepoznati prema geomterijskim odnosima spojeva i njihovim svojstvima.

Elementarni sistemi će se podijeliti na lanac krutih spojeva, prosto spojene sisteme, trozglobni sistem.

Lanac krutih spojeva

Opis lanca krutih spojeva unutar ravnih sistema jednak je općem opisu.

Prosti spoj s nepomičnim i pomičnim zglobom i slični sistemi



Dva tijela su spojena s nepomičnim i jednim pomičnim zglobom (skica a)). Promatrati će se uvjeti ravnoteže tijela I, što znači da će se uvjeti tijela II smatrati zavisnima. Djelovanje nepomičnog zgloba će se prikazati s dvije sile na odabranim pravcima, a njihove veličine t.j. reakcije označiti će se s A i B. Veličina sile u pomičnom zglobu označiti će se s C. Pravci uz A i B se obično odabiru prema djelovanju opterećenja, ali tako da su medjusobno okomiti. Rješenje bi bilo najjednostavnije kada bi pravac uz B bio paralelan s pravcem uz C. Ovdje će se paralelno s A i B odabrati koordinatni sustav x,y. Pravac uz C je odredjen točkom 2 i kutem izmedju njega i pravca osi x, koji je označen s δ_c. Odrediti će se presjecište pravaca uz A i uz C i označiti s 3 (u praktičnom slučaju se može odrediti i grafički).
Iskoristiti će se alternativna formulacija uvjeta ravnoteže: sume momenata na točke 1 i 3 i suma projekcija na os y.

iz $\sum_{SVE} M_{(1)i}=0$ slijedi $k \cdot C = -\sum_{OPT} M_{(1)j}$

iz $\sum_{SVE} M_{(3)i}=0$ slijedi $-l \cdot B = -\sum_{OPT} M_{(3)j}$

iz $\sum P_{xi}=0$ slijedi $A - \cos\delta_c \cdot C = -\sum_{OPT} P_{xj}$

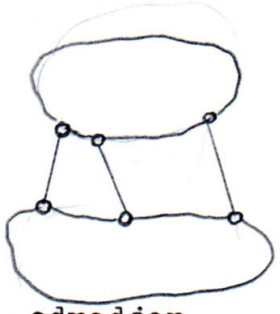
pri tomu je k udaljenost točke 1 od pravca uz C, a l udaljenost 1 i 3. Sistem jednadžbi je rješiv ako je $k>0$, jer je $l>k$, pa $k>0$ povlači i $l>0$. To je ujedno i uvjet odredjenosti sistema: Spoj dvaju tijela u ravnini s jednim pomičnim i jednim nepomičnim zglobom biti će odredjen ako okomica na pravac klizanja pomičnog zgloba povučena kroz središte tog zgloba ne sadrži središte nepomičnog zgloba.

Na potpuno jednak način riješiti će se spoj dvaju tijela u ravnini s nepomičnim zglobom i zglobnim štapom. Uvjet rješivosti je analogan: Spoj dvaju tijela u ravnini s nepomičnim zglobom i zglobnim štapom biti će odredjen ako središte nepomičnog zgloba ne leži na osi zglobnog štapa.

Na potpuno jednak način riješiti će se i spoj dvaju tijela s tri zglobna štapa od kojih su dva okomiti. Uvjet rješivosti će se formulirati za opći slučaj spajanja s tri zglobna štapa u ravnini: Dva tijela spojena u ravnini s tri zglobna štapa biti će odredjena ako osi tih štapova nisu paralelne i ako se te osi ne sijeku u istoj točki

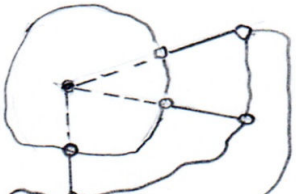
HNPK-85-144

Prosti spoj s tri zglobna štapa i slični sistemi

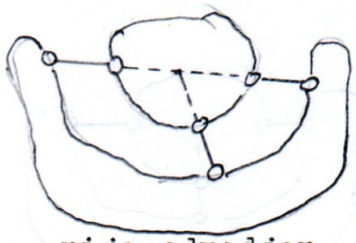


odredjen

Dva tijela su spojena s tri zglobna štapa, koji prenose sile na pravcima odredjenim spojnicama zglobova. Rješenje sistema se svodi na uravnotežavanje s tri sile na zadanim pravcima u ravnini. Najjednostavnije je postaviti uvjete ravnoteže za jedno tijelo. Uvjeti rješivosti mogu se direktno postaviti; a njima odgovaraju uvjeti odredjenosti:
Osi štapova nisu paralelne i ne sijeku se u istoj točki.
Lako se uvidja da sistem nije odredjen ako su štapovi paralelni ili ako se sijeku istoj točki. Kada bi štapovi bili paralelni mogla bi se postaviti os projekcija okomita na njih. U sumi projekcija na tu os iščezli bi doprinosi sila u štapovima, pa bi ravnoteža bila moguća samo ako bi i projekcija rezultirajuće sile opterećenja iščezavala. Slijedi da ravnoteža ne bi bila moguća za proizvoljno opterećenje.
Kada bi se osi štapova sijekle u istoj tpčki mogla bi se ta točka odabrati kao točka redukcije, ravnotežabi bila moguća samo ako bi moment ukupnog opterećenja na tu točku iščezavao. I u tom slučaju ravnoteža ne bi bila moguća za proizvoljno opterećenje. Oba opisana sistema bi bili mehanizmi.

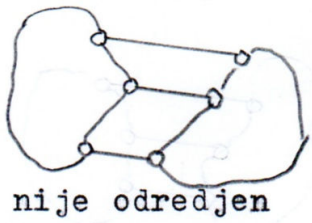


nije odredjen

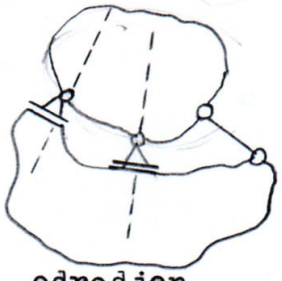


nije odredjen

Spoju s tri zglobna štapa su ekvivalentni sistemi kod kojih se umjesto zglobnih štapova pojavljuju pomični zglobovi. Uvjet će glasiti: Pravci sila koje prenose pomični zglobovi nisu paralelni i ne sijeku se u istoj točki.
Očito su moguće i kombinacije zglobnih štapova i pomičnih zglobova.



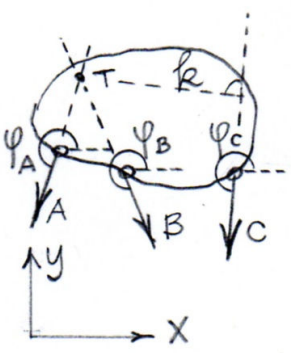
nije odredjen



odredjen

a) Dostupno jedno sjecište pravaca sila u spojevima.

Iskoristiti će se tri uvjeta ravnoteže za jedno tijelo u ravnini. (Preostala tri su identično zadovoljena jer sve sile djeluju u ravnini sistema). Za ovaj slučaj je pogodna osnovna formulacija. Pretpostaviti će se da je koordinatni sistem odabran iz nekih drugih razloga tako da nijedan pravac sile u spoju nije paralelan s jednom od osi. Točka redukcije će se odabrati u sjecištu pravaca sila u spojevima. Pravac i smjer strijelica uz sile u spojevima odredjeni su u koordinatnom sistemu orjentiranim kutevima od osi do vektora $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ (prema općim izrazima $\psi=0$).



HWPK-85-145

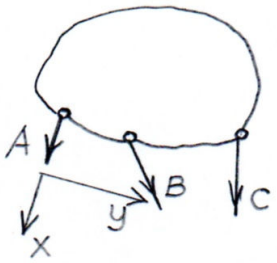
Uvjeti ravnoteže vode na sistem lineranih algebarskih jednadžbi:

iz $\sum_{SVE} P_{xi} = 0$ slijedi: $\cos\varphi_A \cdot A + \cos\varphi_B \cdot B + \cos\varphi_C \cdot C = -\sum_{OPT} P_{xj}$

iz $\sum_{SVE} P_{yi} = 0$ slijedi: $\sin\varphi_A \cdot A + \sin\varphi_B \cdot B + \sin\varphi_C \cdot C = -\sum_{OPT} P_{yj}$

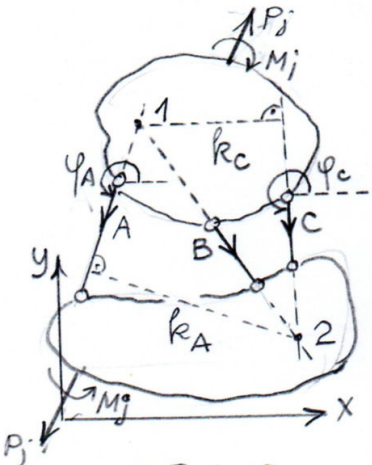
iz $\sum_{SVE} P_{zi} = 0$ slijedi: $s_C \cdot k_C \cdot C = -\sum_{OPT} M_{(T)j}$

pri tome je k udaljenost pravca sile C od točke redukcije T. Suma momenata na desnoj strani sadrži momente na točku od sila i momenata opterećenja. Za situaciju prikazanu na skici: $s_C = -1$
Iz treće jednadžbe se direktno odredjuje C i uvrštava u prve dvije koje treba riješiti kao sistem od dvije jednadžbe.



Rješenje se može nešto pojednostavniti ako se koordinatni sistem odabere tako da su jedna os i jedan pravac sile u spoju paralelni. Ako se npr os x odabere paralelno s pravcem sile A, slijedi $\sin\varphi_A = 0$ i dobivena je trokutna shema koeficijenata.

b) Dostupna dva sjecišta pravaca sila u spojevima



Specijalni slučaj kod kojeg su dva štapa okomita je prikazan. I ovdje će se iskoristiti alternativna formulacija uvjeta ravnoteže: dvije sume momenata i projekcija na jednu os.
Točke redukcije se odabiru u sjecištima, os projekcija je odabrana proizvoljno (ne smije biti okomita na spojnicu sjecišta).
Na skici je ucrtano djelovanje sila samo na tijelo I.

iz $\sum_{SVE} P_{xi} = 0$ slijedi: $\cos\varphi_A \cdot A + \cos\varphi_B \cdot B + \cos\varphi_C \cdot C = -\sum_{OPT} P_{xi}$

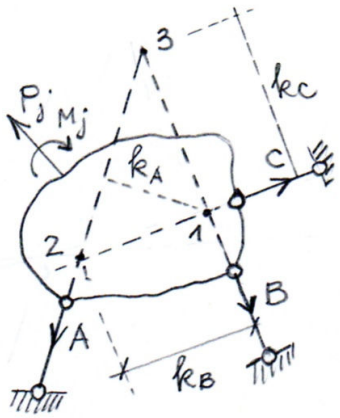
iz $\sum_{SVE} M_{(2)i} = 0$ slijedi: $s_A \cdot k_A \cdot A = -\sum_{OPT} M_{(2)j}$

iz $\sum_{SVE} M_{(1)i} = 0$ slijedi: $s_C \cdot k_C \cdot C = -\sum_{OPT} M_{(1)j}$

pri tome je k_A udaljenost pravca sile A od točke 2, a k_C je udaljenost pravca sile C od točke 1. Za situaciju prikazanu na skici vrijedi: $s_A = +1$ i $s_C = -1$.
Iz druge i treće jednadžbe se direktno odredjuju sile A i C.
Uz poznate A i C, odredjuje se B iz prve jednadžbe.
U specijalnom slučaju kod kojeg su pravci uz A i C paralelni i okomiti na pravac uz B, može se os x odabrati paralelno s B, pa se dobiva dijagonalna shema koefcijenata, jer u tom slučaju vrijedi: $\cos\varphi_A = 0$, $\cos\varphi_C = 0$.

HWPK-95-146

c) Dostupna tri sjecišta pravaca sila u spojevima



U ovom slučaju je pogodno iskoristiti alternativnu formulaciju uvjeta ravnoteže: tri sume momenata. Kao točke redukcije se odabiru sjecišta pravaca sila. Taj se postupak naziva Ritter-ov prema autoru. Postupak se često još naziva i grafoanalitički jer se krakovi za odredjivanje momenata očitavaju s nacrta, a momenti se računaju.
Na skici je ucrtano smo djelovanje sila na tijelo I. Sjecišta su označena brojevima 1,2,3.
Uvjeti ravnoteže vode na sistem linearnih algebarskih jednafžbi s dijagonalnom shemom koeficijenata; u svakoj jednadžbi je različit od nule samo po jedan koeficijent uz nepoznanice:

iz $\sum_{SVE} M_{(1)} = 0$ slijedi: $\quad s_A \cdot k_A A = -\sum_{OPT} M_{(1)j}$

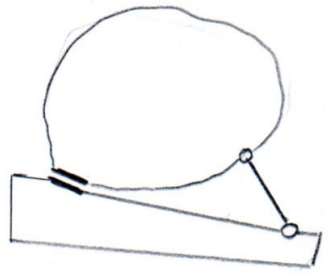
iz $\sum_{SVE} M_{(2)} = 0$ slijedi: $\quad s_B \cdot k_B \cdot B = -\sum_{OPT} M_{(2)j}$

iz $\sum_{SVE} M_{(3)} = 0$ slijedi: $\quad s_c \, k_c \cdot C = -\sum_{OPT} M_{(3)j}$

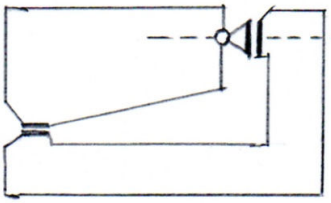
pri tome su k_A, k_B, k_C udaljenosti pravaca sila od odgovarajućih sjecišta odnosno točaka redukcije. Za situaciju prikazanu na skici vrijedi: $s_A = +1, s_B = -1, s_c = +1$.

HWPE-85-147

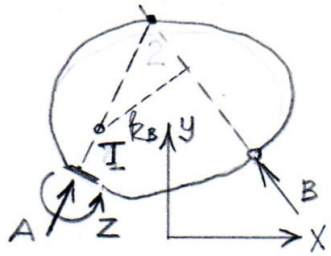
Prosti spoj s kliznim spojem i zglobnim štapom ili pomičnim zglobom



Dva tijela su spojena kliznim spojem i zglobnim štapom u ravnini. Rješenje sistema vodi na uravnoteženje s dvije sile na zadanim pravcima i jednim koncentriranim momentom. Uvjet rješivosti se može direktno postaviti: dvije sile ne smiju biti paralelne, pa će uvjet odredjenosti sistema glasiti:
Os zglobnog štapa ne smije biti okomita na pravac klizanja kliznog spoja.



Po statičkim svojstvima je prikazanom sistemu ekvivalentan sistem s kliznim spojem i pomičnim zglobom. Pomični zglob prenosi silu okomitu na pravac klizanja koja prolazi središtem zgloba. U tom će slučaju uvjet odredjenosti glasiti: Pravci klizanja kliznog spoja i pomičnog zgloba ne smiju biti paralelni.



Za rješenje će se iskoristiti uvjeti ravnoteže jednog tijela i to u osnovnoj formulaciji. Pretpostaviti će se da je koordinatni sistem odabran iz nekih drugih razloga, tako da nijedan

pravac sila u spoju nije paralelan s jednom od osi. Točka redukcije će se odabrati na jednom od pravaca (na skici:točka T na pravcu uz A). Uvjeti ravnoteže vode na sistem lineranih algebarskih jednadžbi:

iz $\sum_{SVE} P_{xi} = 0$ slijedi: $\cos\varphi_A \cdot A + \cos\varphi_B \cdot B = -\sum_{OPT} P_{xj}$

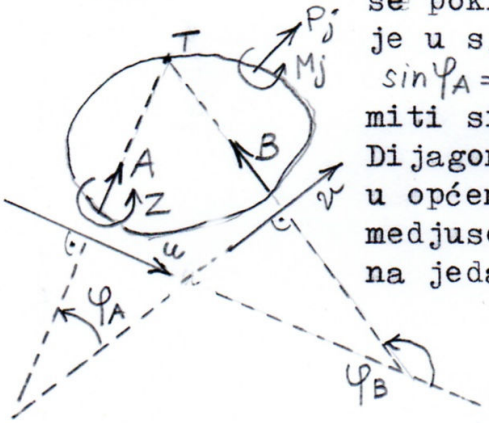
iz $\sum_{SVE} P_{yi} = 0$ slijedi: $\sin\varphi_A \cdot A + \sin\varphi_B \cdot B = -\sum_{OPT} P_{yj}$

iz $\sum_{SVE} P_{zi} = 0$ slijedi: $s_B \cdot k_B \cdot B + s_z \cdot Z = -\sum_{OPT} M_{(T)j}$

pri tome je k_B udaljenost točke redukcije od pravca sile B. Za situaciju na skici vrijedi: $s_B = +1$, $s_z = +1$. Prve dvije jednadžbe se mogu zasebno riješiti kao sistem od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice i tako odrediti reakcije A i B. Uz poznati B može se iz treće jedandžbe odrediti C.



Ako se koordinatni sistem odabere tako da je jedna koordinatna os paralelna s jednim pravcem sile u spoju, a točka redukcije se odabere na sjecištu pravaca sila u spojevima iščeznuti će dva koeficijenta uz nepoznanice , pa će shema koeficijenata postati trokutna, što olakšava rješavanje. Na skici je prikazan slučaj os x se poklapa s pravcem uz A, a točka redukcije T je u sjecištu pravaca uz A i B, pa će vrijediti: $\sin\varphi_A = 0$, $k_B = 0$. Ako su pravci uz A i B okomiti sistem jednadžbi postaje dijagonalan. Dijagonalni sistem jednadžbi se može postići i u općem slučaju tako da osi projekcija ne budu medjusobno okomite, nego da svaka bude okomita na jedan od pravaca sila u spojevima.



Na skici je os "u" okomita na pravac sile A. Os "v" je okomita na pravac sile B. Kut φ_A odredjuje strijelicu uz A prema osi v, a kut φ_B odredjuje strijelicu uz B prema osi u. Uvjeti ravnoteže: sume projekcija na osi u i v, te suma momenata na sjecište T vode na dijagonalni sistem:

iz $\sum_{SVE} P_{vi} = 0$ slijedi: $\cos\varphi_A \cdot A = -\sum_{OPT} P_{vj}$

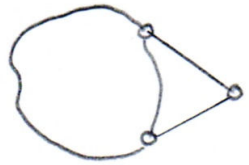
iz $\sum_{SVE} P_{ui} = 0$ slijedi: $\cos\varphi_B \cdot B = -\sum_{OPT} P_{uj}$

iz $\sum_{SVE} M_{(T)i} = 0$ slijedi: $s_z \cdot Z = -\sum_{OPT} M_{(T)j}$

Za situaciju prikazanu na skici vrijedi: $s_z = +1$.

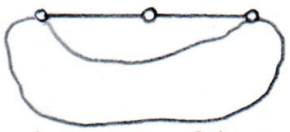
HWPK-85-148

Prosti spoj tijela i čvora u ravnini



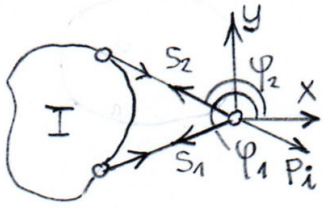
odredjen

Promatra se ravni spojeni sistem koji sadrži jedno tijelo i ravninski zglobni čvor. Ako je čvor spojen s tijelom s dva nekomplanarna štapa sistem je odredjen u ravnini i nazivati će se prosti spoj tijela i čvora u ravnini.



nije odredjen

Pri rješavanju će se promatrati ravnoteža čvora, a uvjeti ravnoteže tijela će biti zavisni. Ravnoteža čvora se svodi na ravnotežu točke, pa se u ravnini mogu iskoristiti dva računska uvjeta. Kao prvo će se uvjeti ravnoteže postaviti projciranjem sila na osi pravokutnog koordinatnog sistema koji nije odabran samo radi tog zadatka. Opterećenje čvora mogu biti samo koncentrirane sile čije su veličine P_1 do P_n. Sile u štapovima će se označiti s S_1 i S_2. Uvjeti ravnoteže vode na sistem linearnih algebarskih jednadžbi:

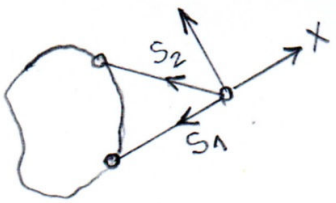


iz $\sum_{SVE} P_{xi} = 0$ slijedi: $\cos\varphi_1 S_1 + \cos\varphi_2 S_2 = -\sum_{OPT} P_{xj}$

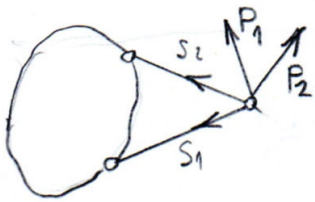
iz $\sum_{SVE} P_{yi} = 0$ slijedi: $\sin\varphi_1 S_1 + \sin\varphi_2 S_2 = -\sum_{OPT} P_{yj}$

Na skici su ucrtana djelovanja sila na čvor i na tijelo. Djelovanje na štapove se iz toga može rekonstruirati. Kod rešetaka se obično strijelice uz sile u štapovima ucrtavaju vlačno, što je i ovdje uvedeno. Znači da će pozitivni S_1 ili S_2 označavati stvarno vlačno djelovanje (rastezanje štapa), a negativne veličine će označavati stvarno tlačno djelovanje (skraćenje štapa).

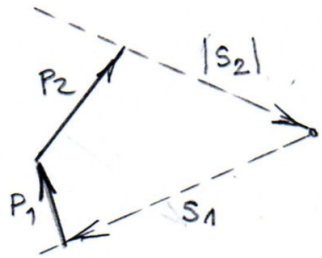
HWPK-85-149



Rješenje će biti nešto jednostavnije ako se jedna koordinatna os odabere tako da bude paralelna s jednimod štapova. Npr neka os x bude paralelna s silom S_1. U tom će slučaju vrijediti $\sin\varphi_1 = 0$ i sistem jednadžbi će imati trokutnu shemu koeficijenata.



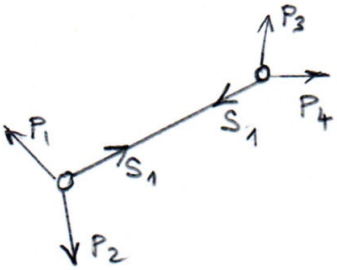
Dijagonalni sistem jednadžbi se može postići izborom osi projekcija od kojih je svaka okomita na jedan pravac nepoznatih sila(kao prve dvije jednadžbe prostog spoja s kliznim spojem i zglobnim štapom str.148 dolje)



Zadatak se jednostavno može riješiti i grafički. Konstruira se poligon zadanih sila. Iz početka poligona povlači se paralela s jednom neoiznatom silom, a iz šiljka paralela s drugom. Presjecište odredjuje vektore sila. Ako su sile na skici sistema ucrtane vlačno, a ustvari djeluju tlačno treba uz strijelicu u poligonu upisati apsolutnu vrijednost veličine, a zasebno u tabeli iskazati rješenje (npr. $S_2 = -28$ KN). U praktičnom po-

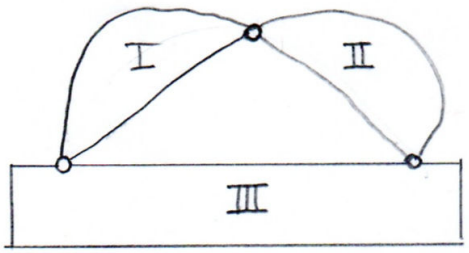
stupku se često sile na skicu sistema ucrtavaju nakon rješavanja i to s stvarnim smjerovima djelovanja.i označavaju općim oznakama. Prednost tog postupka je bolja preglednost odnosa sila. Prema tehničkoj notaciji bi onda sve veličine trebale biti pozitivne. Ipak se u prikazu rješenja vlačne sile upisuju kao pozitivne, a tlačne kao negativne, što nije dosljedno.

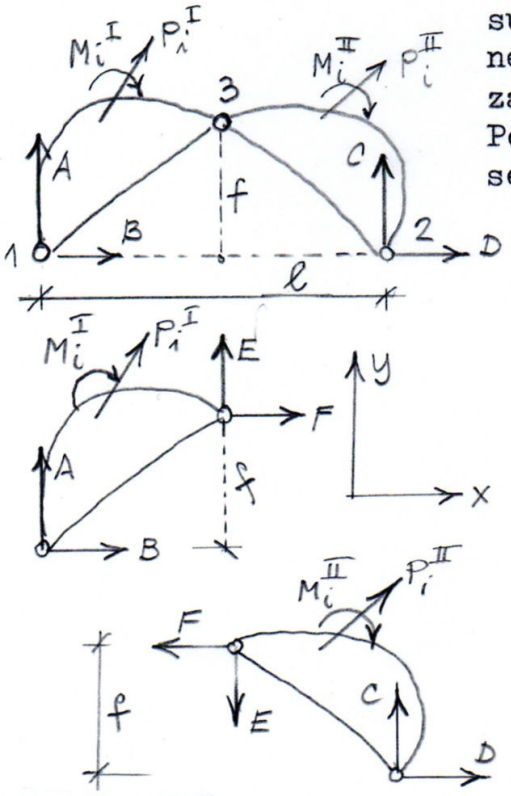
Prosti spoj dvaju čvorova u ravnini



Iz formalnih razloga će se uvesti sistem koji sadrži samo jedan štap i njegovi krajevi će se smatrati čvorovima. Taj sistem ima $s_o = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3 = 1$ nezavisnih uvjeta ravnoteže kao izolirani sistem u ravnini. Formalno gledano taj jedan uvjet omogućuje odredjivanje sile u tom štapu.

Trozglobni ravninski sistem





Promatra se ravni spojeni sistem koji sadrži tri tijela spojena nepomičnim zglobovima. Sistem je odredjen ako se središta zglobova ne nalaze na istom pravcu,što će se dokazati u postupku rješavanja.
Pri rješavanju je pogodno promatrati ravnotežu dvaju tijela zajedno, ovdje su odabrana tijela I i II. Djelovanje nepomičnih zglobova 1 i 2 će se prikazati s po dvije okomite komponente. Po jedna komponenta u savkom zglobu će se odabrati na spojnici središta zglobova. Od tri nezavisna uvjeta koji se mogu postaviti za podsistem I II iskoristiti će se samo dva i to sume momenata na točke 1 i 2, koje vode na dvije jednadžbe:

$$s_c \cdot \ell \cdot C = -\sum_{OPT} M_{(1)j}^{I+II}$$

$$s_A \cdot \ell \cdot A = -\sum_{OPT} M_{(2)j}^{I+II}$$

Sume momenata opterećenja na desnoj strani odnose se, dakako na doprinose sila i koncentriranih momenata. Sve preostale sile u spojevima mogu se odrediti zasebnim promatranjem pojedinih tijela. Obično se pri tome koristi suma momenata na treći zglob. Iz uvjeta iščezavanja momenata na točku 3 za tijelo I dobiva se jednadžba:

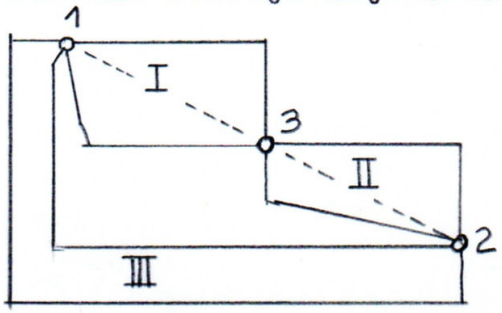
HWPK-85-150

$$s_B \cdot f \cdot B = -\sum_{OPT} M^{I}_{(3)j}$$

Na tijelo I još djeluju dvije nepoznate sile u spojevima: E i F. Njihove strijelice su odabrane tako da budu paralelne s strijelicama uz A i B, pa će se odabrati i odgovarajući koordinatni sistem x,y, Uvjeti iščezavanja projekcija svih sila na osi x i y za tijelo I vode na jedandžbe:

$$F = -\sum_{OPT} P^{I}_{xi} - B; \qquad E = -\sum_{OPT} P^{I}_{yi} - A$$

Na nalogni način će se sile D,E,F odrediti iz ravnoteže tijela II. Ponovno odredjivanje sila E i F služi za kontrolu.



Uvjeti rješivosti gornjih jednadžbi su:

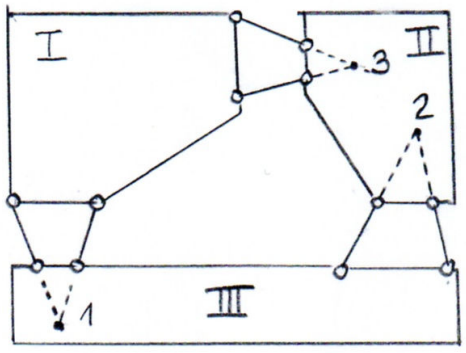
$$f \neq 0; \quad \ell \neq 0$$

čemu je ekvivalentan uvjet odredjenosti: Središta zglobova se ne smiju nalaziti na istom pravcu.

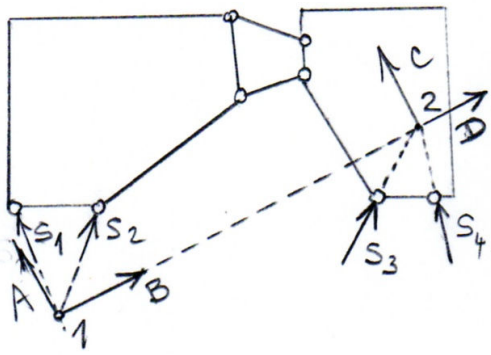
Na lijevoj skici je prikazan ravan spojen sistem s tri tijela i tri zgloba koji nije odredjen.

Sistemi koji se svode na trozglobni sistem

Ravni spojeni sistemi koji sadrže tri tijela spojena tako da je svaki par tijela spojen nepomičnim zglobom ili s dva zglobna štapa s dostupnim sjecištem rješavaju se na sličan način koji je već prikazan na osnovnom primjeru iz te skupine: trozglobnom sistemu. Prikazati će se još slučaj u kojem se pojavljuju samo zglobni štapovi, a ostali slučajevi iz te skupine se onda rješavaju prema ta dva slučaja.



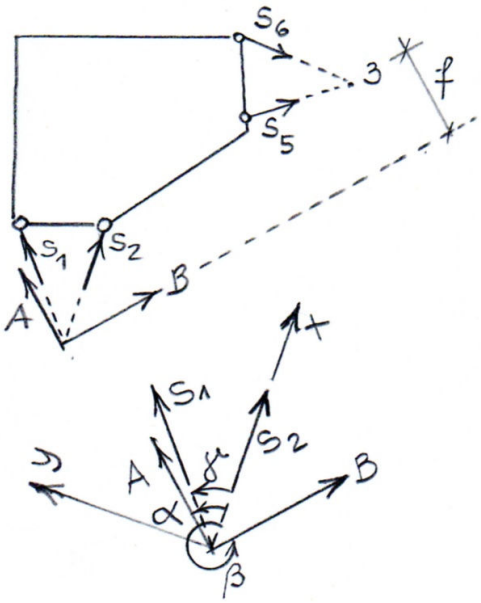
Promatra se sistem koji sadrži tri tijela. Svaki par tijela spojen je s dva zglobna štapa s dostupnim sjecištem.



Iskoristiti će se dva uvjeta ravnoteže podsistema koji sadrži dva t jela (na skici : tijela I i II). Na podsistem djeluju četiri sile na zadanim pravcima koje prenose četri štapa (na skici: S_1,S_2, S_3,S_4). T e se sile ne će direktno uvesti u uvjete ravnoteže nego će se u sjecištima zamijeniti sa po dvije ekvivalentne sile na okomitim pravcima. Po jedna zamjenjujuća sila u sjecištima leži na spojnici sjecišta; preostale dvije su okomite na spojnicu. Te dvije okomite zamjenjujuće sile mogu se odrediti iz uvjeta iščezavanja momenata na svako od sjecišta. Iz sume momenata na točku 1

HWPK 85-151

odrediti će se sila C, a iz sume momenata na točku 2 sila A.



U slijedećoj fazi rješavanja iskoristiti će se ravnoteža tijela I. Osim opterećenja na tijelo djeluju sile S_1 i S_2 koje su zamijenjene silama A i B i sile S_5 i S_6 koje prikazuju djelovanje zglobnih štapova čije se osi sijeku u točki 3. Iz uvjeta iščezavanja sume momenata svih sila na točku 3 odrediti će se zamjenjujuća sila B.

Uz poznate sile A i B koje zamjenjuju sile S_1 i S_2 odrediti će se iz odgovarajućih uvjeta ravnoteže sile S_5 i S_6. Mogu se iskoristiti dvije sume momenata ili dvije sume projekcija.

Sile S_1, S_2 prikazuju djelovanje štapova i odrediti će se iz uvjeta ekvivalencije s silama A i B. Sve sile se sijeku u istoj točki pa je ekvivalncija momenata na sjecište postignuta i mogu se iskoristiti još dvije jedandžbe. Ovdje su iskorištene projekcije na dvije okomite osi : x i y koje su odabrane tako, da se os x poklapa s pravcem sile S_2.

Iz zahtjeva jednakosti projekcija na os x slijedi:

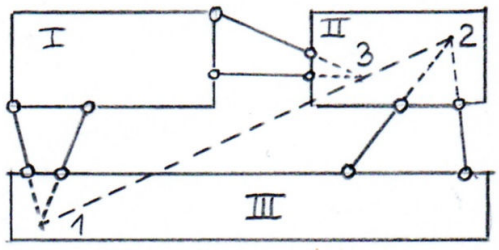
$$S_2 + \cos\gamma \cdot S_1 = A\cdot\cos\alpha + B\cos\beta$$

Iz zahtjeva jednakosti projekcija na os y slijedi:

$$\sin\gamma \cdot S_1 = A\sin\alpha + B\sin\beta$$

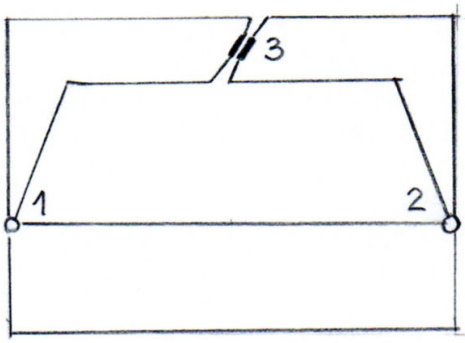
Dobiven je sistem linearnih jednadžbi s trokutnom shemom koeficijenata koji se lako rješava.

Iz uvjeta ravnoteže tijela II odrediti će se analogno sile S_3, S_4, i radi kontrole i sile S_5 i S_6.



Uvjet odredjenosti ovog ravnog spojenog sistema je analogan uvjetu rješivosti trozglobnog sistema:
Sjecišta štapova koji spajaju parove tijela ne smiju se nalaziti na istom pravcu. Sistem prikazan na lijevoj skici nije odredjen.

Sistem s dva zgloba i kliznim spojem

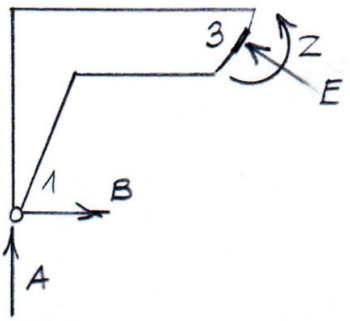


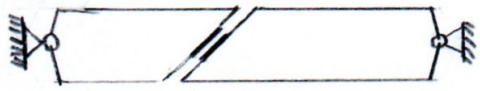
Promatra se ravni spojeni sistem koji sadrži tri tijela, koja su spojena pomoću dva nepomična zgloba i jednog kliznog spoja. Postupak rješavanja je sličan postupku kod trozglobnog sistema.

U prvoj fazi se promatra ravnoteža podsistema koji sadrži dva tijela spojena kliznim spojem (na skici: tijela I i II)

HWPK-85-152

Ta faza je identična prvoj fazi rješavanja trozglobnog sistema: Sile koje u zglobovima djelujuna podsistem rastavljaju se na komponente od kojih dvije leže na spojnici, a dvije su okomite na spojnicu. Te će se komponente označiti kao i kod trozglobnog sistema A,B,C,D, i odrediti iz uvjeta iščezavanja suma momenata na točke 1 i 2. Jedan od uvjeta odredjenosti će biti: Razmak zglobova različit od nule.





odredjen

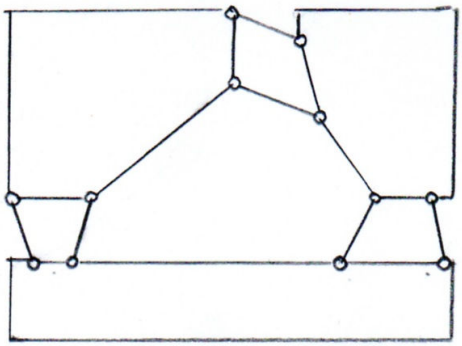


nije odredjen

U drugoj fazi će se iskoristiti uvjeti ravnoteže pojedinih tijela. Sila u kliznom spoju je označena s E, a moment s Z. Iz uvjeta ravnoteže tijela, npr tijela I treba odrediti silu na spojnici zglobova, te silu i moment u kliznom spoju. To je statički zadatak potpuno jednak zadatku rješenom za sistem koji sadrži dva tijela spojena kliznim spojem i zglobnim štapom. Uvjet rješivosti tog zadatka je: nepoznate sile nisu paralelne. Na osnovi toga mogu se izreći uvjeti rješivosti prikazanog sistema- Razmak zglobova je različit od nule i pravac klizanja nije okomit na spojnicu zglobova.

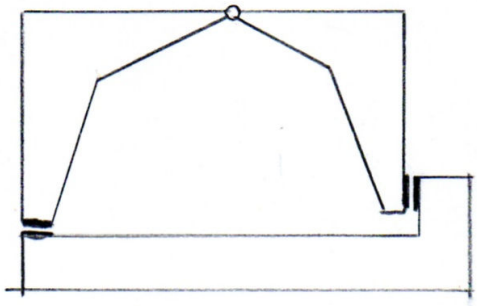
HWPK-85-153

Sistemi koji se svode na sistem s dva zgloba i kliznim spojem



Sistemi koji sadrže tri tijela svode se u rješavanju na sistem s dva zgloba i kliznim spojem, ako umjesto jednog ili oba zgloba imaju dva zglobna štapa s dostupnim sjecištem, a umjesto kliznog spoja se mogu pojaviti paralelni zglobni štapovi. Ukoliko se umjesto nepomičnog zgloba pojavljuju zglobni štapovi uvesti će se u sjecištu zamjenjujuće sile kao kod sistema koji se svode nattrozglobni spoj. Sile u paralelnim štapovima najjednostavnije će se odrediti pomoću uvjeta iščezavanja sume momenata.

Sistem s jednim zglobom i dva klizna spoja



I ovaj sistem koji sadrži tri tijela će se rješavati u dvije faze: u prvoj će se iz dva uvjeta iščezavanja projekcija za podsistem koji sadrži dva tijela spojena zglobom, odrediti samo sile u kliznim spojevima. Druga faza se svodi na uravnotežavanje s dvije sile i jednim momentom, za svako do tih tijela zasebno.

Uvjet odredjenosti glasi: Pravci klizanja kliznih spojeva nisu paralelni.

Ravni ulančeni sistemi

Ravan ulančen sistem je odredjen ravan spojen sistem koji se može sastaviti nizom elementarnih spajanja pojedinih tijela i/ili odredjenih podsistema.
Pri tome se pod elementarnim spajanjem podrazumijeva način spajanja koji se pojavljuje u elementarnim sistemima.

Elementarni načini spajanja koji se pojavljuju u ulančenom sistemu mogu se grupirati prema redoslijedu i zavisnosti.
Sva elementarna spajanja koja se u nekoj fazi formiranja sistema mogu realizirati nezavisno jedno od drugoga čine jedan nivo spajanja. Ulančeni sistem ima barem dva nivoa spajanja.

Prepoznavanje ulančenog sistema se provodi na slijedeći način:

1) Treba ustanoviti da li postoje podsistemi koji zasebno promatrani čine elementarne sisteme. Moguća su dva odgovora:

   a) ne postoje takovi podsistemi. Zaključak: promatrani sistem nije ulančen, postupak prepoznavanja je završen.

   b) postoje takovi podsistemi. Spajanja kojima su realizirani ti podsistemi čine prvi nivo spajanja. Spojevi koji se pojavljuju u tim spajanjima će se nadalje smatrati iskorištenima.

2) Treba ustanoviti da li postoje elementarana spajanja izmedju dosada ustanovljenih podsistema i/ili preostalih tijela. Moguća su dva odgovora:

   a) ne postoje takovi načini spajanja. Zaključak: promatrani sistem nije ulančen; postupak prepoznavanja je završen.

   b) postoje takovi načinispajanja i oni čine novi nivo spajanja. Spojevi koji se pojavljuju u tim spajanjima će se nadalje smatrati iskorištenima.
   Treba ustanoviti da li su svi spojevi koji se pojavljuju u promatranom sistemu iskorišteni. Moguća su dva odgovora:

      b.1) Svi spojevi sistema su iskorišteni. Zaključak: promatrani sistem je ulančen; postupak prepoznavanja je završen.

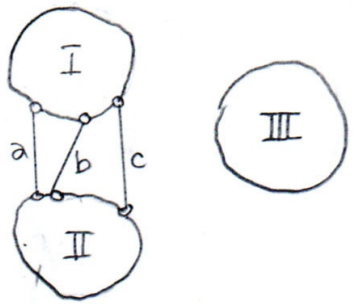
      b.2) Svi spojevi sistema nisu iskorišteni; treba ponoviti postupak opisan pod 2)

Ulančeni sistem se rješava tako da se zasebno odrdjuju sile u svakom od elementarnih spajanja, pri čemu je redoslijed obrnut od redoslijeda spajanja.
Najprije se rješavaju spajanja najvišeg nivoa, pa onda spajanja nivoa koji je "ispod" najvišeg i tako redom do prvog nivoa spajanja.

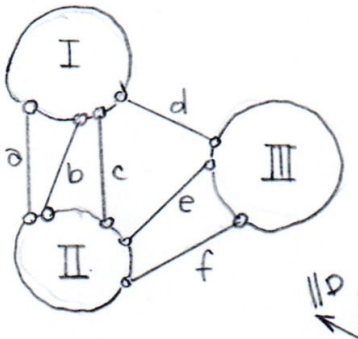
HWPK-85-154 4.1

Ulančeni sistemi se često pojavljuju, pa pri prepoznavanju sistema koji sadrže više tijela i/ili čvorova, treba najprije provjeriti da li su ulančeni.

Postupak sastavljanja i perpoznavanja ulančenih sistema će se prikazati na nekoliko primjera.

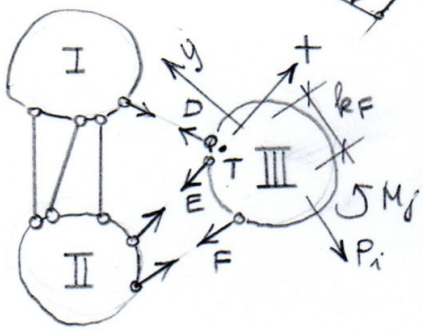


Prikazana su tri tijela od kojih dva (I i II) čine elementaran sistem. Taj elementarni sistem će u konačnom sistemu biti podsistem. Odredjeni podsistem se u ravnini ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju, pa se može elementarnim spajanjem u ravnini povezati s preostalim tijelom (III). Tako je dobiven ulančeni sistem.



Redoslijed rješavanja je obrnut od redoslijeda spajanja. Najviši nivo čini spajanje tijela III s podsistemom (I+II) pomoću štapova d,e,f. Sile u tim štapovima će se označiti s D,E,F. Odabrana je osnovna formulacija uvjeta ravnoteže: os x leži na pravcu štapa d, a točka redukcije je u presjecištu pravaca štapova d i e. Uvjeti ravnoteže glase:



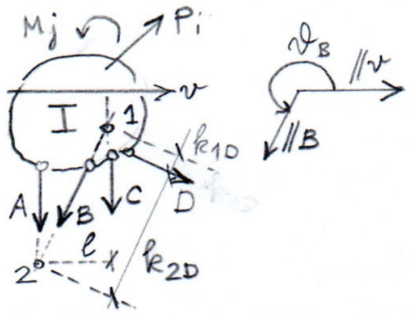


$$\cos\varphi_D \cdot D - E + \cos\varphi_F \cdot F = -\sum_{OPT(III)} P_{xi}$$

$$\sin\varphi_D \cdot D + \sin\varphi_F \cdot F = -\sum_{OPT(III)} P_{yi}$$

$$s_F \cdot k_F \cdot F = -\sum_{OPT(III)} M_{(T)j}$$

Oznaka OPT(III) podsjeća da se sume protežu samo preko opterećenja na tijelo III. $M_{(T)j}$ označava momente na točku T od sila i momenata opterećenja.



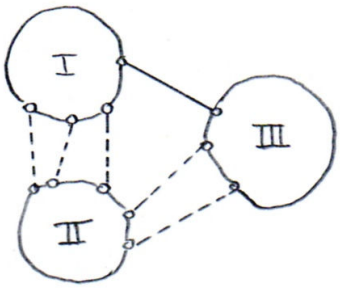
Slijedeći nivo je prvi nivo spajanja u kojem se pojavljuje samo spajanje tijela I i II štapovima a,b,c. Iskoristiti će se uvjeti ravnoteže tijela I. Veličine sila u štapovima će se označiti s A,B,C. A i C su paralelne sile pa će se iskoristiti alternativna formulacija uvjeta ravnoteže: sume momenata na dva dostupna sjecišta: 1 i 2 i suma projekcija na os okomitu na pravce a i b. Uvjeti ravnoteže glase:

$$k_A \cdot l \cdot A = -k_{1D} \cdot D - \sum_{OPT(I)} M_{(1)j}$$

$$k_c \cdot l \cdot C = -k_2 \cdot D - \sum_{OPT(I)} M_{(2)j}$$

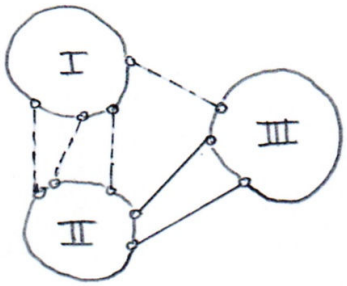
$$\cos\vartheta_B \cdot B = -\cos\vartheta_D \cdot D - \sum_{OPT(I)} P_{vi}$$

HWPK-85-155 4.1

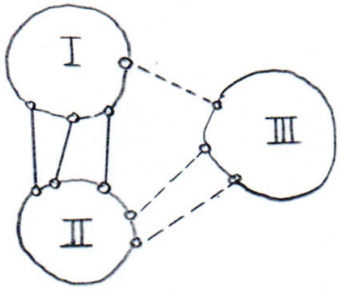


U postupku prepoznavanja treba potražiti dijelove zadanog sistema koji čine zasebne elementarne podsisteme.

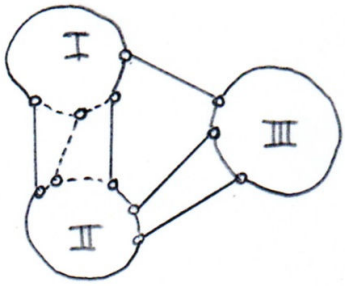
Tijela I iIII čine zasebni podsistem koji je mehanizam, pa se od njega ne može započeti sastavljanje. Na skici je punom linijom izvučen samo štap koji spaja tijela I i III.



Tijela II i III čine zasebni podsistem koji je mehanizam, pa se ni od njih ne može započeti sastavljanje. Na skici su spojevi tog podsistema izvučeni punom linijom.



Tijela I i II čine zasebni elementarni podsistem. Daljnjih zasebnih elementarnih pod sistema nema, pa spajanje tijela I i II čini prvi nivo spajanja i treba započeti traženjem drugog nivoa.

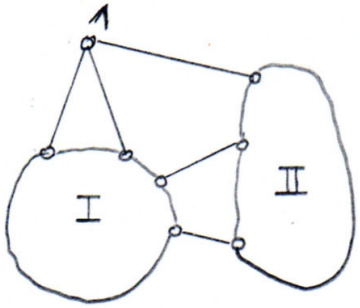


Pri traženju drugog nivoa će se promatrati već ustanovljeni podsistemi, a to je ovdje samo podsistem (I II) i preostala tijela, a to je ovdje samo tijelo III. Postavlja se pitanje da li se pojavljuje elementarno spajanje? Odgovor je potvrdan, pa je ustanovljen drugi nivo spajanja. Vidljivo je da su uskorišteni svi spojevi, pa se može zaključiti da je promatrani sistem ulančen. Uz nešto vježbe ne će biti potrebno crtanje svih mogućnosti: ovakav sistem treba prepoznati direktno.

Redoslijed spajanja ovog sistema se može prikazati simbolički:

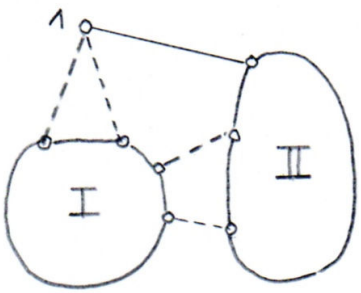
$$[(\mathrm{I}+\mathrm{II})+\mathrm{III}]$$

Svaki tip zagrada označava jedan nivo spajanja.



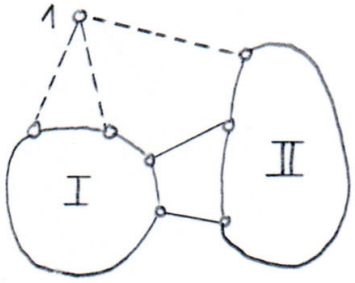
Promatra se ravni spojeni sistem prikazan na skici. Sistem sadrži dva tijela, koja su na skici označena rimskim brojkama I i II i od jednog čvora koji je označen arapskim brojem 1. Prikaz će se započeti prepoznavanjem.

HWPR- 4/ 85- 156

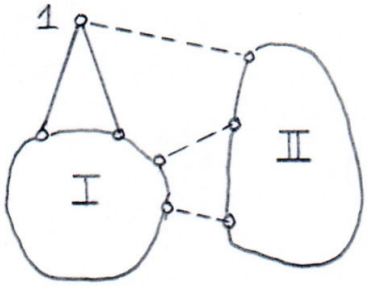


U postupku prepoznavanja treba potražiti dijelove zadanog sistema koji čine zasebne elementarne podsisteme.

Čvor 1 i tijelo II čine zasebni podsistem koji je mehanizam, pa se od njega me može započeti sastavljanje. Na skici je punom linijom izvučen samo štap tog mehanizma.

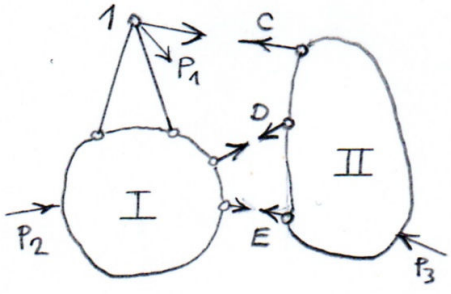


Tijela I i II čine zasebni podsistem koji je mehanizam: spojena su samo s dva zglobna štapa (na skici izvučeni punom linijom) Od tog podsistema se ne može započeti sastavljanje.

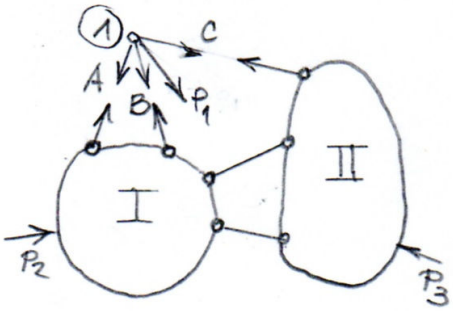


Čvor 1 i tijelo I čine zasebni elementarni podsistem: čvor je spojen s tijelom s dva neparalelna štapa. Spajanje čvora 1 i tijela I čini prvi nivo spajanja i treba započeti s traženjem drugog nivoa. Drugi nivo spajanja postoji: prostim spajanjem su spojeni: podsistem (I+1) i tijelo II. Time su iskorišteni svi spojevi i dokazano je da je sistem ulančen. I ovaj jednostavni sistem treba,uz nešto vježbe prepoznati direktno.

Simbolički prikaz redoslijeda spajanja glasi: $[(\mathrm{I}+1)+\mathrm{II}]$

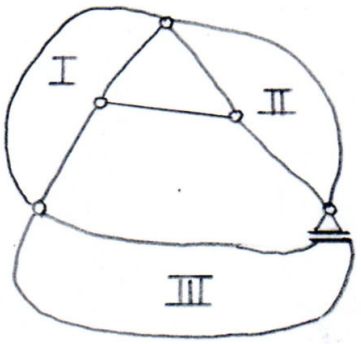


Rješevanje se provodi obrnutim redoslijedom od redoslijeda spajanja: prvo se odredjuju sile u najvišem nivou spajanja.
Npr: iz uvjeta ravnoteže tijela II odrediti će se sile u štapovima c,d,e čije su veličine označene s C,D,E. Postupak je analogan rješavnju odgovarajućeg prosto spojenog sistema.

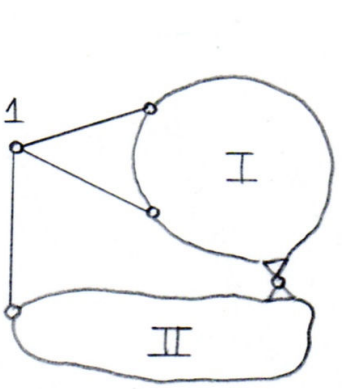


U slijedećoj fazi rješavanja odredjuju se sile u spojevima nižeg nivoa, a to je ovdje prvi nivo. Iz uvjeta ravnoteže čvora 1 odrediti će se sile u štapovima a i b, koje su označene s A i B. Postupak je analogan rješavanju odgovarajućeg elementarnog spoja. odnosno zadatku uravnotežavanja točke s dvije sile. Pri tome će zadane sile biti sve sile opterećenja, simbolički prikazane silom P_1 i sila C koja je odredjena u prethodnoj fazi rješavanja.

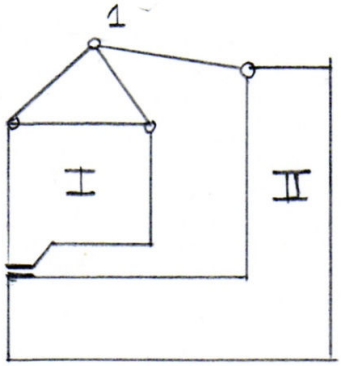
HWFK-85-157



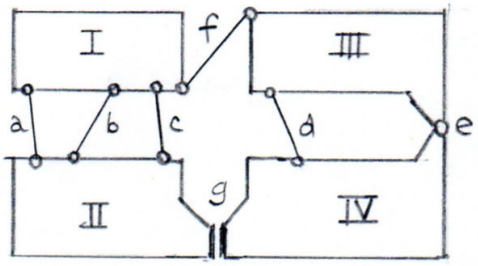
$[(I+II)+III]$



$[(I+1)+II]$



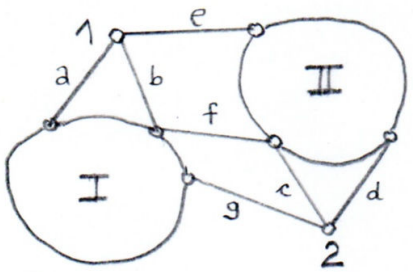
Na gornjim skicama su prikazana tri sistema, koji su varijante ranije prikazanih dvaju sistema, što se može zaključiti i prema jedankim simbiličkim prikazima tih sistema i prethodnih.



$[(I+II)+(III+IV)]$

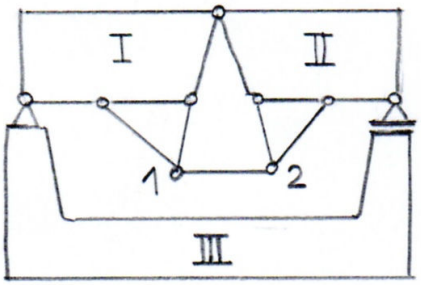
Sistem prikazan na skici sadrži četiri tijela. Sistem je ulančen; prvi nivo spajanja čine elementarna spajanja tijela I i II, te zasebno tijela III i IV. Podsistemi (I II) i (III IV) spojeni su u drugom nivou spajanja zglobnim štapom f i kliznom spojem g u prikazani sistem. Simbolički prikaz naveden je uz sliku.

41
HWPK-85-158

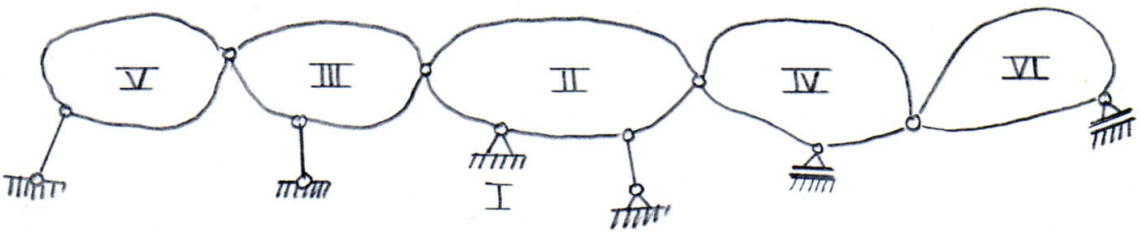


$[(I+1)+(II+2)]$

Sistem prikazan na skici sadrži dva tijela i dva čvora i ulančen je. Prvim nivoom spajanja dobivaju se podsistemi (I 1) i (II 2). U drugom nivou spajanja se ta dva podsistema spajaju štapovima e,f,g u konačni sistem. Simbolički prikaz spajanja je naveden uz sliku.



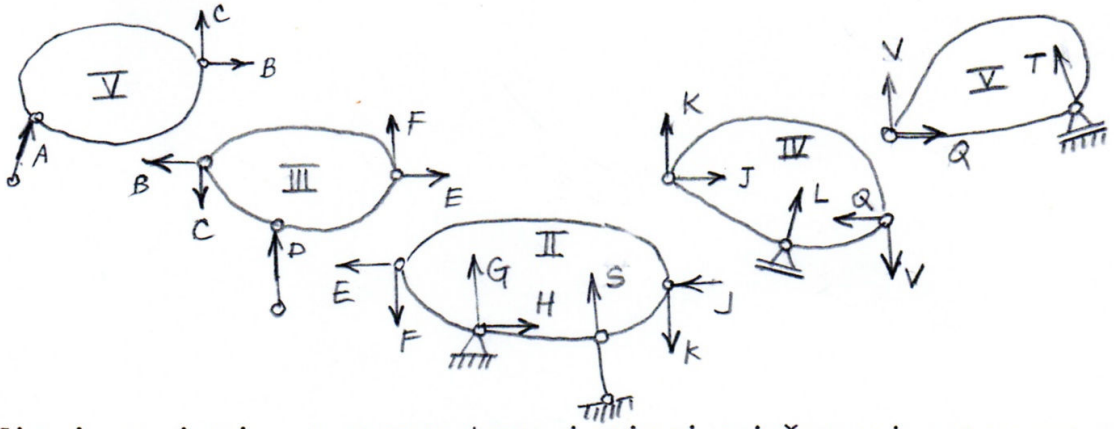
Prikazan je sistem koji sadrži tri tijela i dva čvora. To je ulančeni sistem s tri nivoa spajanja.
Prvim nivoom spajanja dobivaju se podsistemi (I+1) i (II+2) koji svaki zasebno pretstavljaju prosto spojen čvor s tijelom. U drugom nivou se podsistemi dobiveni u prvom nivou spajaju nepomičnim zglobom e i štapom f. Tako dobiveni podsistem $[(I+1)+(II+2)]$ spaja se u trećem nivou s tijelom III pomoću nepomičnog zgloba g i pomičnog zgloba h. Simbolički prikaz spajanja glasi: $\{[(I+1)+(II+2)]+III\}$



Na skici je prikazan ravan spojen sistem koji sadrži podlogu i pet tijela. Sistem je ulančen što se može dokazati prikazom spajanja. U prvom nivou spajanja povezano je tijelo II s podlogom I. U drugom nivou se na podsistem (I+II) spajaju tijela III i IV. U trećem nivou se na podsistem koji sadrži tijela od I do IV spajaju tijela V i VI. Simbolički će se to spajanje prikazati sa:

$$\{[(\mathrm{I}+\mathrm{II})+\mathrm{III},\mathrm{IV}]+\mathrm{V},\mathrm{VI}\}$$

Podsistemi odvojeni zarezom su svaki zasebno spojeni s prostalim sistemom navedenim u zagradi.

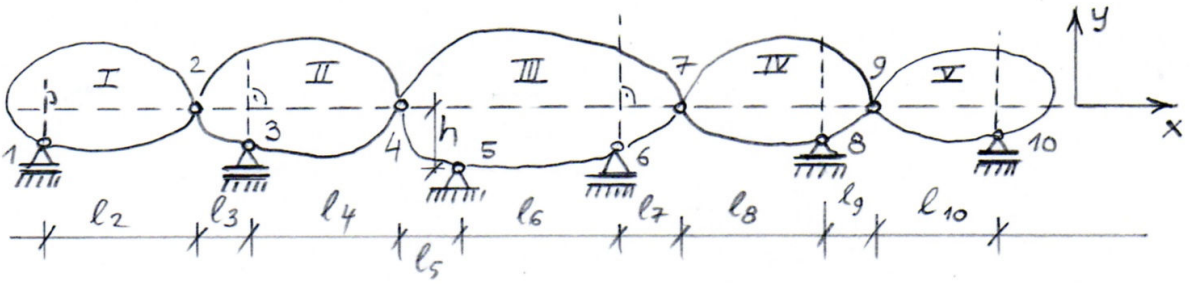


Nivoi spajanja, a prema tome i nivoi rješavanja mogu se u ovom slučaju doslovno prikazati shemom. Rješavanje počinje od najvišeg nivoa. Iz uvjeta ravnoteže tijela V odredjuju se veličine A,B,C. Iz uvjeta ravnoteže tijela VI odredjuju se sile V,Q,T. Redoslijed ovih rješavanja nije bitan jer pripadaju istom nivou. U slijedećem nivou se iz uvjeta ravnoteže tijela III odredjuju sile D,E,F uz zadano opterećenje i već poznate sile B i C, a iz uvjeta ravnoteže tijela IV se odredjuju sile K,J,L uz zadano opterećenje i već poznate sile Q,V. Slijedeći nivo je najniži t.j. prvi po redoslijedu spajanja; iz uvjeta ravnoteže tijela II odredjuju se sile G,H,S uz zadano opterećenje i već poznate sile E,F,K,J.

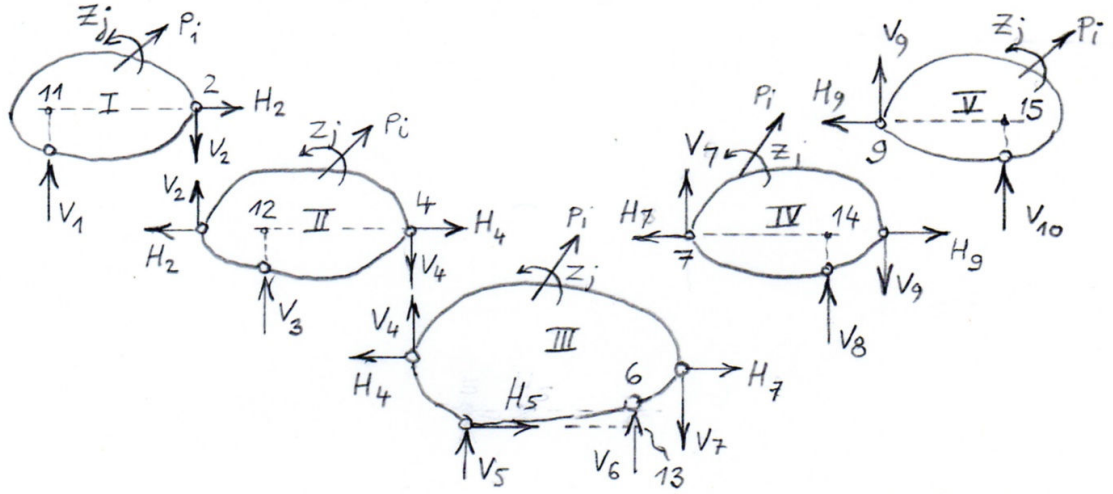
Posebno će se prikazati rješavanje specijalnog slučaja kod kojeg zglobovi koji spajaju pojedina tijela leže na istom pravcu, koji će se nazvati sistemski pravac. Pravci sila svih pomičnih zglobova su u tom specijalnom slučaju okomiti na sistemski pravac.

Rješenje će se postaviti pomoću koordinatnog sistema x,y kojemu os x leži na sistemskom pravcu.

4.1
HWPK-85-159



Radi preglednosti su tijela označena brojevima koji rastu s lijeva na desno. Za postavljanje rješenja će se koristiti shema s odvojenim tijelima. Sile u nepomičnim zglobovima su rasatavlje-



ne na komponente paralelne s sistemskim pravcem i okomite na sistemski pravac. Opterećenje je simbolički prikazano s po jednom koncentriranom silom i jednim koncentriranim momentom na svakom tijelu.

Nezavisni uvjeti ravnoteže sistema vode na sistem linearnih jedandžbi s trokutnom shemom koeficijenata, što znači da postoji redoslijed rješevanja kod kojeg će se iz svake jednadžbe odrediti samo jedna nepoznanica t.j. reakcija. Jednadžbe će se prikazati upravo u tom konačnom obliku; kao izrazi za reakcije.

Uz simbole sumacije neće se navoditi indeksi nego kratice SVE( ) ili OPT( ) koje znače da se suma projekcija ili momenata na točku odnosi na sva djelovanja ne neko tijelo ili samo na opterećenje koje djeluje na to tijelo. Oznaka tijela će se nalaziti u zagradama. Slovo S u zagradi znači da se suma odnosi na sva tijela osim podloge.

iz $\sum_{SVE(I)} M_{(2)j} = 0$ slijedi: $V_1 = \frac{1}{\ell_2}\left(\sum_{OPT(I)} M_{(2)j}\right)$

iz $\sum_{SVE(I)} M_{(11)j} = 0$ slijedi: $V_2 = \frac{1}{\ell_2}\left(\sum_{OPT(I)} M_{(11)j}\right)$

iz $\sum_{SVE(I)} P_{xi} = 0$ slijedi: $H_2 = -\sum_{OPT(I)} P_{xi}$

iz $\sum_{SVE(II)} M_{(4)j} = 0$ slijedi: $V_3 = \frac{1}{\ell_4}\left[\sum_{OPT(II)} M_{(4)j} - (\ell_3 + \ell_4)\cdot V_2\right]$

iz $\sum_{SVE(II)} M_{(12)j} = 0$ slijedi: $V_4 = \frac{1}{\ell_4}\left[\sum_{OPT(II)} M_{(12)j} - \ell_3 \cdot V_2\right]$

SI. HWPK-85-160

iz $\sum_{SVE(II)} P_{xi} = 0$ slijedi: $H_4 = -\sum_{OPT(II)} P_{xi} + H_2 = -\sum_{OPT(I,II)} P_{xi}$

iz $\sum_{SVE(V)} M_{(9)j} = 0$ slijedi: $V_{10} = -\frac{1}{\ell_{10}}\left(\sum_{OPT(V)} M_{(9)j}\right)$

iz $\sum_{SVE(VI)} M_{(15)j} = 0$ slijedi: $V_9 = \frac{1}{\ell_{10}}\left(\sum_{OPT(V)} M_{(15)j}\right)$

iz $\sum_{SVE(V)} P_{xi} = 0$ slijedi: $H_9 = \sum_{OPT(V)} P_{xi}$

iz $\sum_{SVE(IV)} M_{(7)j} = 0$ slijedi: $V_8 = \frac{1}{\ell_8}\left[-\sum_{OPT(V)} M_{(7)j} + (\ell_8 + \ell_9)\cdot V_9\right]$

iz $\sum_{SVE(IV)} M_{(14)j} = 0$ slijedi: $V_7 = \frac{1}{\ell_8}\left[\sum_{OPT(IV)} M_{(14)j} - \ell_9 \cdot V_9\right]$

iz $\sum_{SVE(IV)} P_{xi} = 0$ slijedi: $H_7 = \sum_{OPT(IV)} P_{xi} + H_8 = \sum_{OPT(IV,V)} P_{xi}$

iz $\sum_{SVE(III)} M_{(13)j} = 0$ slijedi: $V_5 = \frac{1}{\ell_6}\left[\sum_{OPT(III)} M_{(13)j} + h\cdot(H_4 - H_7) - (\ell_5 + \ell_6)\cdot V_4 - \ell_7 V_7\right]$

iz $\sum_{SVE(III)} M_{(5)j} = 0$ slijedi: $V_6 = \frac{1}{\ell_6}\left[-\sum_{OPT(III)} M_{(5)j} - h(H_4 - H_7) + (\ell_5 + \ell_6)V_4 + \ell_7 V_7\right]$

iz $\sum_{SVE(III)} P_{xi} = 0$ slijedi: $H_5 = -\sum_{OPT(III)} P_{xi} + H_4 - H_7 = -\sum_{OPT(S)} P_{xi}$

Radi kontrole treba izračunati zasebno oba izraza za sile H_4, H_7 i H_5. Isto tako treba barem provesti kontrolu projekcija svih sila na os y za sva tijela osim podloge, t.j. mora biti zadovoljena jednadžba:

$$\sum_{OPT(S)} P_{yi} + V_1 + V_3 + V_5 + V_6 + V_8 + V_{10} = 0$$

Pogodno je da se tokom provodjenja postupka, nakon odredjivanja reakcija jednog tijela provede i kontrola projekcija svih sila na os y samo za to tijelo, dakle:

nakon izraza za V_2 provjeriti: $\sum_{OPT(I)} P_{yi} + V_1 - V_2 = 0$

nakon izraza za V_4 provjeriti: $\sum_{OPT(II)} P_{yi} + V_2 + V_3 - V_4 = 0$

nakon izraza za V_9 provjeriti: $\sum_{OPT(V)} P_{yi} + V_9 + V_{10} = 0$

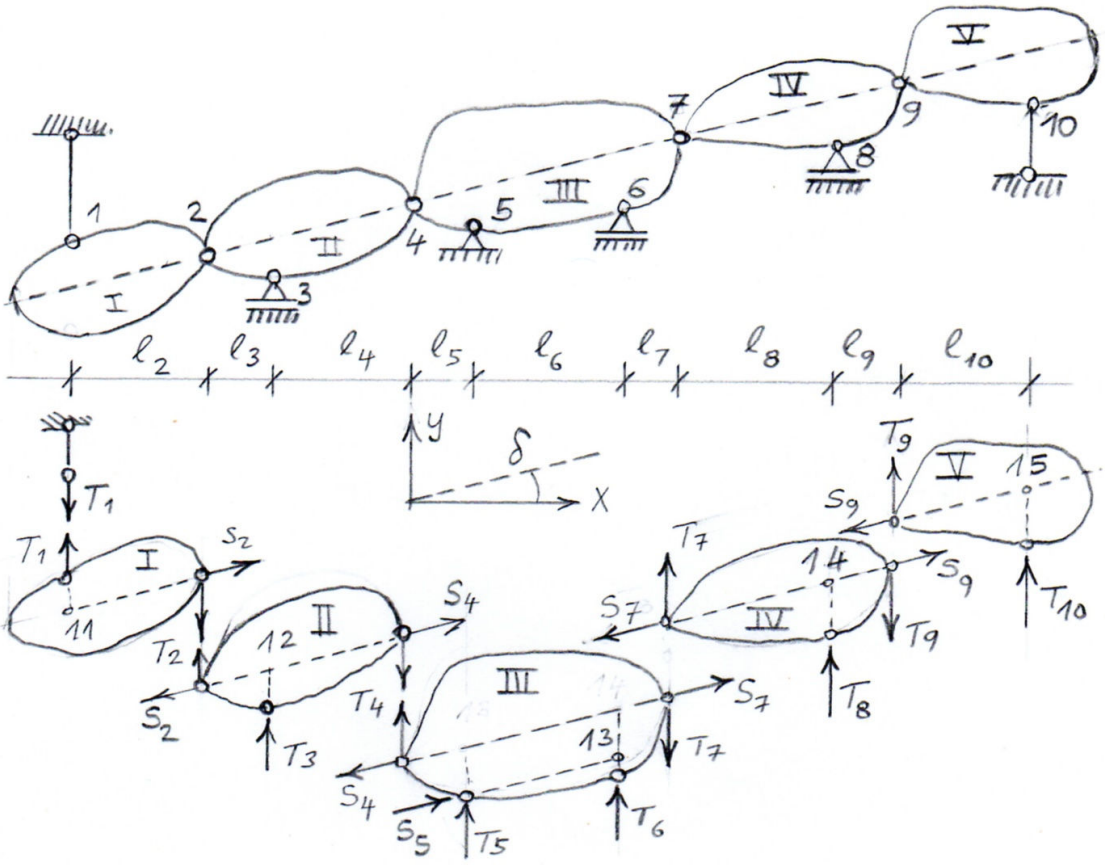
nakon izraza za V_7 provjeriti: $\sum_{OPT(IV)} P_{yi} + V_7 + V_8 - V_9$

nakon izraza za V_6 provjeriti: $\sum_{OPT(III)} P_{yi} + V_4 + V_5 + V_6 - V_7$

Analogno se mogu riješiti sistemi s proizvoljnim brojem priključenih tijela.

S.I. HWPK-85- 161

Naanalogni način se mogu riješiti sistemi kod kojih svi zglobovi koji spajaju pojedina tijela takodjer leže na sistemskom pravcu, a sile u pomičnim ležajima izmedju tijela i podloge su sve paralelne, ali nisu više okomite na sistemski pravac. Dakako; te sile ne smiju biti paralelne sa sistemskim pravcem. Sile u spojevima će se u tom slučaju rastaviti na komponente koje leže na sistemskom pravcu i komponente paralelne sa silama u pomičnim zglobovima.



U ovom slučaju će se sile u spojevima rastaviti na komponente koje leže na sistemskom pravcu odnosno komponente koje su paralelne sa silama u pomičnim zglobovima i zglobnim štapovima.

Izrazi za sile T_i koje su paralelne s pomičnim zglobovima potpuno su jednaki izrazima za odgovarajuće sile u prethodnom primjeru, koje su bile označene s V_i.

Izrazi za sile S_i dobivaju se analogno kao sile H_i u prethodnom primjeru, t.j. iz sume projekcija na os okomitu na pravce sila u pomičnim ležajima, pa će vrijediti:

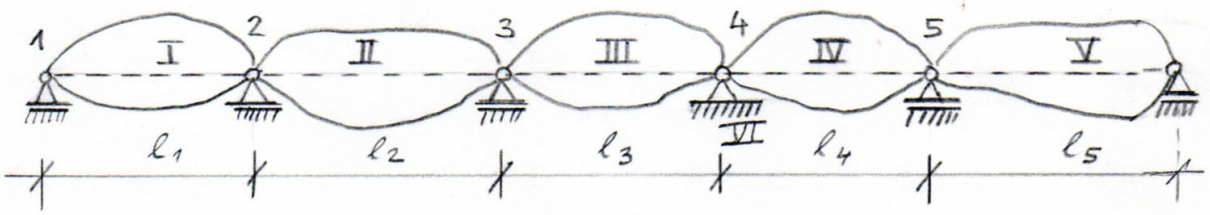
$$S_2 = -\frac{1}{\cos\delta}\left(\sum_{OPT(I)} P_{xi}\right); \quad S_4 = -\frac{1}{\cos\delta}\left(\sum_{OPT(I,II)} P_{xi}\right); \quad S_9 = \frac{1}{\cos\delta}\left(\sum_{OPT(V)} P_{yi}\right)$$

$$S_7 = \frac{1}{\cos\delta}\left(\sum_{OPT(IV,V)} P_{xi}\right); \quad S_5 = -\frac{1}{\cos\delta}\left(\sum_{OPT(S)} P_{xi}\right)$$

Ako su rezultirajuće sile opterećenja za svako tijelo zasebno paralelne silama T_i, iščezavati će sve sile S_i osim S_5. Ako za svako tijelo postoji rezultanta opterećenja na pravcu sistema, biti će sve sile T_i osim T_5 i T_6 jednake nuli.

12.1 HWPK-85-162

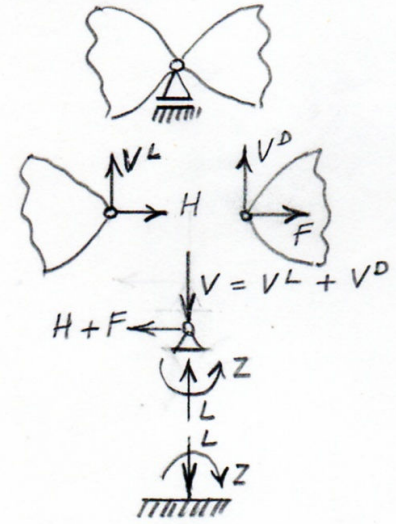
Prikazati će se ulančeni sistem kod kojeg se pojavljuju višestruki zglobovi. Dva tijela su spojena s podlogom pomoću višestrukog zgloba. Svi daljnji parovi tijela su spojeni višestrukim zglobom na koji je priključen i spojni element pomičnog zgloba. Središta svih zglobova leže na sistemskom pravcu s kojim su paralelni prav-



ci klizanja svih kliznih spojeva. Takav sistem bi se mogao shvatiti kao specijalni slučaj prethodnog sistema. Svaki višestruki zglob bi se prikazao kao dva vrlo bliska zgloba: npr točke 2 i 3 prethodnog sistema bi pretstavljale višestrzki zglob 2 gornjeg sistema, što povlači $l_3 = 0$. Analogno tome bi u rješenje prethodnog sistema trebalo uvrstiti $l_5 = 0$, $l_7 = 0$, $l_9 = 0$. U takovoj interpretaciji je tijelo II uzeto kao osnovno tijelo višestrukog zgloba na koje se spajaju: tijelo I i spojni element pomičnog zgloba. Analogno bi se interpretirali i svi drugi višestruki zglobovi.

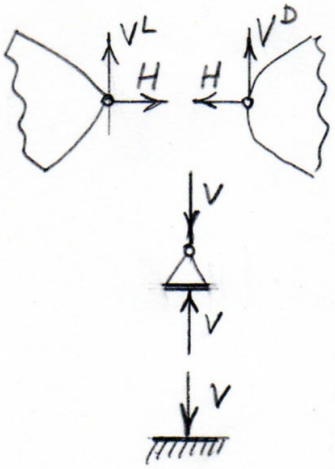
Ovdje će se gornji sistem riješiti pomoću drugačije interpretacije višestrukih zglobova, koja vodi na preglednije rješenje.

Kao osnovno tijelo u višestrukom zglobu će se odabrati spojni element. Sile u zglobu će se prikazati pomoću komponenti koje su paralelne i komponenti koje su okomite na sistemski pravac. Komponente koje prikazuju djelovanje na priključena tijela će se jednako usmjeriti, a komponente koje djeluju na spojni element će se suprotno usmjeriti. U kliznom spoju izmedju spojnog elementa i podloge djeluje sila okomita na pravac klizanja i moment. Pravac te sile (L) će se poklapati s pravcem sile koja djeluje izmedju spojnog elementa i spojenih tijela (V)



Iz uvjeta ravnoteže spojnog elementa proizlazi:

$$H + F = 0$$
$$-V + L = 0$$
$$\Sigma \quad = 0$$

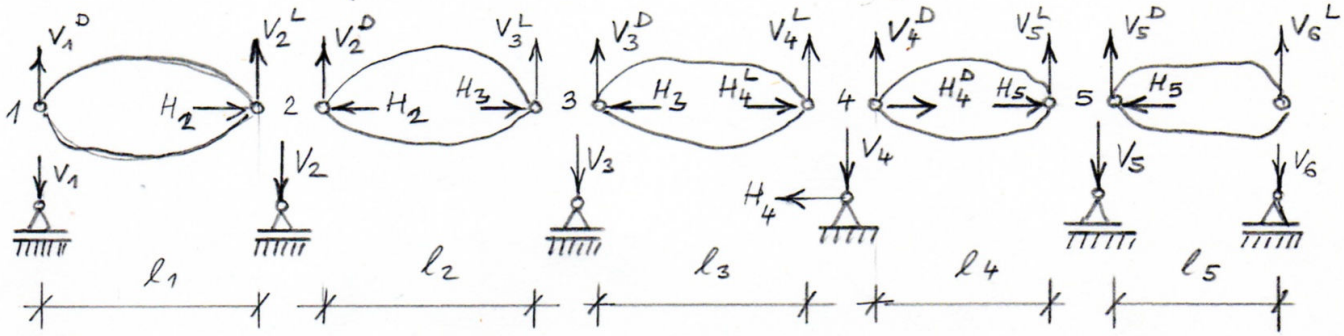


Iz prve jednadžbe slijedi: $F = -H$
što je i lako razumljivo: klizni spoj nemože preuzeti silu paralelnu s pravcem klizanja, pa odgovarajuće komponente mogu djelovati samo izmedju spojenih tijela i moraju biti suprotne i jednake po veličini.
Iz druge jednadžbe slijedi: $L = V$
Na lijevoj skici je statička funkcija tog dvostrukog pomičnog zgloba prikazana na odgovarajući način pomoću tri skalarne

S.I.
HWPK-85-163

veličine t.j. tri reakcije.

Prikazani sistem je ulančen; simbolički izraz za redoslijed spajanja glasi: $\{[(VI + III, IV) + II, V] + I\}$



Na gornjoj skici je prikazana shema rješavanja. Prema pravilu rješavanja ulančenih sistema, rješavanje treba započeti iskorištavanjem ravnoteže tijela I, pa onda redom: II,III,V,IV. Pogodno je da se uoči, da su samo sile H_i ovisne silama H_j iz višeg nivoa, dok se sile V_i^L i V_i^D mogu za svako tijelo odrediti direktno, t.j. ovise samo o opterećenju tijela na koje djeluju.
Zasebno će se prikazati izrazi za sile H_i, koji se odredjuju iz uvjeta iščezavanja zbroja projekcija na os x za svako tijelo zasebno. Izrazi glase:

$$H_2 = -\sum_{OPT(I)} P_{xi}$$

$$H_3 = -\sum_{OPT(II)} P_{xi} + H_2$$

$$H_4^L = -\sum_{OPT(III)} P_{xi} + H_3$$

$$H_5 = \sum_{OPT(V)} P_{xi}$$

$$H_4^D = -\sum_{OPT(IV)} P_{xi} - H_5$$

$$H_4 = H_4^L + H_5^D = \sum_{OPT(S)} P_{xi}$$

Radi kontrole treba silu H_4 odrediti na oba načina.

Sile u spojevima okomite na sistemski pravac odrediti će se za tijelo I iz uvjeta iščezavanja sume momenata na točke 1 i 2:

$$V_1^D = \frac{1}{l_1}\left(\sum_{OPT(I)} M_{(2)j}\right)$$

$$V_2^L = -\frac{1}{l_1}\left(\sum_{OPT(I)} M_{(1)j}\right)$$

Za kontrolu će se iskoristiti uvjet iščezavanja projekcija svih sila na os y:

$$V_1^D + \sum_{OPT(I)} P_{yi} + V_2^L = 0$$

HWPK - 85 - 164 6.1.

Analogni izrazi će vrijediti za sva tijela, pa se mogu postaviti opći izrazi za okomite sile u spojevima za točku "i"

$$V_i^L = -\frac{1}{l_{i-1}} \left(\sum_{OPT(i-1)} M_{(i-1)j} \right)$$

$$V_i^D = \frac{1}{l_i} \left(\sum_{OPT(i)} M_{(i+1)} \right)$$

Simbol OPT(i) znači opterećenje i-tog tijela.
Za svako tijelo će se okomite sile u spojevima kontrolirati pomoću uvjeta iščezavanja sume projekcija svih sila na os y:

$$V_i^D + \sum_{OPT(i)} P_{yi} + V_{i+1}^L = 0$$

Za okomite sile koje djeluju na spojne elemente i dalje na podlogu vrijediti će izrazi:

$$V_1 = V_1^D$$

$$V_2 = V_2^L + V_2^D$$

$$V_3 = V_3^L + V_3^D$$

$$V_4 = V_4^L + V_4^D$$

$$V_5 = V_5^L + V_5^D$$

$$V_6 = V_6^L$$

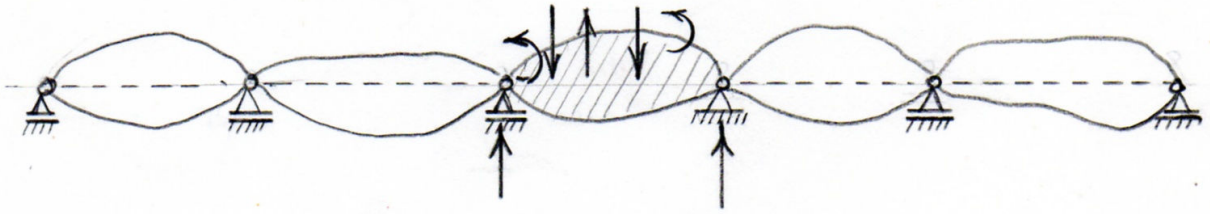
} općenito: ($V_i = V_i^L + V_i^D$) za i = 2,...,5

Korisno je provesti kontrolu pomoću uvjeta iščezavanja projekcija svih sila na os y za sva tijela osim podloge zajedno:

$$\sum_{i=1}^{6} V_i + \sum_{OPT(S)} P_{yi} = 0$$

Na osnovi prikazanog rješenja može se zaključiti:

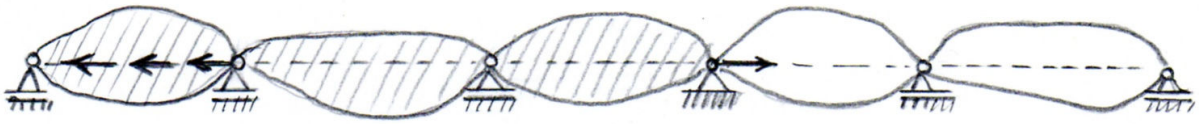
a) Opterećenje nekog tijela silama okomitim na os i koncentriranim momentima izazvati će reakcije okomite na sistemski pravac samo u spojevima izmedju tog tijela i podloge dok će sve druge sile u spojevima iščezavati. Štoviše; isto vrijedi već i ako je rezultirajuća sila opterećenja nekog tijela okomita na sistemski pravac (skica dolje).



b) Opterećenje nekog tijela silama koje leže na sistemskom pravcu izazvati će samo odgovarajuću silu u nepomičnom zglobu, a sve ostale sile u spojevima iščezavaju. Štoviše; ako opterećenje nekog tijela ima rezultantu i ako rezultanta leži na sistemskom pravcu biti će različita od nule samo odgovarajuća sila u

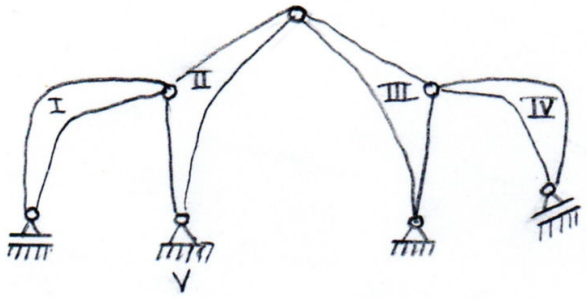
G.I. HWPK-85-165

nepomičnom zglobu (skica dolje).



Rješavanje prikazanog sistema može se, prema tome, interpretirati superpozicijom skupa parcijalnih rješenja od kojih svako odgovara djelovanju opterećenja na samo jedno tijelo iz sistema.

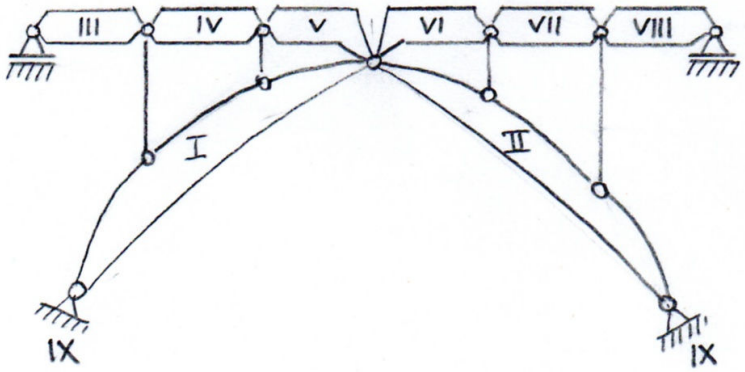
Ulančeni sistemi mogu sadržavati i trozglobni sistem ili trozglobno spajanje podsistema. Prikazati će se nekoliko jednostavnih primjera.



Promatra se sistem koji sadrži četiri tijela (I do IV) i podlogu (V). Redoslijed spajanja je: Podloga i tijela II i III čine trozglobni sistem na kojeg su prosto spojena tijela I i IV. Simbolički izraz bi glasio:

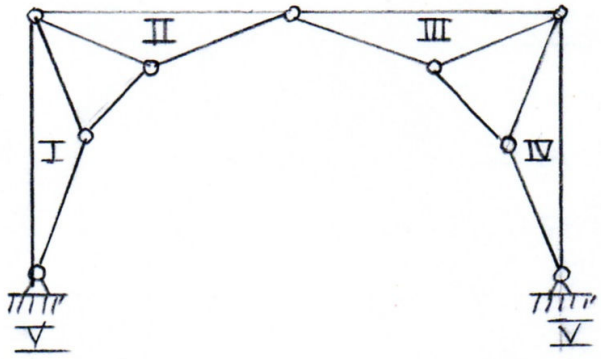
$$\left[(\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{V})+\mathrm{I},\mathrm{IV}\right]$$

9.1.
HWPK-85-166



Prikazan je trozglobni sistem na koji se oslanja niz prostih spojeva. Podloga je označena s IX. Simbolički izraz za spajanje bi glasio:

$$\Big(\Big\{\big[(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{IX})+\mathrm{V},\mathrm{VI}\big] + \mathrm{IV},\mathrm{VII}\Big\} + \mathrm{III},\mathrm{VIII}\Big)$$



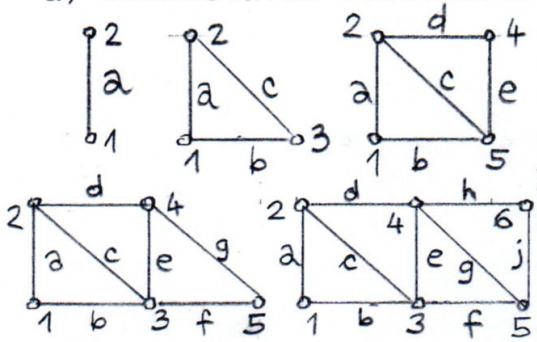
Sistem ne lijevoj skici je primjer trozglobnog spajanja odredjenih podsistema. U prvom nivou spajanja formiraju se podsistemi (I II) i (III IV) koji svaki zasebno čine prosto spojeni sistem. U drugom nivou se ta dva podsistema s podlogom pomoću trozglobnog spajanja povezuju u cjelinu. Simbolički izraz za ovaj sistem glasi:

$$\left[(\mathrm{I}+\mathrm{II})+(\mathrm{III}+\mathrm{IV})+\mathrm{V}\right]$$

Ulančeni ravni rešetkasti nosači

Rešetkasti nosači sadrže samo zglobne čvorove i zglobne štapove Ulančeni rešetkasti nosači se mogu spojiti nizom elemenatrnih spajanja; razlikovati će se jednostavni i složeni tip.

a) Jednostavni rešetkasti nosači

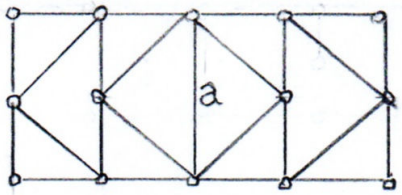


Jednostavni rešetkasti nosači se mogu sastaviti nizom prostih spajanja pojedinih čvorova i odredjenog podsistema. Obično su mogući i drugi načini spajanja. Na skicama je prikazan primjer takove rešetke. Čvorovi 1 i 2 su spojeni štapom a. Čvor 3 je na čvorove 1 i 2 spojen štapovima b i c. Čvor 4 na 2 i 3 sa d i e, te čvor 5 na 3 i 4, a čvor 6 na 4 i 5. Rješenje jednostavnog rešetkastog nosača se svakako može svesti na odredjivanje po dvije sile iz uvjeta ravnoteže pojedinog čvora, izuzev dakako dva početna čvora kod kojih će tri uvjeta ravnoteže biti zavisna. Za primjer na skici može se rješavanje započeti odredjivanjem sila u štapovima h i j iz uvjeta ravnoteže čvora 6, pa odredjivanjem sila u štapovima f i g iz uvjeta čvora 5 i tako dalje.

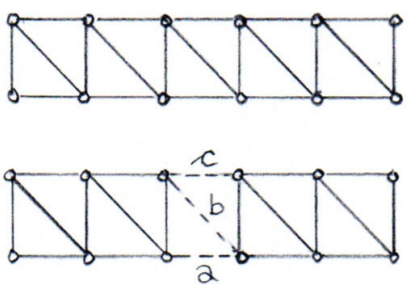
Kod nekih jednostavnih rešetki je moguće više načina spajanja dodavanjem pojedinih čvorova. Kod rešetke prikazane na gornjoj skici spajanje se može započeti od bilo kojeg štapa, a završiti će se svakako čvorovima 1 i 6. Rješavanje se analogno može započeti s obje strane i završiti odredjivanjem sile u nekom od štapova u unutrašnjosti rešetke.

F.I. HWPK-85-167

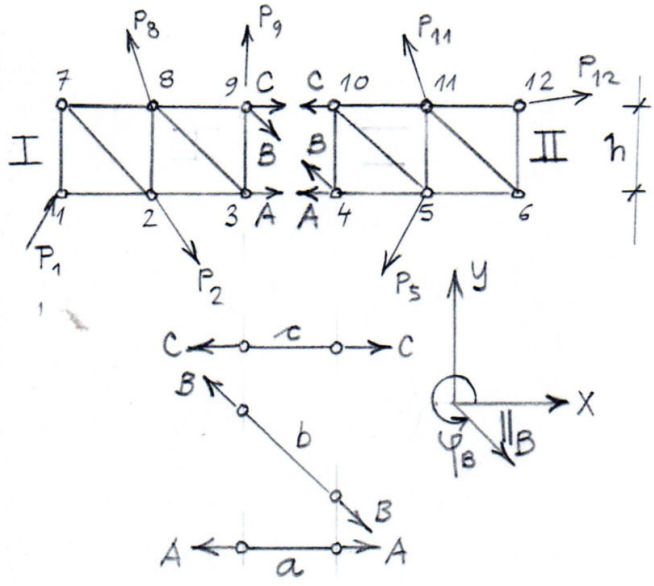
Postoje jednostavne rešetke kod kojih je moguć samo jedan način ulančenog spajanja. Na skici je prikazana takova rešetka. Spajanje započinje srednjim štapoma označenim na skici s "a".



Kod nekih jednostavnih rešetki se može iskorištavanjem uvjeta ravnoteže podsistema direktno odrediti sile u nekim štapovima. To je moguće samo onda ako se rešetka može sastaviti tako, da se najprije sastave dva odredjena podsistema koji se onda nekim od elementarnih načina spajanja povezuju u cjelinu.



Na skici je prikazan primjer jednostavne rešetke kod koje je moguće direktno odrediti silu u bilo kojem štapu. Dva podsistema izvučena na skici punom linijom mogu se zasebno formirati i onda pomoću štapova koji su prikazani isprekidanim linijama povezati prostim spajanjem u cjelinu.



Promatrani rešetkasti nosač se nalazi u ravnoteži uz djelovanje sila P_i koje mogu pripadati opterećenju ili silama u spojevima promatrane rešetke i drugih sistema. Te će se sile nazivati "zadane sile".
Sile u štapovima a,b,c mogu se odrediti iz uvjeta ravnoteže jednoga od podsistema koje ti štapovi spajaju.
Djelovanje sila u štapovima na pod sistem prikazuje se obično kao djelovanje na čvorove, a sami štapovi se ne prikazuju. Zbog preglednosti ovdje su zasebno prikazani i štapovi i način djelovanja sila na njih. U nekim slučajevima se štapovi ucrtavaju u skicu i pridružuju jednom od podsistema.

Za odredjivanje sila u štapovima čije su veličine ozna čene s A,B,C odabran je podsistem I koji sadrži čvorove 1,2,3,7,8,9. Uvjeti ravnoteže podsistema jednaki su uvjetima ravnoteže tijela i njihovo iskorištavanje je analogno. Kako su dostupna dva sjecišta pravaca traženih sila, odabrana je alternativna formulacija uvjeta ravnoteže pomoću dvije sume momenata i jedne sume projekcija. Točke redukcije se odabiru u sjecištima pravaca sila; sjecište pravaca b i c se poklapa s čvorom 9, pa će se tako i označavati, a sjecište pravaca a i b se poklapa s čvorom 4 (nije bitno što taj čvor pripada drugom podsistemu). Uvjeti ravnoteže vode na dijagonalni sistem linearnih jednadžbi, pa se izrazi za veličine sila mogu direktno napisati.

HWPK-85-168 10.1

$$\text{iz } \sum_{SVE(I)} M_{(9)j} = 0 \quad \text{slijedi:} \quad A = -\frac{1}{h}\left(\sum_{ZAD(I)} M_{(9)j}\right)$$

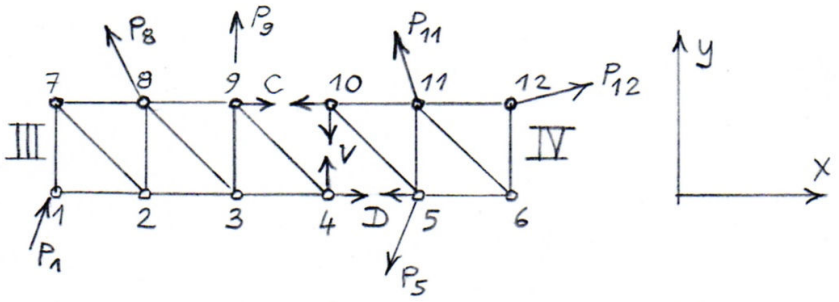
$$\text{iz } \sum_{SVE(I)} P_{yi} = 0 \quad \text{slijedi:} \quad B = -\frac{1}{\sin\varphi_B}\left(\sum_{ZAD(I)} P_{yi}\right)$$

$$\text{iz } \sum_{SVE(I)} M_{(4)j} = 0 \quad \text{slijedi:} \quad C = \frac{1}{h}\left(\sum_{ZAD(I)} M_{(4)j}\right)$$

Simbol SVE(I) označava da se pripadna suma odnosi na sve sile koje djeluju na podsistem I. Simbol ZAD(I) označava da se pripadna suma odnosi samo na zadane sile koje djeluju na podsistem I, t.j. sile označene na skici sa P_i.
Rješenja se mogu tako kontrolirati da se sve tri sile ponovno izračunaju, ali sada iz uvjeta ravnoteže podsistema II.

Na taj način se u promatranom rešetkastom nosaču mogu odrediti sve sile u štapovima s analognim položajem; nazovimo ih ovdje "horizontalni štapovi" i "kosi štapovi".

Za odredjivanje sila u "vertikalnim" štapovima treba odabrati odgovarajući način podjele rešetke na podsisteme, koji je prikazan na slijedećoj skici.

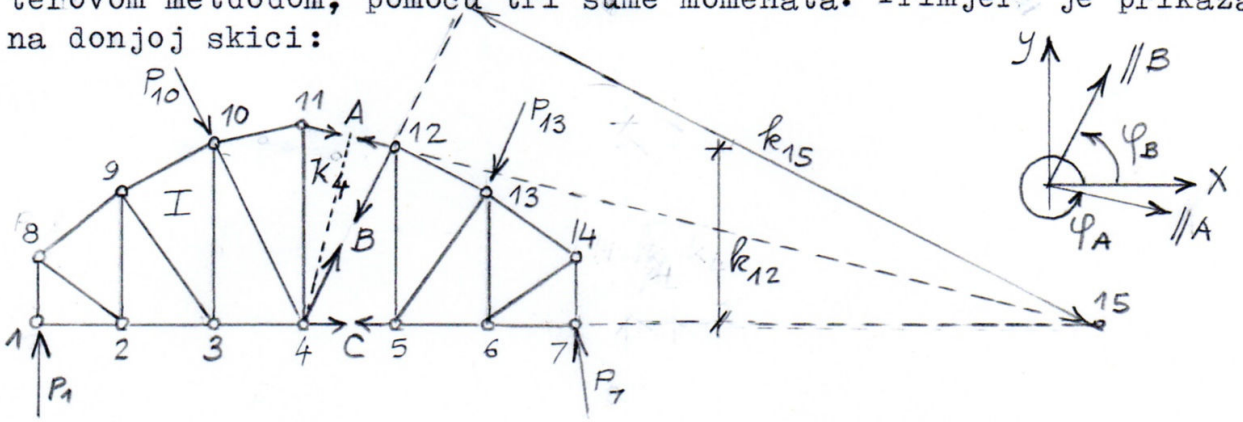


Za odredjivanje sile V iskoristiti će se uvjet ravnoteže podsistema III koji sadrži čvorove 1,2,3,4,7,8,9.

$$\text{iz } \sum_{SVE(III)} P_{yi} = 0 \quad \text{slijedi: } V = -\sum_{ZAD(III)} P_{yi}$$

Za kontrolu se sila V može na nalogni način odrediti iz uvjeta ravnoteže podsistema IV koji sadrži čvorove: 5,6,10,11,12.

Ako odabrane podsisteme rešetke ne spajaju paralelni štapovi, a sva tri sjecišta su dostupna odrediti će se silu u štapovima Ritterovom metdodom; pomoću tri sume momenata. Primjer je prikazan na donjoj skici:



$$\text{iz } \sum_{SVE(I)} M_{(4)j} = 0 \quad \text{slijedi: } A = \frac{1}{k_4}\left(\sum_{ZAD(I)} M_{(4)j}\right)$$

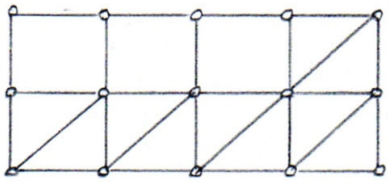
$$\text{iz } \sum_{SVE(I)} M_{(15)j} = 0 \quad \text{slijedi: } B = \frac{1}{k_{15}}\left(\sum_{ZAD(I)} M_{(15)j}\right)$$

$$\text{iz } \sum_{SVE(I)} M_{(12)j} = 0 \quad \text{slijedi: } C = -\frac{1}{k_{12}}\left(\sum_{ZAD(I)} M_{(12)j}\right)$$

Ako sjecište pravaca sila nije dostupno pojaviti će se numerički problemi pri odredjivanju sile, u tom slučaju je korektnije iskoristiti samo dvije sume momenata i jednu sumu projekcija u kojoj će se pojaviti barem dvije nepoznate sile. Time se dakako gubi mogućnost direktnog odredjivanja svake sile, što je s praktičnog stanovišta nebitno. Kao orjentaciona granica primjenjivosti Ritterove metode može se razlika svih krakova u postupku ne bude manja od destine najvećeg kraka. Ukoliko to nije slučaj odrediti će se sila čiji je krak najnepovoljniji iz sume projekcija. Za primjer će se koristiti gornja skica i pretpostaviti da krak sile B ne zadovoljava uvjet, pa će se ta sila odrediti iz szme projekcija na os y:

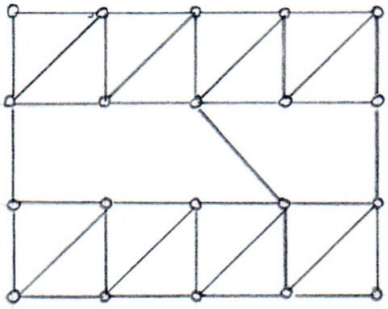
$$\text{iz } \sum_{SVE(I)} P_{yi} = 0 \quad \text{slijedi: } B = -\frac{1}{\sin\varphi_B}\left(\sum_{ZAD(I)} P_{yi} + A\cdot\sin\varphi_A\right)$$

11.1 HWPK-85.-169

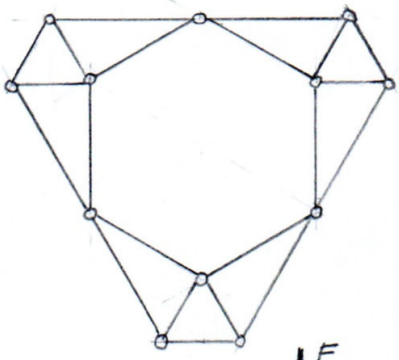


Na skici je prikazan primjer jednostavne ulančene rešetke kod koje se sile u štapovima ne mogu odrediti direktno iz uvjeta ravnoteže pogodno odabranog podsistema.

b) Složeni rešetkasti nosači

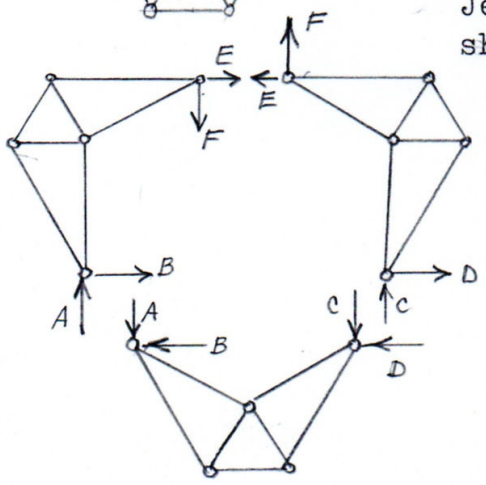


Složeni ravan ulančeni rešetkasti nosač se ne može sastaviti samo postepenim dodavanjem čvorova. Takav se nosač sastoji od jednostavnih rešetkastih nosača koji su elementarnim spajanjima povezani u cjelinu.
Na skici je prikazan primjer složenog rešetkastog nosača kod kojeg su dvije jednostavna rešetkasta nosača elementarnim spajanjem pomoću tri štapa povezana u cjelinu.



Na lijevoj skici je prikazan složeni rešetkasti nosač kod kojeg su tri jednostavna rešetkasta nosača trozglobnim spajanjem povezana u cjelinu.

Pri rješavanju takovog sistema moguća su dva pristupa, koji oba vode na trozglobni sistem.
Jedna mogućnost je, da se dijelovi rešetaka shvate kao podsistemi koji su spojeni sa šest štapova pa je dobiven način spajanja koji se pojavljuje kod sistema koji se svode na trozglobni (str.151).

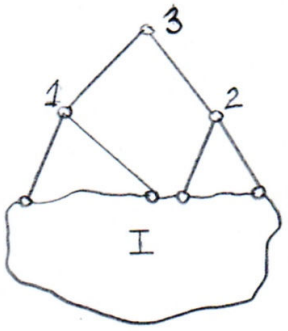


Druga je mogućnost da su u postupku spajanja formirana tri zasebna rešetkasta nosača koji su prikazani na skici. U slijedećem nivou spajanja spojena su po dva čvora tih rešetki u novi čvor, npr. čvorovi 2^L i 2^D spojeni su u čvor 2.
Statička funkcija tako dobivenog čvora može se prikazati pomoću statičkih funkcija čvorova pojedinog nosača: izmedju njih će seprenosti sila koja prolazi njihovim središtem a prikazati će se pomoću dvije okomite komponente, koje su za svaki od razdvojenih čvorova prikazani na skici.
Daljnji postupak potpuno odgovara rješavanju trozglobnog sistema. Kad se na taj način dobiju sve sile koje djeluju na pojedinu rešetku, mogu se sile u štapovima odrediti na poznati način.

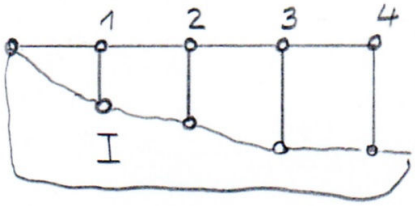
12.1. HWPK-85-170.

Ulančene ravne rešetke

Ulančena ravna rešetka je sistem koji osim zglobnih čvorova i zglobnih štapova sadrži samo jedno tijelo ili podlogu. Može sadržavati i ulančene rešetkaste nosače, dakle dijelove koji bi se zasebno ponašali kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.

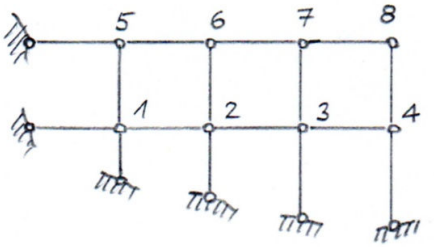


Na skici je prikazan sistem koji se sastoji od jednog tijela i tri čvora. Čvorovi 1 i 2 su sa po dva neparalelna štapa spojeni s tijelom i ta spajanja čine prvi nivo. Čvor 3 je s dva neparalelna štapa povezan s čvorovima 1 i 2 t.j. s odredjenim podsistemom.

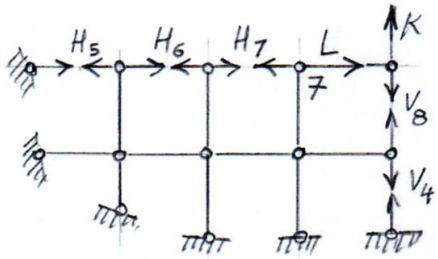


Na skici je prikazan sistem koji se sastoji od jednog tijela i četiri čvora. Svaki čvor je spojen sa po dva neparalelna štapa s odredjenim podsistemom; spajanje svakog čvora čini novi, viši nivo spajanja.

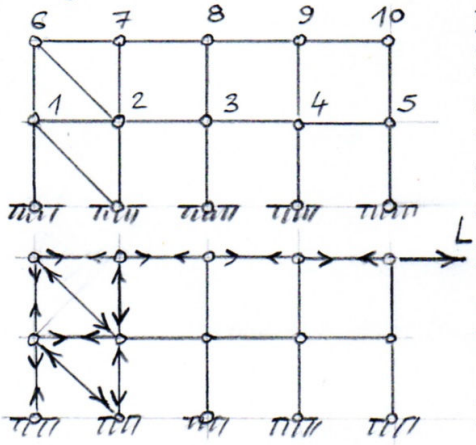
12.1.+ HWPK-85-171



Na skici jepprikazan sistem koji je dobiven nadogradjivanjem prethodnog sistema. Redoslijed spajanja je: podloga s čvorom 1, pa zatim svi čvorovi prema redu numeriranja.



Sile u štapovima takovih sistema odredjuju se vrlo jednostavno: opterećenje treba rastaviti na komponente paralelne s štapovima. Svaka sila aktivira samo štapove koji se nalaze izmedju čvora na koji djeluje i podloge. Ako na čvor 7 djeluje sila L, pojaviti će se vlačne sile jednake po veličini toj sili u štapovima h_5, h_6, h_7. Djelovanje sile K na čvor 8 izazvati će vlačne sile u štapovima v_4 i v_8, koje će po iznosu biti jednake sili K. Djelovanje sila na više čvorova može se odrediti superpozicijom.

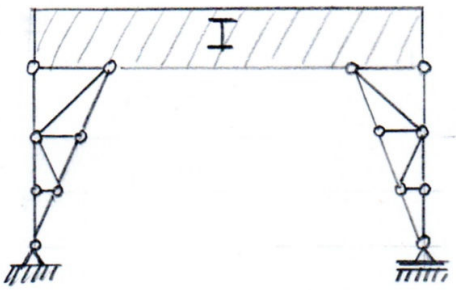


Na skici je prikazana ulančena ravna rešetka koja sadrži rešetkasti nosač. Cijeli sistem se može spojiti postepenim dodavanjem čvorova; redoslijed odgovara umeraciji.
Pri djelovanju sila paralelnih sa šatpovima v_i pojaviti će se sile samo u štapovima v_i koji čvor djelovanja sile povezuju s podlogom. Pri djelovanju sila paralelnih s štapovima h_i pojaviti će se i sile u rešetki. Od sile L prikazane na skici pojaviti će se sile u svim označenim štapovima. Pri tome

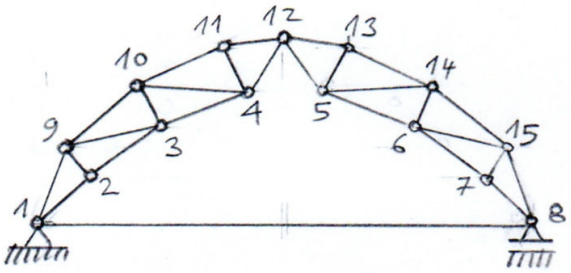
strijelice prikazuje djelovanje sila na čvorove.

Kombinacija tijela i čvorova

U ulančenim sistemima se mogu pojaviti kombinacije svih do sada uvedenih tipova ulančenih sistema, pri čemu postupak prepoznavanja i rješavanja ostaje, da kako isti kao što je naveden u općem dijelu ovog poglavlja. Navesti će se nekoliko primjera.

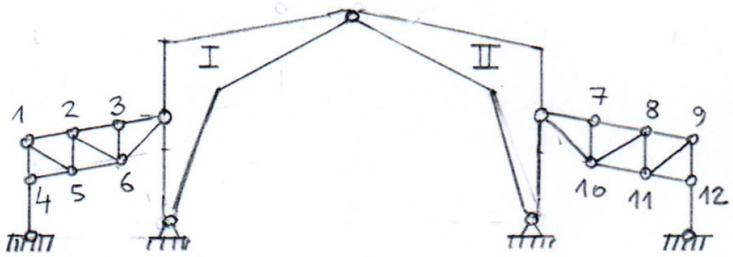


Prikazan je sistem kod kojeg spajanje započinje s tijelom I na koje se čvor po čvor mogu nadovezati dvije rešetke. Ta cjelina je prostim spajanjem spojena s podlogom.

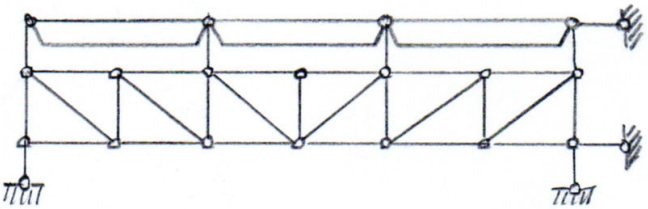


Prikazan je sistem kod kojeg su dva rešetkasta nosača prosto spojena u čvoru 12 i pomoću štapa h. Cjelina je prostim spajanjem povezana s podlogom.

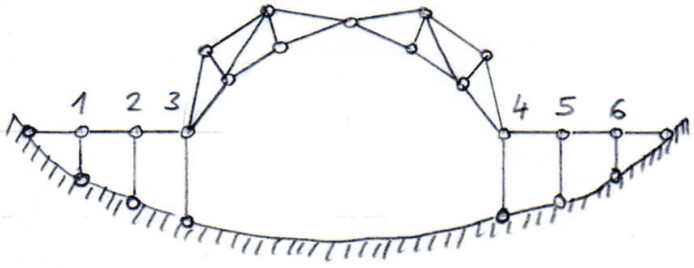
IZ.I.T
HWPK-85-172



Prikazan je sistem kod kojeg osnovni nivo spajanja čini trozglobno spajanje tijela I i II s podlogom. Zasebno se formiraju rešetke: prva sadrži čvorove od 1 do 6, a druga čvorove od 7 do 12. Rešetke su prosto spojene s podsistemom (P+I+II).



Prikazan je sistem koji sadrži tri tijela i jedan ulančen rešetkasti nosač. Nosač je prosto spojen s podlogom, a tijela su spojena u niz povezan višestrukim zglobovima. Niz tijela je povezan s podlogom i rešetkastim nosačem.



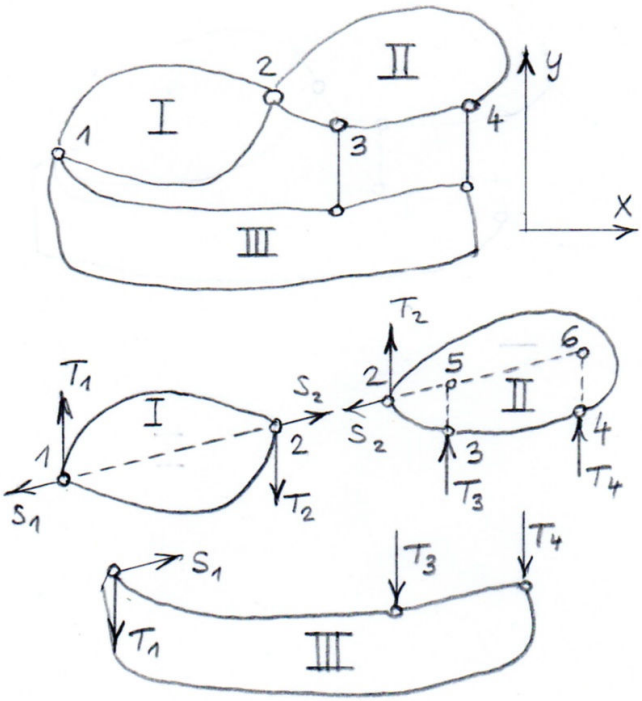
Prikazan je sistem koji se sastoji od ravne ulančene rešetke (podloga i čvorovi od 1 do 6) koja je s dva rešetkasta nosača povezana u cjelinu trozglobnim spajanjem.

Rekurzivno rješivi ravni sistemi

Kod rekurzivno rješivih sistema se pogodnim postavljanjem uvjeta ravnoteže pojedinih tijela i/ili podsistema dobiva sistem linearnih jednadžbi s barem trokutnom shemom koeficijenata ili se opterećenje rastavlja na pogodne dijelove tako da samo nepoznanice uz trokutni dio sheme koeficijenata budu različite od nule.

Jednostavni primjer primjene rastavljanja opterećenja prikazan je u općoj klasifikaciji na trozglobnom sistemu (str.115.).

Rješavanje trozglobnih i sličnih sistema je provedeno pomoću pogodnog izbora uvjeta ravnoteže, pa se ti sistemi mogu shvatiti i kao jednostavni primjeri rekurzivno rješivih sistema. Ovdje će se prikazati rješavanje jednog primjera iz te grupe sistema i izvesti neki zaključci, koji će koristiti pri analizi složenijih sistema.

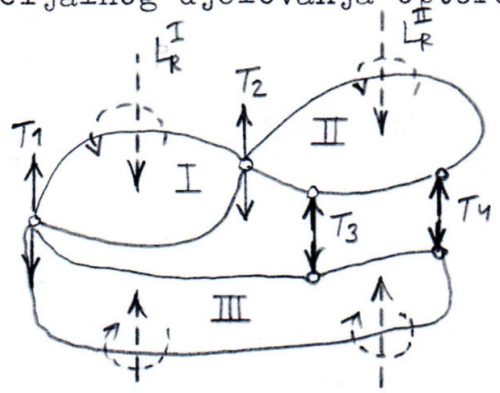


Sistem ima tri tijela spojena s dva nepomična zgloba i dva paralelna zglobna štapa.
Sile u nepomičnim zglobovima će se prikazati pomoću komponenti od kojih je jedna paralelna sa zglobnim štapovima, a druga leži na spojnici nepomičnih zglobova.
Pri rješavanju sistema tog tipa iskorištavali su se najprije uvjeti ravnoteže za dva tijela zajedno, i to zato jer se umjesto trećeg tijela često pojavljuje podloga za koju se obično ne postavljaju uvjeti ravnoteže. Za sam postupak je svjedno da li se postavljaju uvjeti za jedno tijelo ili za ostatak sistema.
U ovom slučaju će se rješavanje započeti iskorištavanjem dvaju uvjeta za tijelo I. Iz uvjeta iščezavanja zbroja momenata na točke 1 i 2 za tijelo I direktno se odredjuju sile T_1 i T_2. Na tijelo II djeluju još samo tri nepoznate sile koje se iz uvjeta ravnoteže tog tijela mogu odrediti.
Iz uvjeta iščezavanja zbroja momenata na točke 5 i 6 odredjuju se sile T_3 i T_4. Time su odredjene sve sile u spojevima paralelne s zglobnim štapovima i same sile u zglobnim štapovima, dakle sve sile T_i. Pogodno je uočiti da su se pojavila dva nivoa rješavanja: prvi nivo čini iskorištavanje uvjeta tijela I, a drugi nivo čini iskorištavanje uvjeta tijela II u kojima se pojavljuje sila odredjena na nivou I.
Redoslijed odredjivanja sila S_i biti će drugačiji. Iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila na os x za tijelo II odrediti će se sila S_2. Nadalje će se iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila na os x za tijelo I odrediti sila S_1.

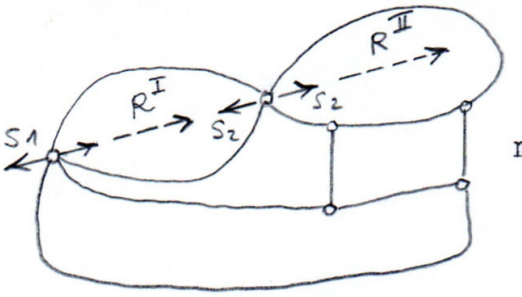
HWPK-85-173

Postupak rješavanja je sličan postupku za rješavanje ulančenih sistema. Kod ulančenih sistema je postojao jedan redoslijed rješavanja za sve sile u spojevima, dok kod rekurzivno rješivih postoji više redoslijeda, različitih za pojedine grupe sila u spojevima.

Naosnovi prikazanog rješenja može se uočiti pravilnost kod specijalnog djelovanja opterećenja na ovaj sistem:



a) Ako je rezultirajuća sila opterećenja za svako tijelo zasebno paralelna s zglobnim štapovima, mogu biti različite od nulle samo odgovarajuće sile u spojevima, a komponente na spojnici zglobova će iščezavati.



b) Ako na svako tijelo zasebno djeluje takovo opterećenje da ima rezultantu koja leži na spojnici zglobova mogu biti različite od nule samo sile u spojevima koje leže na spojnici zglobova, a sve sile u spojevima paralelne s zglobnim štapovima i u tim štapovima će iščezavati.

Prikazani postupak rješavanja može se interpretirati i pomoću rastavljanja sila opterećenja na sile koje leže na spojnici i na sile koje su paralelne s zglobnim štapovima.

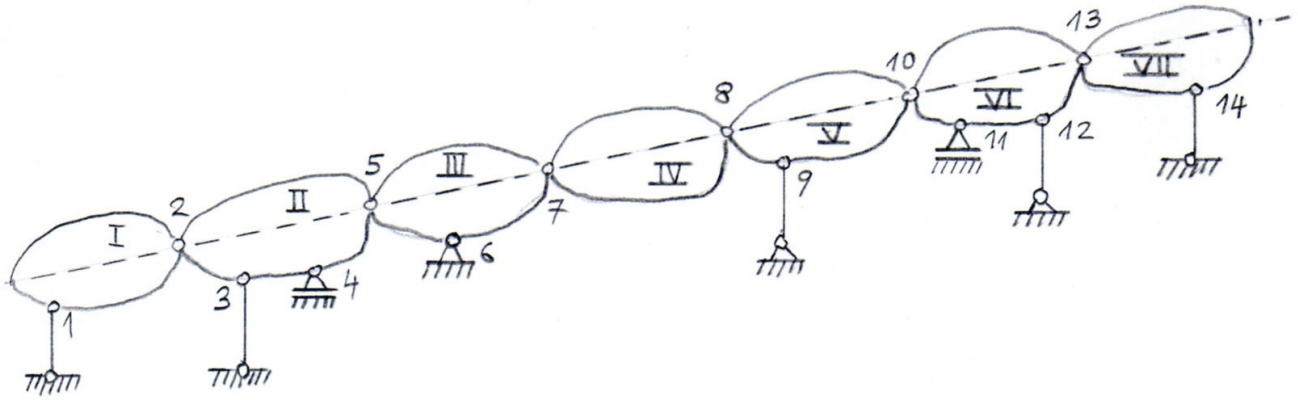
HWPK- 85- 174

Gerberov sistem

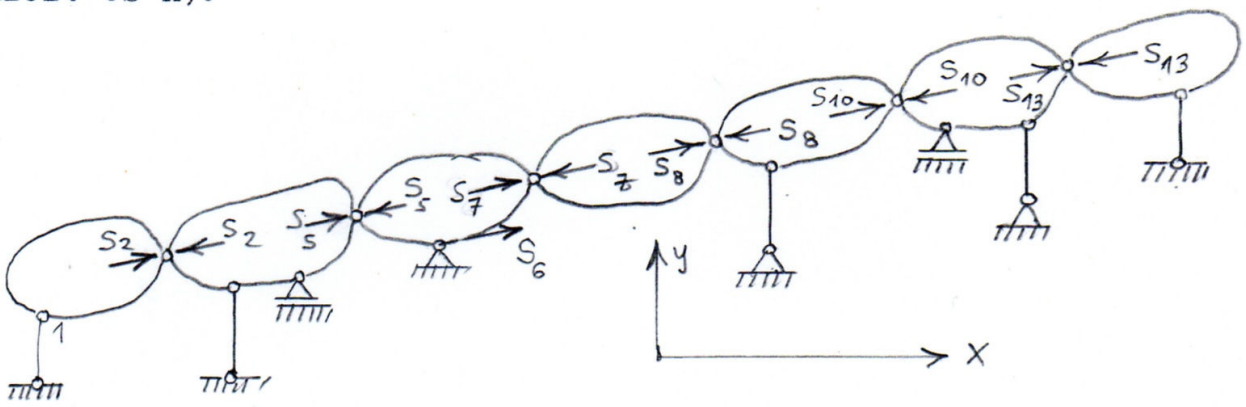
Gerberov sistem sadrži niz tijela spojenih s podlogom nizom paralelnih zglobnih štapova i/ili kliznih zglobova s paralelnim pravcima sila koje prenose. Sile u tim spojevima će se nazivati ležajne sile. Osim toga je jedno od tijela spojeno s podlogom s jednim nepomičnim zglobom. Raspored tih spojeva mora zadovoljavati uvjet odredjenosti koji će se kasnije postaviti. Po dva susjedna tijela su spojena nepomičnim zglobom . Svi nepomični zglobovi koji spajaju tijela leže na pravcu, koji će se nazivati sistemski pravac. Sistemski pravac ne smije biti paralelan s sistemskim silama.

Gerberov sistem može biti ulančen; taj specijalni slučaj je već obradjen (str.162.)

Rješenje Gerberovog sistema je popćenje rješenja prikazanog za prethodni primjer sistema s tri tijela.



Sile u nepomičnim zglobovima će se rastaviti na dvije komponente; jedna paralelna s sistemskim pravcem i druga, paralelna s ležajnim silama. Ako sistem nije ulančen pojaviti će se razni redoslijedi odredjivanja komponenti paralelnih sa sistemskim pravcem i komponenti paralelnih s ležajnim silama.
Sile paralelne sa sistemskim pravcem osredjuju se iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila na os okomitu na ležajne sile (na skici: os x).



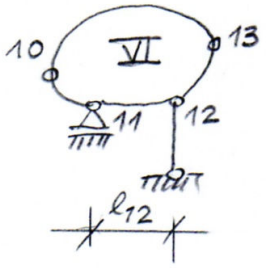
Na gornjoj skici su prikazane samo sile u spojevima koje su paralelne s sistemskim pravcem. Mogući redoslijed rješavanja tih sila u spojevima dvaju tijela je takav da se započne s krajnjim tijelom koje ne sadrži nepomični zglob s podlogom; pa se redom iskorištavajuuvjeti ravnoteže daljnjih tijela. Ako ni jedno krajnje tijelo ne sadrži nepomični spoj s podlogom može se nezavisno odrediti sile u svakom od odgovarajućih nizova tijela. Izrazi su jednaki izrazima za ulančeni Gerberov sistem. Svaka komponenta koja leži na sistemskom pravcu može se odrediti i direktno iz uvjeta ravnoteže odgovarajućeg podsistema:, na taj je način moguće provesti kontrolu.
Na primjeru prikazanom na skici najprije će se odrediti sila S_2 ili sila S_{13}, zatim S_5 ili S_{10}, te nakon toga sila S_8, pa S_7 i iz uvjeta ravnoteže tijela III sila S_6, koja se može odrediti i direktno iz uvjeta ravnoteže podsistema koji sadrži sva tijela. Isto se tako npr S_8 može odrediti iz uvjeta ravnoteže podsistema koji sadrži tijela V, VI i VII.

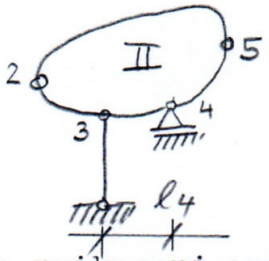
U Gerberovom sistemu se mogu pojaviti samo tijela koja imaju dva , jedan ili nijedan spoj s podlogom. Pri tome nije bitno koji je od tih spojeva nepomični zglob. Moguće su samo kombina-

HWPK-85-175

cije koje osiguravaju odredjenost. Može se uvesti postupak spajanja sličan postupku spajanja ulančenih sistema. Razlika je u tome što se u ovom slučaju promatra samo mogućnost prenosa dijela optrećenja kod kojeg je rezultirajuća sila za svako tijelo paralelna s ležajnim silama,a može postojati i rezultirajući moment. Taj će uvjet zadovoljavati i neki podsistemi koji su mehanizmi. Tek spajanjem cijelog sistema osiguran je prijenos dijela opterećenja kod kojeg rezultanta za svako tijelo leži na sistemskom pravcu. Ta se djelovanja prenose na nepomični zglob izmedju jednog od tijela i podloge.

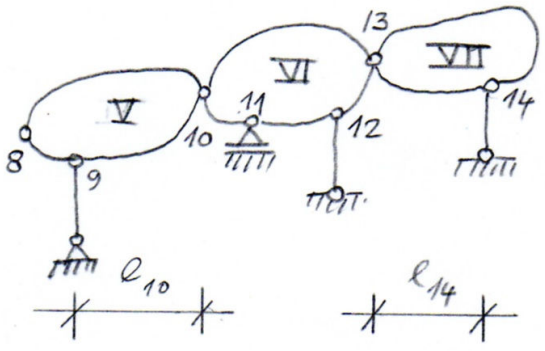
U tom postupku spajanja najprije se spajaju tijela s dva spoja s podlogom. Udaljenost pravaca ležajnih sila odnosno nepomičnog zgloba i ležajne sile mora za ta tijela biti različit od nule.

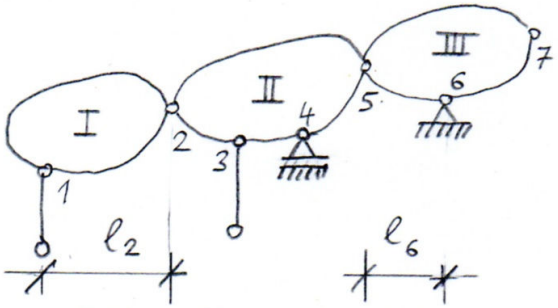




Za ranije prikazani sistem, spajanje se započinje s dva tijela, a odgovarajući uvjeti glase: $l_4 \neq \emptyset.$; $l_{12} \neq \emptyset.$

Na tijela s dva spoja mogu se nadovezivati tijela sa samo jednim spojem s podlogom. Pri tome udaljenost pravca ležajne sile od nepomičnog zgloba koji promatrano tijelo povezuje s prethodnim mora biti različita od nule. Ukliko je jedini spoj tijela upravo nepomični zglob s podlogom to će vrijediti za njegovu komponentu paralelnu s ležajnim silama.



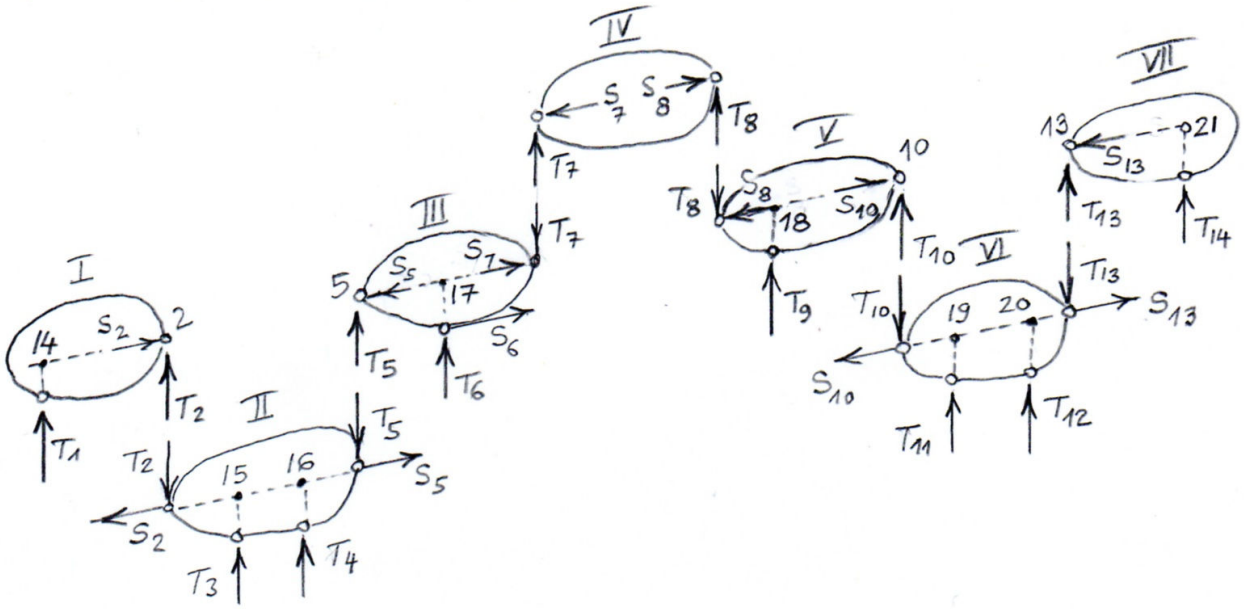


Za ranije prikazani sistem u ovoj fazi spajanja se pojavljuju dva podsistema prikazana na skici. Korisno je uočiti, da je podsistem I,II,III primjer Gerberovog sistema, dok je podsistem V,VI,VII mehanizam.

Tako dobiveni podsistemi povezuju se u cjelinu tijelima koja ne-

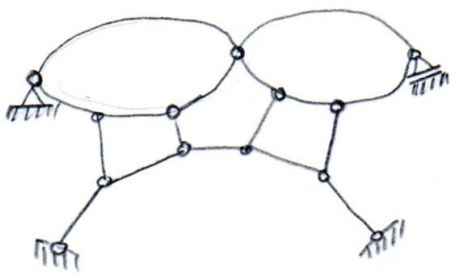
HWPK- 85- 176

maju ni jedan spoj s podlogom.
Redoslijed odredjivanja ležajnih sila i komponenti paralelnih s ležajnim silama obrnut je od redoslijeda spajanja: najprije se odredjuju sile u spojevima tijela koja nisu povezana s podlogom, pa u tijelima s jednim spojem s podlogom i konačno ležajne sile tijela koja su na dva mjesta spojena s podlogom.
Za odabrani primjer prikazan je redoslijed odredjivanja ležajnih sila i komponenti koje su paralelne s ležajnim silama; na skici rastavljenog sistema; tijela su prikazana na različitim nivoima, a rješavanje započinje s najvišim.



Iz uvjeta iščezavanja suma momenata za tijelo IV, a na točke 7,8 odrediti će se sile T_8 i T_7.
Iz uvjeta iščezavanja sume momenata na točku 17 i 5 za tijelo III odrediti će se sile T_5 i T_6. Analogno se odredjuju sile T_1, T_2, pa sile T_9 i T_{10}, te konačno sile T_{13} i T_{14}. Treba uočiti da se u sumi momenata na točku 17 pojavljuje doprinos sile S_6 koja je ranije odredjena.
Posljednje se odredjuju sile izmedju tijela i podloge za tijela koja su povezana na dva mjesta s podlogom, a to su sile T_3 i T_4 T_{11} i T_{12}.

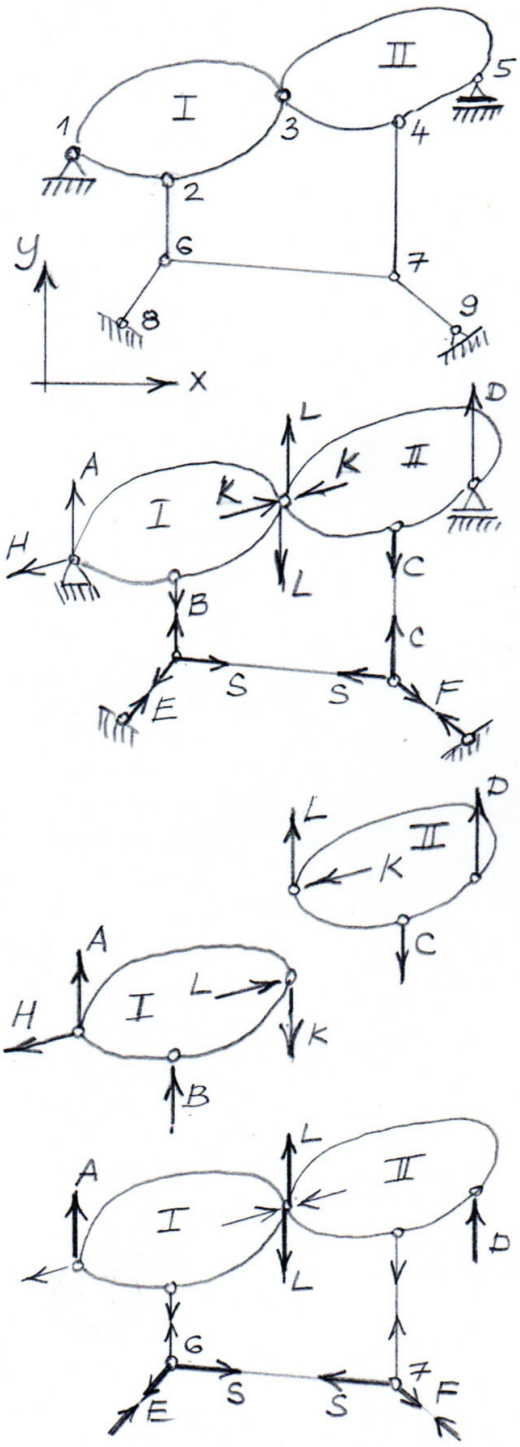
Poduprti sistemi i ovješeni sistemi



Poduprti sistem sadrži niz medjusobno spojenih tijela koja su s podlogom povezana štapnim podsistemom i direktnim spojevima. Naziv poduprt potječe od odnosa tih podsistema: štapovi su ispod tijela, pa su tijela poduprta. Moguć je i obrnut raspored kod kojeg su štapovi iznad tijela, pa su u tom slučaju tijela ovješena.

HWPK - 85 - 177

Kako se radi odredjenim spojenim sistemima, a odredjeni sistemi preuzimaju proizvoljno opterećenje, orjentacija u prostoru nije bitna za princip rješavanja.
Ovdje će se prikazati samo najjednostavniji primjer: sistem koji sadrži podlogu, dva tijela i pet zglobnih štapova. Zasebno će se riješiti specijalni slučaj koji ima veću praktičnu važnost, a slijedi i opis rješenja općeg slučaja.



a) Zglobni štapovi spojeni s tijelima su paralelni sa silom u pomičnom zglobu.

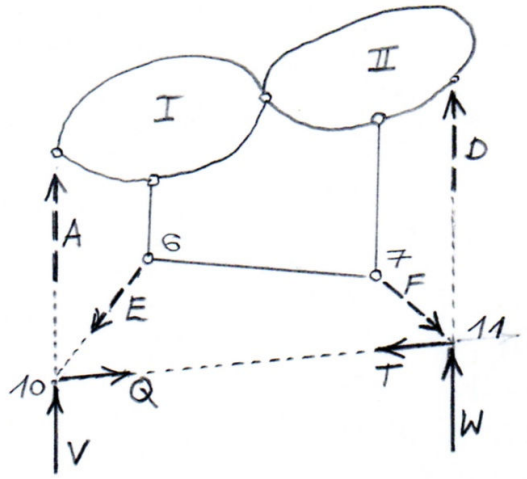
Rješenje će se postaviti pomoću pogodnog rastavljanja sila u spojevima; djelovanje nepomičnih zglobova će se prikazati s dvije sile od kojih jedna leži na spojnici zglobova, a druga je paralelna sa zglobnim štapovima.

Za odredjivanje sila na spojnici, a njihove veličine su H i K koristiti će se projekcija na os okomitu na zglobne štapove spojene s tijelom. Ta je os na skici označena s x.
Iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila na os x za tijelo II odredjuje se direktno sila K, a iz odgovarajućeg uvjeza za tijelo I odredjuje se sila H, koja se može i direktno odrediti iz projekcije svih sila na os x za podsistem koji sadrži tijela I i II.

Ako se za promatranje sistema uvedu podsistemi I+6 i II+7, vidljivo je da izmedju njih djeluju još samo dvije nepoznate sile: L i S. Izmedju podsistema I+6 i podloge djeluju takodjer samo dvije nepoznate sile: A i E koje leže na zadanim pravcima. U istom odnosu se nalaze i podsistem II+7 i podloga; izmedju njih djeluju samo dvije sile na koje leže na poznatim pravcima, a to su D i F. Na lijevoj skici su strijelice tih sila jače izvučene i samo su uz njih unesene oznake veličina.

Uočeni odnosi podsistema, podloge i preostalih nepoznatih sila potpuno odgovaraju odnosima u već obradjenom sistemu koji sadrži tri tijela, a svaki par tijela je spojen s dva zglobna štapa(str. 151. i 152.), pa će i daljnji postupak rješavanja biti analogan.

HWPK-85-178



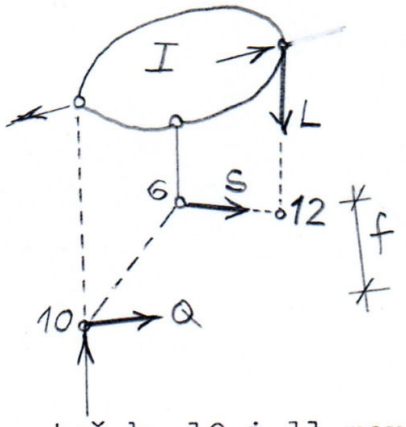
Odrediti će se sjecište pravaca sila A i E; na skici je označeno s 10. Nadalje će se odrediti sjecište pravaca sila D i F; na skici je označeno s 11.

Sile A i E će se zamijeniti statički ekvivalentnim silama V i Q čiji pravci prolaze točkom 10. Pravac V se poklapa s pravcem sile A, a pravac Q spaja sjecišta 10 i 11.

Na potpuno odgovarajući način će se sile D i F zamijeniti statički ekvivalentnim silama T i W, pri čemu se pravac sile W poklapa s pravcem sile D, a sila T leži na spojnici sjecišta. Prema postupku prikazanom za rješavanje trozglobnog i sličnih sistema pojavila se razlika samo u tome što sile V i Q nisu okomite, što će olakšati odredjivanje sile A i E.

Iz uvjeta išezavanja momenata na točku 10 za cijeli podsistem (tijela I i II i čvorovi 6 i 7) odredjuje se sila W, a iz odgovarajućeg uvjeta za točku 11 odredjuje se sila V.

U slijedećoj fazi rješavanja promatrati će se ravnoteža podsistema (I+6) i zasebno ravnoteža podsistema (II+7).

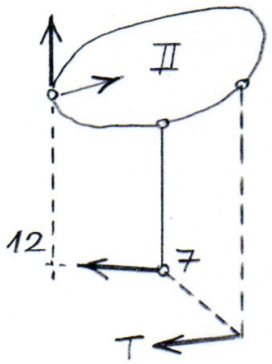


Na podsistem (I+6) djeluju sada samo još tri nepoznate sile na zadanim pravcima, a to su L,S,Q, a to je standardni zadatak iz statike tijela na koje djeluju sile u ravnini, koji se analogno rješava i u statici sistema.

Odrediti će se sjecište pravaca sila S i L; na skici je označeno s 12. Iz uvjeta iščezavanja momenata na točku 12 za podsistem (I+6) odrediti će se sila Q.

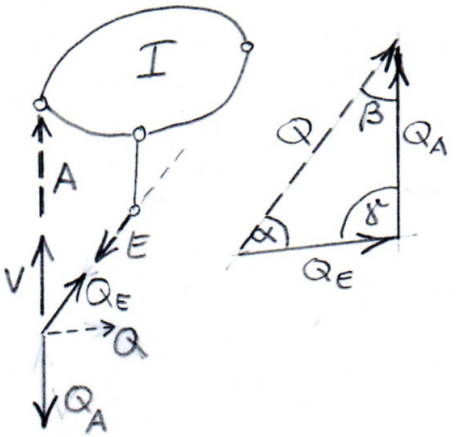
Očito udaljenost točke 12 od spojnice točaka 10 i 11 mora biti različita od nule, pa je to jedan od uvjeta odredjenosti promatranog sistema.

Sile L i S mogu se odrediti iz sume projekcija na osi x i y.



Iako na podsistem (II+7) djeluje još samo jedna nepoznata sila; T, provesti će se postupak analogan postupku za podsistem (I+6). Iz uvjeta iščezavanja mo zbroja momenata na točku 12 odrediti će se sila T, a iz uvjeta iščezavanja projekcija na osi x i y sile L i S. Ta dva podatka će poslužiti za kontrolu, jer su sile L i S već odredjene ranije.

HWPK-85-179



Sile A i E će se odrediti iz uvjeta ekvivalencije sa silama V i Q. kako se pravac sile V već poklapa sa pravcem sile A, treba samo rastaviti silu Q na komponente koje leže na zadanim pravcima, a njihove će se veličine označiti sa Q_A i Q_E. Te se veličine mogu odrediti direktno iz geometrijskog prikaza uvjeta ekvivalencije koji se svodi na trokut. Prema sinusnom pravilu dobiva se:

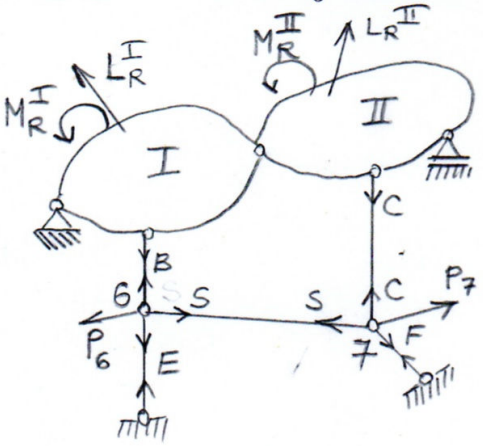
$$Q_A = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot Q \; ; \qquad Q_E = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} Q$$

U slijedećem koraku treba sile V, Q_A i Q_E zamijeniti silama A i E, pa vrijedi:

$$A = V - Q_A \; ; \qquad E = -Q_E$$

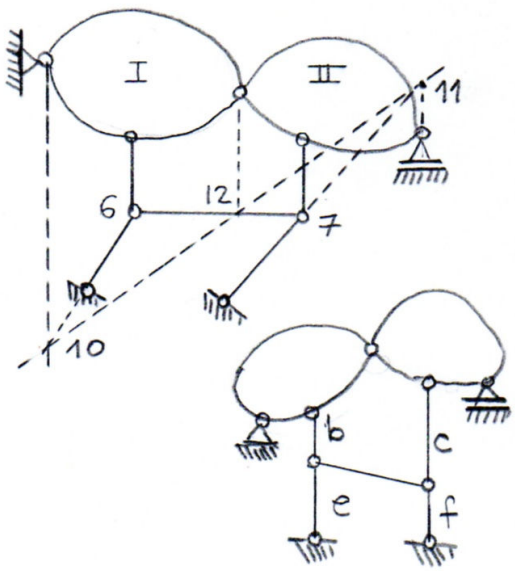
Iz uvjeta ravnoteže čvora (odrediti će se sila B.
Na analogni način će se odrediti sile C,D i F.

Prikazani postupak ne obuhvaća slučaj kod kojeg se jedno sjecište nalazi u neizmjernosti. Ako je drugo sjecište dostupno sistem je odredjen. Opisati će se postupak rješavanja. Iz uvjeta ravnoteže čvora 6 može se direktno odrediti sila S (projekcijom na os x). Nakon toga se iz uvjeta ravnoteže čvora 7 odredjuju sile C i F.



Slijedeća faza, u kojoj se odredjuju sile K,H,D,L,A,B potpuno odgovara rješavanju Gerberovog sistema.
Na kraju će se, uz poznate sile B,S i opterećenje, iz ravnoteže čvora 6 odrediti sila E.

Ovakav postupak rješavanja ne bi bio provediv, ako bi štap f bio paralelan s štapovima b,c,e.



Za prikazani specijalni slučaj poduprtog sistema kojemu su zglobni šatpovi spojeni s tijelima paralelni s silom u pomičnom zglobu i točke 1,2,3,4,5 leže svaka na različitoj paraleli s tim štapovima, postoje dva uvjeta odredjenosti:

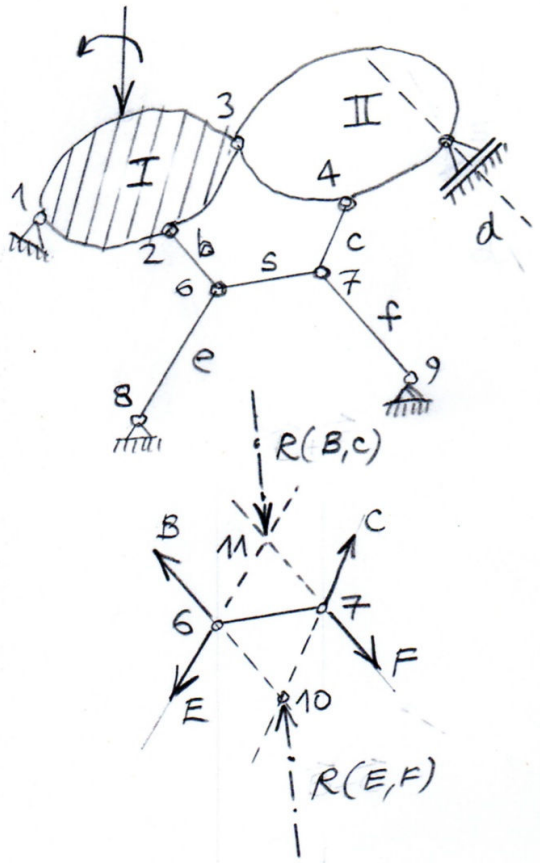
a) točke 10,11 , 12 ne leže na istom pravcu

b) oba štapa e i f nisu paralelna s štapovima b i c.

Sistemi prikazani na lijevoj skici su mehanizmi koji sadrže preodredjenost, jer ne ispunjavaju gornje uvjete.

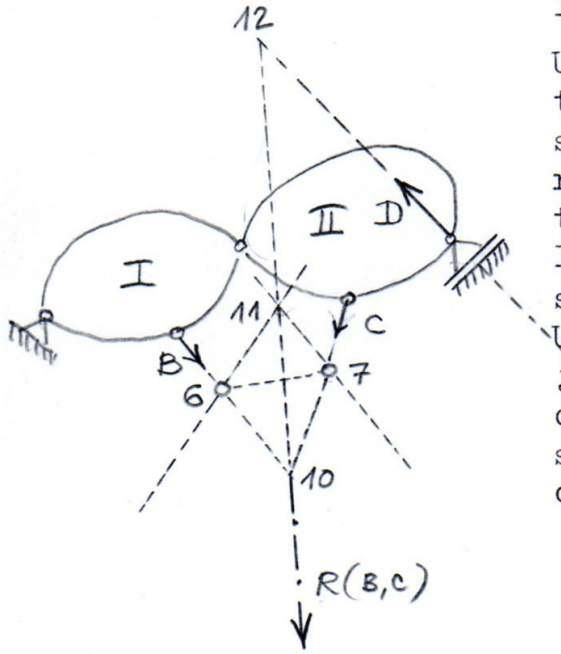
HWPK-85-180

Opće rješenje će se izvesti pomoću rastavljanja opterećenja i geometrijskih razmatranja.
Opterećenje će se rastaviti na tri grupe: djelovanje na svako od dva tijela zasebno i djelovanja na čvorove.



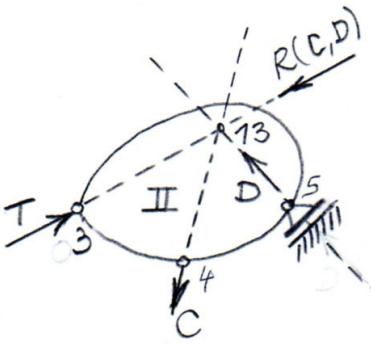
Najprije će se promatrati djelovanje opterećenja samo na tijelo koje je s podlogom povezano nepomičnim zglobom; na skici je označeno s I i šrafirano.

Ako je sistem odredjen mora se izmedju tijela I i podloge pojaviti samo tri veličine koje odredjuju statičko djelovanje. Kako je djelovanje nepomičnog zgloba odredjeno sa dvije veličine, djelovanje neopterećenog tijela II i svih pet zglobnih štapova zajedno mora se svesti na samo jednu silu na zadanom pravcu. Ako se taj pravac može odrediti i ako ne prolazi nepomičnim zglobom, dokazamo je da tijelo I može preuzeti proizvoljno opterećenje. Ustvari treba odrediti pravac rezultante triju sila, koje leže na pravcima b,c,d. Pravac rezultante sila B i C može se odrediti iz uvjeta ravnoteže podsistema koji sadrži samo čvorove 6 i 7. Na taj podsistem, zbog pretpostavke o opterećenju, djeluju samo četri sile: B,C,E,F. Rezultanta od B i C mora prolaziti točkom 10, a rezultanta od E i F mora prolaziti točkom 11.
Ako se umjesto tih sila uvedu rezultante dobiva se slučaj djelovanja dviju koncentriranih sila na podsistem, pa je ravnoteža moguća samo ako te sile leže na istom pravcu, a taj je odredjen sjecištima 10 i 11. Ako su paralelni štapovi b i c i ako su ujedno paralelni štapovi e i f, rješenje treba tražiti na drugi način.
Veličine rezultanti su na skici simbolički označene s R(B,C) i R(E,F).



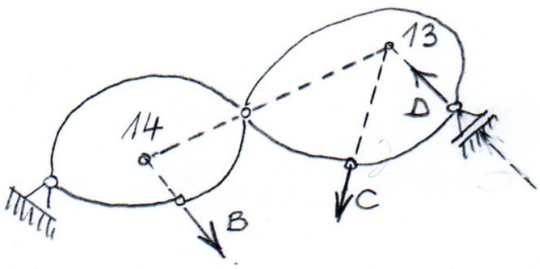
U slijedećoj fazi se promatra podsistem koji sadrži tijela I i II. Traži se rezultanta sila B,C i D. Pravac rezultante B i C je poznat i u sjecištu tog pravca s pravcem sile D mora prolaziti pravac rezultante svih triju sila, dakle R(A,C,D).
U daljnjem postupku će se odrediti još jedna točka s tog pravca. Samo jedna od tih točaka smije biti u neizmjernosti, jer je još i onda traženi pravac odredjen.

HWPK-85-181

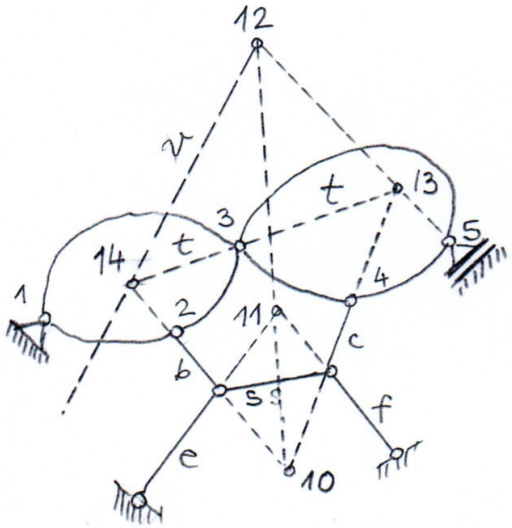


Odredjivanje druge točke pravca rezultante sila B,C,D započeti će se promatranjem ravnoteže tijela II, na koje po pretpostavci ne djeluju opterećenje, pa preostaju samo sile u spojevima: C i D na zadanim pravcima i sila T koja prolazi točkom 3. Oznaka T je upotrijebljena drugačije nego pri pješavanju prethodnog sistema (tamo su u točki 3 djelovale sile K i L).

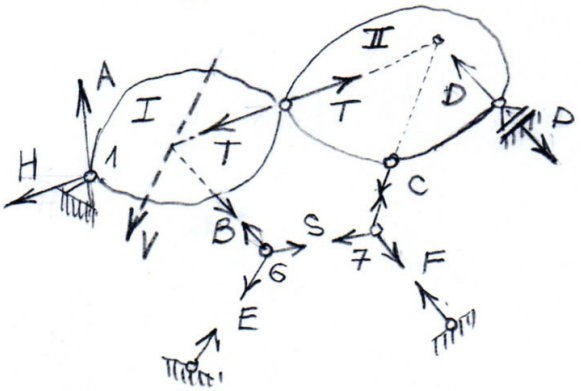
Ako se sile C i D zamijene rezultantom, dobiva se slučaj djelovanja dviju sila na tijelo, pa je ravnoteža moguća samo ako te sile leže na istom pravcu. Slijedi da je pravac sila T i R(C,D) odredjen točkama 3 i 13.



U slijedećoj fazi se promatra ravnoteža podsistema koji sadrži tijela I i II. Traži se rezultanta sila B,C i D, a poznat je pravac rezultante Ci D. Tražena rezultanta mora prolaziti sjecištem pravca sile B i pravca rezultante sila C i D. Dobiveno sjecište će se označiti brojem 14.



Na taj su način dobivena dva sjecišta kojima je odredjen pravac djelovanja rezultante sila B,C,D. Djelovanje te sile na tijelo I će se označiti veličinom V. Ako pravac v prolazi središtem nepomičnog zgloba (1) sistem je mehanizam. Ako je udaljenost pravca v od točke (1) malena u odnosu na veličinu tijela sistem je blizak mehanizmu, pa bi o tome u primjeni trebalo voditi računa.

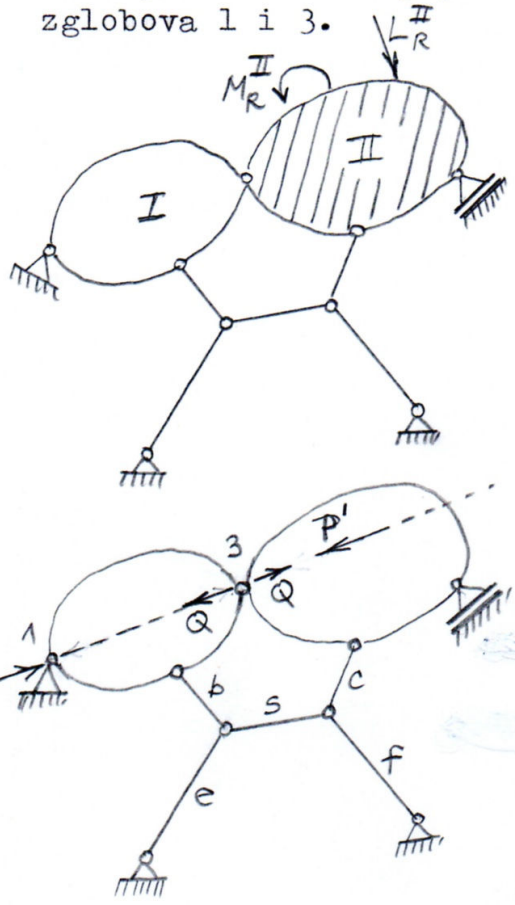


Ako je udaljenost v od (1) konačna, moguća je ravnoteža uz proizvoljno opterećenje na tijelo I. Postupak rješavanja će se započeti uravnotežavanjem tijela silom u 1 i silom V na poznatom pravcu. Na skici je sila u (1) prikazana s dvije komponente A i H. Nakon toga se sila V rastavlja na sile B i T. Na tijelo II sila veličine T djeluje suprotno nego na I i iz uvjeta ravnoteže tijela (sve sile se sijeku u točki 13) odredjuje se djelovanje sila C i D na tijelo II. Iz uvjeta ravnoteže čvora 6 odrediti će se sile E i S, a iz uvjeta ravnoteže čvora 7 sila F. Taj uvjet ravnoteže omogućava i jednu kontrolu.

Zbog zbrajanja rezultata s drugim rješenjem je povoljno da sila A

HWPK-85-182

bude paralelna s spojnicom (10,11), sila H da leži na spojnici zglobova 1 i 3.



Djelovanje opterećenja samo na tijelo koje je s podlogom povezano s pomičnim zglobom riješiti će se slično kao prethodni slučaj. To je tijelo na skici označeno s II i šrafirano.

Ako je sistem odredjen mora se izmedju tijela II i podloge pojaviti statičko djelovanje odredjeno s tri veličine.

Kako je djelovanje pomičnog zgloba odredjeno s jednom veličinom, mora neopterećeno tijelo I zajedno sa svim zglobnim štapovima prenijeti dvije sile, odnosno svi ti dijelovi moraju zajednički imati u odnosu na tijelo II funkciju dvaju zglobnih štapova. Ako bi na tijelo sila djelovala upravo tako, da njen pravac prolazi jednim od štapova, onda bi sila u pomičnom zglobu iščeznula. Rješavanje će se svesti na traženje dvaju pravaca na kojima bi sila mogla djelovati na tijelo II tako da bude ravnoteža uz iščezavanje sile u pomičnom zglobu.

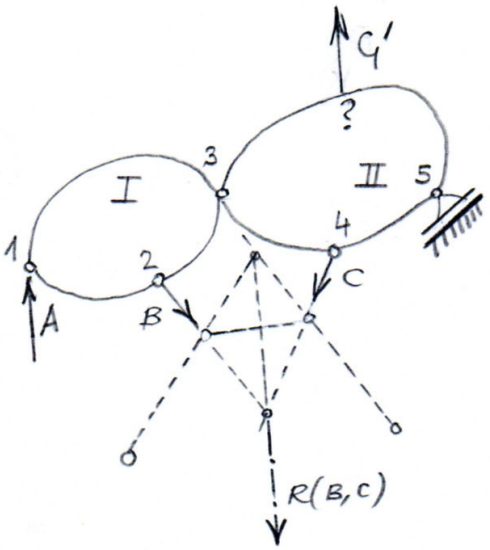
HWPK-85-183.

Prvi pravac koji ima to svojstvo je odredjen spojnicom nepomičnih zglobova 1 i 3. Intuitivno se može prihvatiti da u tom slučaju tijelo I ima ulogu zglobnog štapa i da sile u svim ostalim spojevima iščezavaju. To se može i formalno dokazati . Po pretpostavci sila na pravcu d iščezava, pa tijelo II treba uravnotežiti silom u točki 3 i silom na pravcu c. Kako je opterećenje sila P' čiji pravac prolazi točkom 3 sila na pravcu c iščezava, a to povlači i ičšezavanje svih sila u zglobnim štapovima. Na tijelo I djeluje sila Q u točki 3. Kako pravac sile Q prolazi točkom 1 u tom će se zglobu pojaviti suprotna sila na pravcu, veličine $H = Q$, a sila u štapu b mora iščezavati, što je već i ranije zaključeno.

(Veličina Q je upotrijebljena drugačije nego u specijalnom slučaju sistema obradjenog na str.178 do 180.)

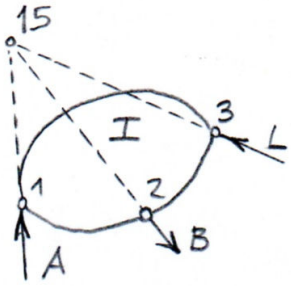
Treba odrediti još jedan pravac na kojem sila može djelovati tijelo II, a da pri tome iščezava sila u pomičnom zglobu. Taj pravac se ne smije poklapati s prehodnim, a ako je prethodni pravac paralelan s pravcem sile u pomičnom zglobu, ne smije biti paralelan s tim pravcima. Traženi pravac će se označiti s "g"

Odredjivanje pravca "g" je pregledno ako se pretpostavi da je paralelan pravcu rezultante sila B i C, a taj se pravac može odrediti ako je dostupno barem jedno od sjecišta štapova: sjecište b i c ili sjecište f i e, kao što je prikazano na str.181.

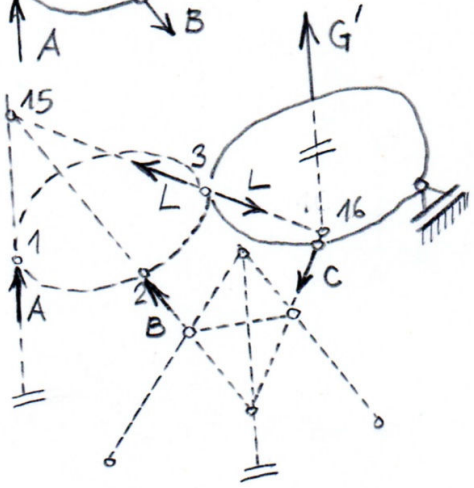


Promatrati će se ravnoteža podsistema koji sadrži tijelo I i II. Po pretpostavci je sila u pomičnom zglobu jednaka nuli, pa na podsistem djeluju samo tri sile: sila u zglobu 1, rezultanta od sila B i C i koncentrirana sila G' kao opterećenje tijela II.

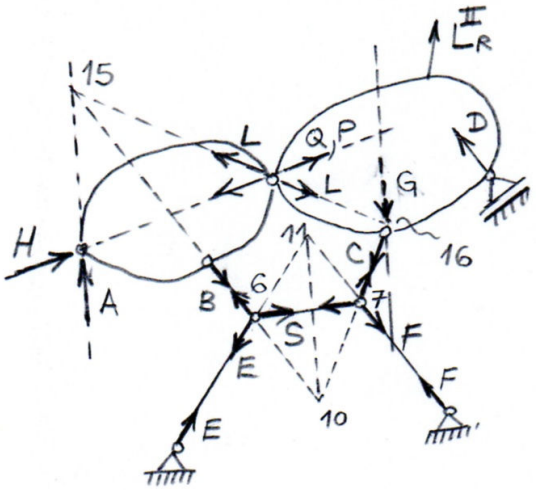
Kako je G odabrano paralelno s R(B,C) ravnoteža je moguća samo ako je i pravac sile u zglobu 1 paralelan s prve dvije sile. Sila na tom pravcu je već i u ranijem primjeru označena s A.



Promatranjem ravnoteže tijela I odrediti će se pravac sile L u zglobu 3. Osim te sile na tijelo djeluju samo sile A i B čiji pravci su poznati. Pravac rezultante sila A i B će prolaziti točkom 15. Ako se te dvije sile zamijene rezultantom djeluju na tijelo samo dvije sile i ravnoteža je moguća samo ako leže na istom pravcu, dakle na spojnici točaka 15 i 3.



Točka kroz koju prolazi pravac sile G' odrediti će se promatranjem ravnoteže tijela II. Na njega djeluju tri sile: L, C i G', pa je ravnoteža moguća, ako se sijeku u istoj točki. Pravci djelovanja sila L i C su poznati pa će se odrediti sjecište, označeno sa 16 kroz koji mora prolaziti pravac sile G (paralelna s R(B,C)).



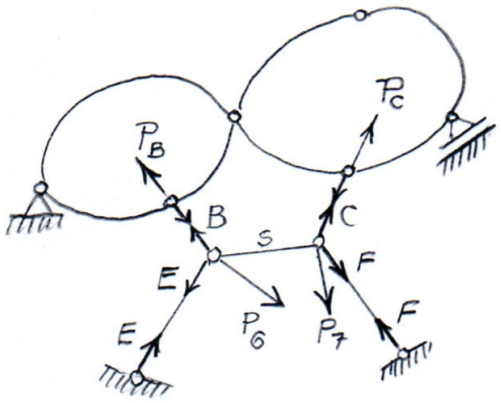
Pri rješavanju je preglednije sile na pravcima p i g shvatiti kao uravnotežavajuće, pa će se njihove veličine označiti s P i G

Zadano opterećenje tijela II će se uravnotežiti s tri sile na zadanim pravcima:P,G,D. Zadatak je rješiv samo ako pravci nisu paralelni i ako se ne sijeku u istoj točki. Kada se sile D,G i P odrede treba odrediti preostale sile u spojevima. Sila P je jednaka sili Q i sili H. Sila G se rastavlja na L i C. Djelovanje sile L na tijelo I uravnotežuju sile A i B. Kada su poznate sile B i C,mogu se iz uvjeta ravnoteže čvorova odrediti sile E,F,S, a preostaje i jedan uvjet za kontrolu.

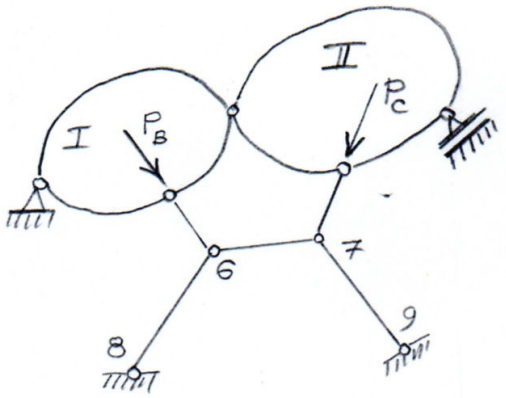
Ukupno djelovanje na tijela I i II riješiti će se zbrajanjem pri-

HWPK-85-184

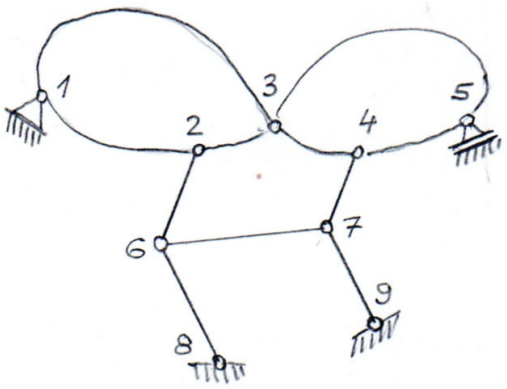
zanih rješenja.



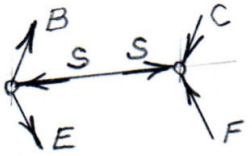
Djelovanje opterećenja na čvorove svodi se na djelovanje opterećenja na tijela i to tako da se uvede jedan novi tip rješenja koji je vrlo jednostavan.
Kod tog rješenja se ravnoteža čvora postizava samo silama u zglobnim štapovima izmedju tijela i podloge. Proizvoljna sila opterećenja P_6 uravnotežiti će se silama u štapovima b i e a sila na čvor 7 označena s P_7 uravnotežiti će se silama u zglobnim štapovima c i f. Sila u štapu"s" je jednaka nuli. Djelovanje sile B na tijelo I uravnotežava se uvodjenjem pomoćnog opterećenja P_B po veličini i pravcu jednakog sili B. Djelovanje sile C na tijelo II uravnotežava se uvodjenjem pomoćnog opterećenja P_C.
Kod ovog rješenja sile u svim zglobovima, a to su 1,3,5 iščezavaju.



U traženom rješenju sile P_B i P_C ne smiju postojati, pa ih treba poništiti. Zbog toga će se prvom, jednostavnom rješenju dodati drugo rješenje koje odgovara djelovanju sila veličine P_B i P_C ali suprotnog smjera od onih u prethodnom rješenju. U ovom slučaju sile djeluju na tijela, a taj je slučaj već obradjen. Kod ovog rješenja se mogu pojaviti sile u svim spojevima. Superpozicija s prvim rješenjem je jednostavna, jer ju treba provesti samo za štapove b,c,e,f.

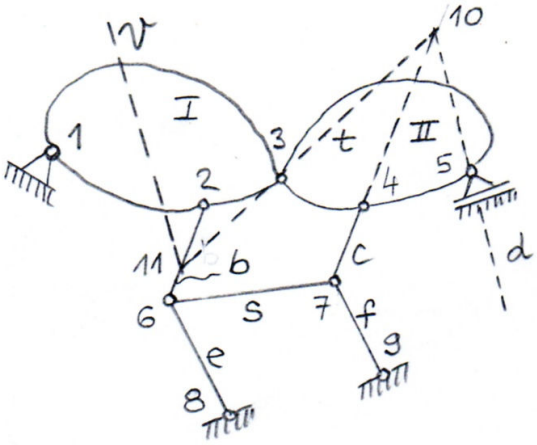


Na kraju će se još komentirati specijalni slučaj: štapovi b i c su paralelni i štapovi e i f su paralelni. Pristup će biti isti kao i ranije: promatra se zasebno djelovanje opterećenja na svako od tijela i zasebno djelovanje na čvorove.



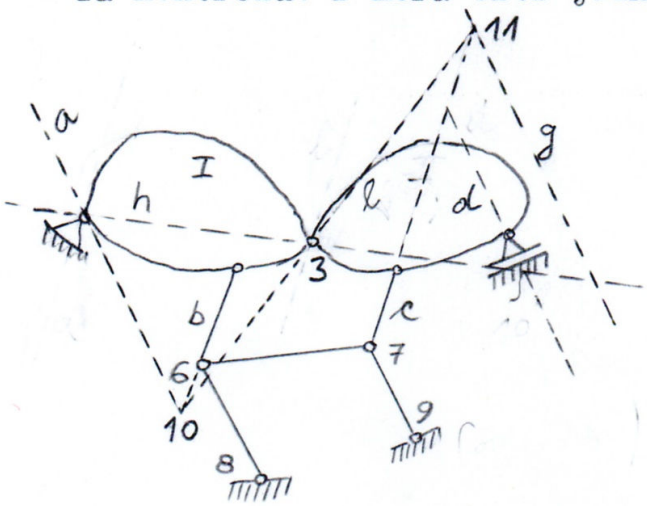
Iz uvjeta ravnoteže podsistema koji sadrži samo čvorove, a nije opterećen, može se zaključiti da rezultanta sila B i E, mora ležati na spojnici čvorova, isto vrijedi i za rezultantu sila C i F. Zbog paralenosti štapova čine sile B i C spreg i sile E i F čine spreg, t.j. statičko djelovanje zglobnih štapova izmedju tijela i podloge ekvivalentno je spregu, odnosno koncentriranom momentu.

HWPK-85-185



Ako opterećenje djeluje samo na tijelo I, onda se iz uvjeta ravnoteže tijela II može odrediti pravac sile u zglobu 3. Na tijelo II djeluju tri sile i ravnoteža je moguća ako se pravci sijeku u istoj točki, označenoj s 10. Pravac sile u zglobu 3 označen je s "t".

Na tijelo I djeluju osim sile u zglobu 1 i opterećenja još i sile na pravcima t i b. Pravac njihove rezultante mora prolaziti njihovim sjecištem; označeno je s 11. Sila na pravcu "v" biti će rezultanta sila B,C,D. Kako sile B i C čine spreg, biti će pravac "v" na kojemu leži rezultanta paralelan s pravcem sile D. Opterećemje na tijelo I će se uravnotežiti silom V na pravcu "v" i silom u točki 1. Sila V se rastavlja na silu B i T, time je odredjeno i djelovanje sile T na tijelo II, pa se iz uvjeta ravnoteže može odrediti sile C i D. Za kontrolu: D mora biti jednako V.



HWIPK-85-186

Ako opterećenje djeluje samo na tijelo II imati će neopterećeni podsistem, koji se sastoji od tijela I i svih zglobnih štapova, statičku funkciju dvaju zglobnih štapova, t.j. izmedju tijela II i podloge prenositi će se sile na dva pravca.

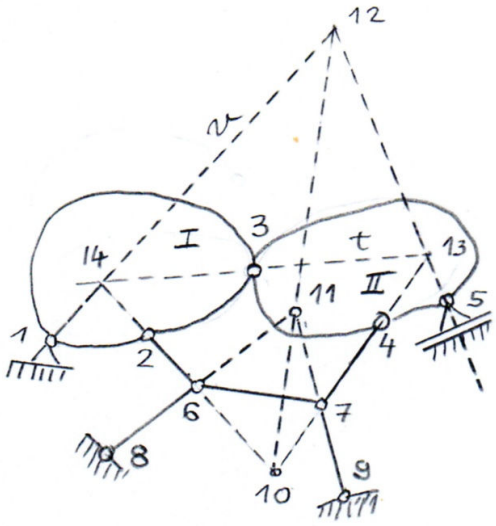
Kao i u ranijem primjeru, jedan od tih pravaca je odredjen spojnicom zglobova 1 i 3 (pravac "h").

Drugi pravac se određuje tako, da se odabere smjer sile u zglobu 1. Zbog preglednosti je taj pravac odabran tako da bude paralelan s pravcem "d". Iz uvjeta ravnoteže neopterećenog tijela I odredjuje se na poznati način (točka 10) pravac sile u zglobu 3, (pravac l).

Po pretpostavci iščezava sila na pravcu "d", a traži se pravac sile za koju je ipak moguća ravnoteža. Osim tražene sile na tijelo II djeluju sile na pravcima "l" i "c" pa pravac tražene sile mora prolaziti točkom 11, t.j. sjecištem tih pravaca. Ako se promatra ravnoteža podsistema koji sadrži tijela I i II uočava se da na njega djeluju četiri sile; na pravcima a,b,c i na pravcu g koji treba odrediti. Dokazano je da sile na pravcima b i c čine spreg, pa je ravnoteža moguća samo ako i preostale dvije sile čine spreg. što znači da pravac g na kojem leži tražena sila mora biti paralelan s pravcem a.

Opterećenje na tijelo II će se na poznati način uravnotežeiti silama na tri pravca d,h,g. Silom na pravcu h odredjena je jedna komponenta sile u zglobovima 3 i 1. Sila na pravcu g se mora rastaviti na silu C i L. Time je odredjeno djelovanje sile L na

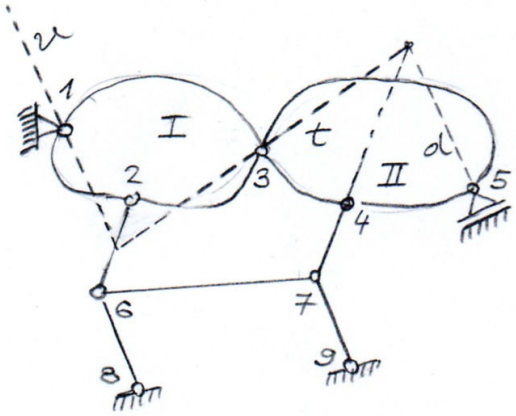
tijelo I, pa će se iz uvjeta ravnoteže odrediti sile na pravcima a i b.



Uvjet odredjenosti promatranog sistema svodi se na uvjet rješivosti zadatka uravnotežavanja tijela na koji se rješenje svodi.

Sistem na lijevoj skici nije odredjen, jer pravac "v" prolazi točkom 1. Sila na pravcu "v" prikazuje djelovanje neopterećenog tijela II i svih štapova (str.182.)

Prikazani sistem je mehanizam koji sadrži preodredjenost.



Sistem na lijevoj skici nije odredjen, jer pravac "v" prolazi točkom 1. Sila na "v" prikazuje djelovanje neopterećenog tijela II zajedno sa svim zglobnim štapovima, kao što je objašnjeno na str.185/186.

Prikazani sistem je mehanizam koji sadrži preodredjenost.

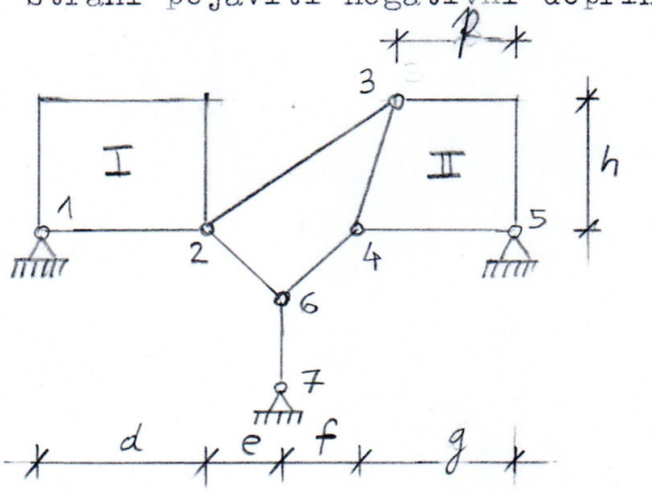
HWPK-85-187

Nepravilni ravninski sistemi

Nepravilni sistemi se ne mogu direktno prepoznati prema geometrijskim svojstvima i ne postoji način da se rekurzivno riješe. Mogu se prepoznati i riješiti općim algebarskim postupkom ili metodom zamjene spojeva.

Opći algebarski postupak za prepoznavanje odredjenog ravninskog sistema.

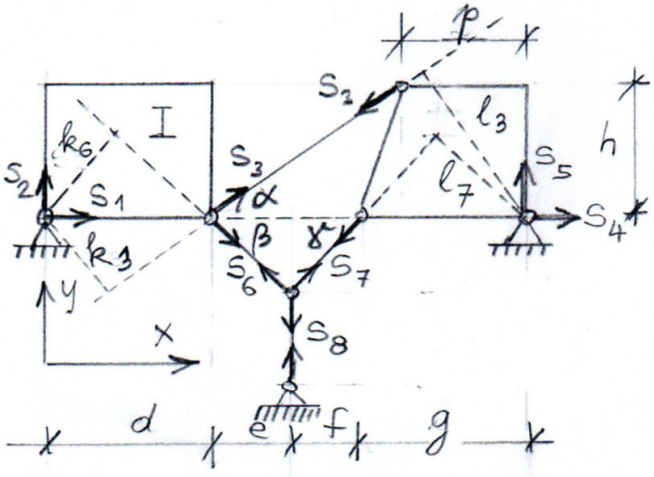
Postavlja se $s_1 = 3t + 2n - 3$ nezavisna uvjeta ravnoteže kao za izolirani sistem na koji djeluju samo sile u ravnini. Ukupni broj reakcija u ravnini mora biti jednak broju nezavisnih uvjeta ($s = s_1$) i determinanta koeficijenata uz reakcije mora biti različita od nule. Reakcije t.j skalarne veličine koje odredjuju sile i momente u spojevima odredjuju se rješavanjem pripadnog sistema linearnih algebarskih jednadžbi u kojemu će se na desnoj strani pojaviti negativni doprinos opterećenja.



Kao primjer odabran je sistem prikazan na skici. Sastoji se od dva tijela (I,II) jednog čvora (6) i četiri zglobna štapa i podloge.

Uvjet odredjenosti tog sistema postaviti će se općim algebarskim postupkom.

Postupak započinje opisivanjem statičkih funkcija spojeva; obično se ucrtavaju na skicu sistema.



Reakcije t.j. veličine koje odredjuju sile u spojevima označiti će se sa S_i.
Strijelice uz sile S_1, S_2, S_4, S_5. prikazuju djelovanja na tijela, a ne na podlogu.

Odabran je koordinatni sistem xy. Uvjeti ravnoteže tijela će se postaviti u osnovnoj formulaciji. Za tijelo I je odabrana točka redukcije 1, a za tijelo II točka 5.

Uvjeti ravnoteže čvora će se izraziti pomoću projekcija na osi x,y.

Geometrija sistema je odredjena kotama paralelnim s koordinatnim osima. Radi preglednijeg izražavanja projekcija sila u zglobnim štapovima uvedeni su kutevi izmedju pravaca tih štapova i pravca odredjenog osi x.
Uvjeti ravnoteže će se postaviti u tabelarnom obliku. Za prepoznavanje su potrebni samo doprinosi silama u spojevima, t.j. koeficijenti uz nepoznanice.

15.5
HWPK-85-188

UVJET \ REAKCIJA	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
ΣP_{xi}^{I}	1	0	a_x	0	0	b_x	0	0
ΣP_{yi}^{I}	0	1	a_y	0	0	$-b_y$	0	0
$\Sigma M_{(1)}^{I}$	0	0	k_3	0	0	$-k_6$	0	0
ΣP_{xi}^{II}	0	0	$-a_x$	1	0	0	$-c_x$	0
ΣP_{yi}^{II}	0	0	$-a_y$	0	1	0	$-c_y$	0
$\Sigma M_{(5)}^{II}$	0	0	l_3	0	0	0	l_7	0
ΣP_{xi}^{G}	0	0	0	0	0	$-b_x$	c_x	0
ΣP_{yi}^{G}	0	0	0	0	0	b_y	c_y	−1

U tabeli su uvedene oznake:

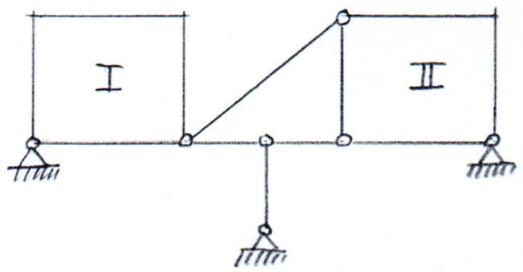
$a_x = \cos\alpha$ $\quad a_y = \sin\alpha$

$b_x = \cos\beta$ $\quad b_y = \sin\beta$

$c_x = \cos\gamma$ $\quad c_y = \sin\gamma$

Lako se provjerava da je vrijednost determinante koeficijenata uz rekacije: $-(b_x \cdot l_7 \cdot k_3 + c_x \cdot l_3 \cdot k_6)$

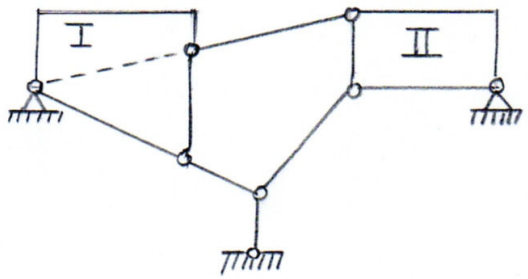
15.II HWIPK-85-189



Mogu se konstruirati primjeri za koje determinanta iščezava, pa takovi sistemi nisu odredjeni nego mehanizmi koji sadrže preodredjenost.

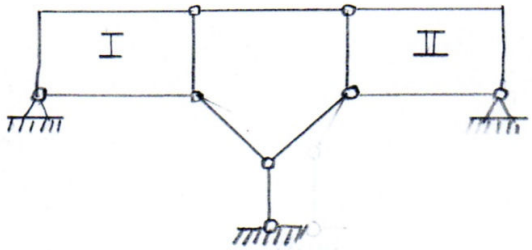
Sistem na skici je mehanizam, jer u tom slučaju vrijedi:

$b_x = 0, \quad c_x = 0$



Prikazani sistem je mehanizam jer u ovom slučaju vrijedi:

$k_3 = 0, \quad k_6 = 0$

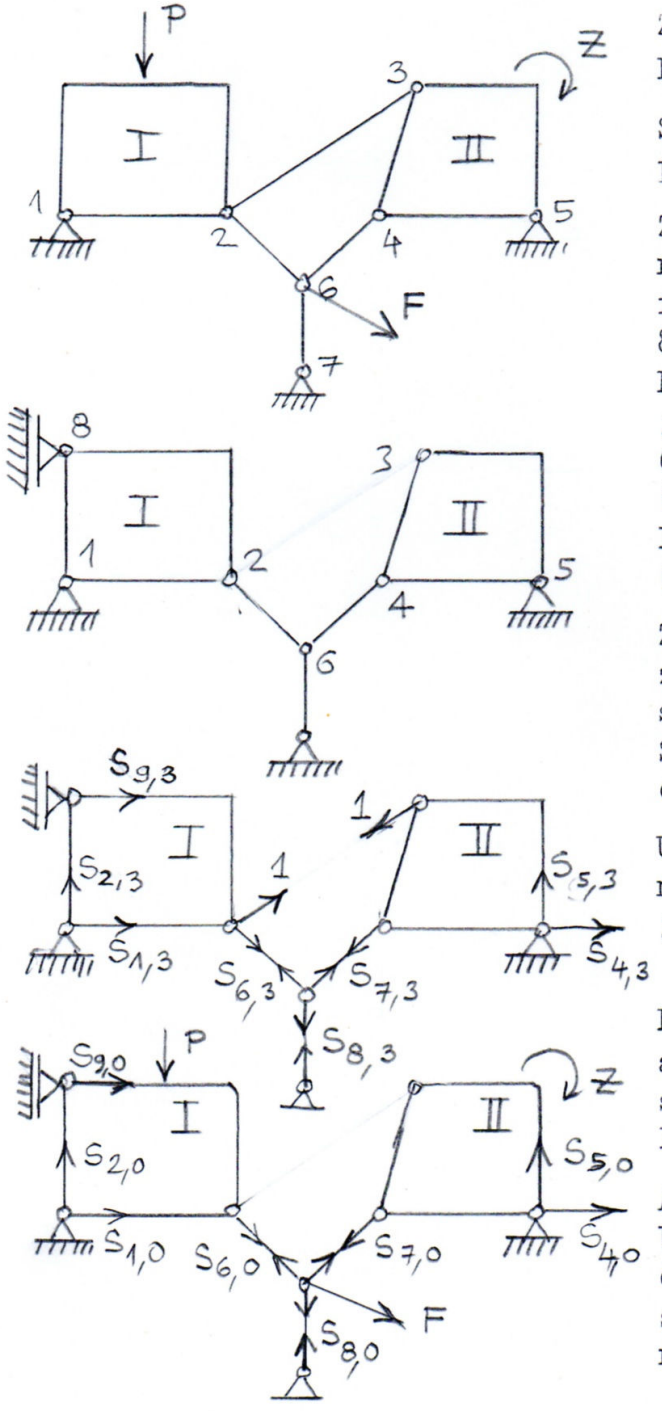


Determinanta prikazanog sistema razlikuje se od prethodnog samo za predznak prvog pribrojnika, što znači da je to mehanizam, jer zbog simetrije vrijedi: $b_x = c_x, \quad k_3 = l_3, \quad k_6 = l_7$

Metoda zamjene spojeva

Metoda zamjene spojeva zasniva se na pridruživanju zamjenjujućeg odredjenog sistema zadanom sistemu.
Zamjenjujući sistem se dobiva tako, da se u zadanom neki spojevi isključe, ili zamijene jednostavnijim spojevima, a drugim mjestima se dodaju novi spojevi tako, da zamjenjujući sistem bude ulančen ili rekurzivno rješiv. Ukupni broj reakcija zamjenjujućeg sistema jednak je broju reakcija zadanog t.j. jednak je broju nezavisnih uvjeta ravnoteže izoliranog sistema na koji djeluju sile u ravnini.

Zamjenjujući sistem treba riješiti zasebno više puta. Rješava ga se za zadano opterećenje i zasebno za djelovanje svake od isključenih komponenti sila u spojevima.
Veličine isključenih komponenti odredjuju se iz uvjeta iščezavanja sila u novim spojevima koji se dodani.



Za primjer je odabran isti sistem koji je rješavan općim postupkom.

Sile P,F i koncentrirani moment Z pretstavljaju opterećenje sistema.

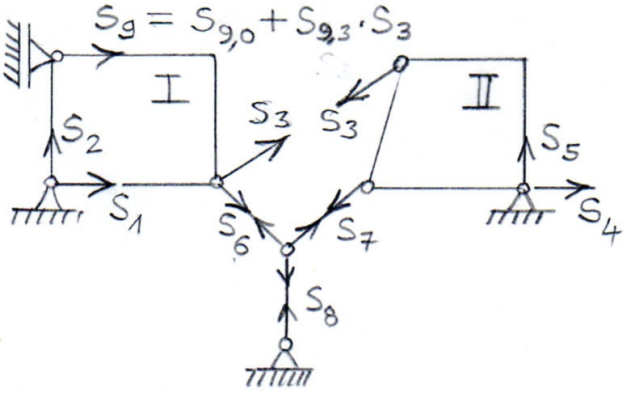
Zamjenjujući sistem će se iz zadanog dobiti uklanjanjem štapa (2,3) i uvodjenjem pomičnog zgloba u točki 8. Tako je dobiven ulančen sistem. Redoslijed spajanja je: tijelo I je prosto spojeno s podlogom, čvor 6 prosto spojen s podsistemom (I + podloga) i konačno je tijelo II prosto spojeno s podsistemom (I + 6 + podloga).

Zamjenjujući sistem će se riješiti za isključivo djelovanje jediničnih sila na mjestu isključenog štapa. Sve sile u spojevima tog rješenja označene su dodatnim indeksom 3.

Uvjet odredjenosti zadanog sistema je taj, da sila u dodanom spoju izazvana jediničnim djelovanjem bude različita od nule.

Kada bi bilo više isključenih reakcija, trebala bi determinanta sila u dodanim spojevima biti različita od nule.

Ako je zadani sistem odredjen, treba zamjenjujući sistem riješiti za djelovanje opterećenja. Sve sile u spojevima tog rješenja imaju dodatni indeks 0.



Traženo rješenje će se dobiti zbrajanjem rješenja za opterećenje s jediničnim rješenjem koje je pomnoženo sa zasada nepoznatom silom u isključenom štapu, a to je S_3. Tako se dobiva novo rješenje zamjenjujućeg sistema u kojem sve sile u spojevima imaju oblik:

$$S_i = S_{i,0} + S_{i,3} \cdot S_3$$

Mehaničko stanje zamjenjujućeg sistema biti će jednako stanju zadanog sistema, ako sila u dodanom spoju iščezne, t.j. ako se zadovolji jednadžba:

$$S_9 = S_{9,0} + S_{9,3} \cdot S_3 = 0$$

Ta će jednadžba biti zadpvoljena za samo jednu vrijednost S_3 i ta se odredjuje na poznati način:

$$S_3 = -\frac{S_{9,0}}{S_{9,3}}$$

Nakon odredjivanja sile S_3 mogu se prema gornjem izrazu odrediti i sile u svim preostalim spojevima.

Kada bi bilo više isključenih reakcija, trebalo bi riješiti odgovarajući sistem linearnih algebarskih jednadžbi.

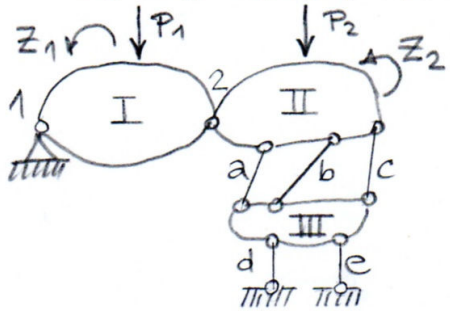
15.II HWPK-85-191

Složeni sistemi

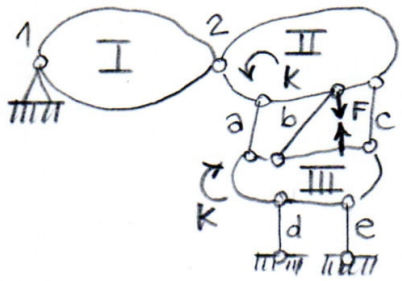
Složeni sistemi su statički odredjeni spojeni sistemi koji sadrže odredjene podsisteme; znači da ulogu nekih tijela preuzimaju odredjeni podsistemi. Složeni sistemi imaju slijedeća svojstva:

a) Sile u spojevima izmedju tijela i odredjenih podsistema mogu se odrediti bez odredjivanja sila unutar podsistema.

b) ako iščezavaju rezultirajuća djelovanja opterećenja za svaki podsistem zasebno, iščezavaju i sve sile i momenti u spojevima koji spajaju podsisteme.



Kao primjer je odabran sistem prikazan na skici. To je jednostavan Gerberov sistem koji umjesto jednog tijela ima prosto spojeni podsistem. Za opterećenje P_1, P_2, Z_1, Z_2 mogu se riješiti sile u spojevima Gerberovog sistema; u zglobovima 1 i 2 i štapovima d i e, a da se pri tome ne moraju odrediti sile u štapovima odredjenog podsistema; a to su štapovi a,b,c.



Opterećenje koje se sastoji od sile F i koncentriranog momenta K djeluje izmedju tijela II i III, dakle unutar odredjenog podsistema. Gerberov sistem kao cjelina je neopterećen, pa sile u njegovim spojevima iščezavaju; u zglobovima 1 i 2 i štapovima d i e.

Preodredjeni ravni spojeni sistemi

Statička definicija: Preodredjeni ravni spojeni sistem može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje u ravnini, ali se sve sile u spojevima u ravnini ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

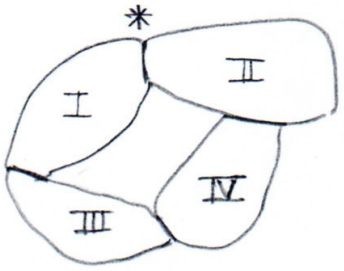
Definicija pomoću odredjenog ravnog spojenog sistema: Preodredjeni ravni spojeni sistem sadrži barem jedan ravni odredjeni sistem, pa se zamjenom nekih spojeva jednostavnijim spojevima i/ili isključivanjem spojeva može svesti na barem jedan odredjeni ravni spojeni sistem.

Ostali zaključci i svojstva odgovaraju onima iz općeg slučaja. Podjela preodredjenih ravnih spojenih sistema zasniva se na podjeli odredjenih ravnih spojenih sistema, koje preodredjeni sistemi sadrže.

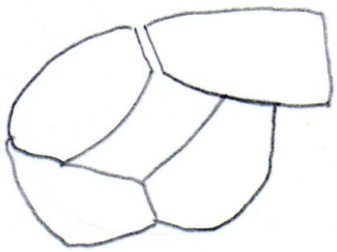
Navesti će se samo neki jednostavniji primjeri.

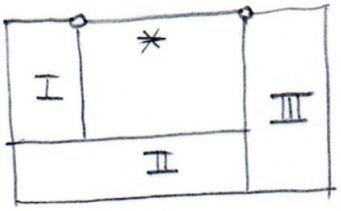
Sistemi koji sadrže lanac krutih spojeva.

16.II. HWPK - 85 - 192

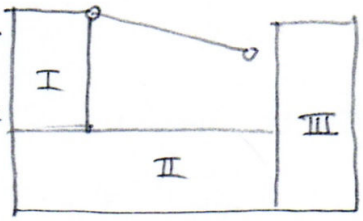


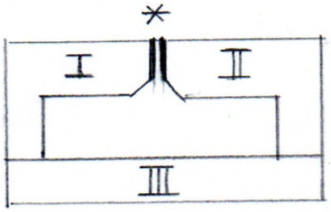
Isključenjem označenog spoja prelazi zadani sistemu u odredjeni:



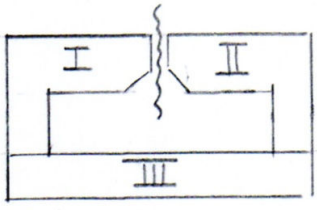


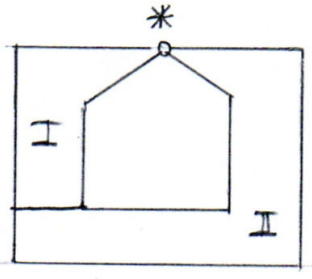
Isključenjem označenog spoja, prelazi zadani sistem u odredjeni:



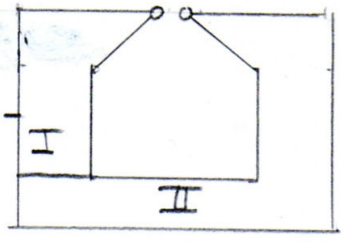


Simbol kliznog spoja i isključenog spoja su vrlo slični, pa situaciju treba precizirati.

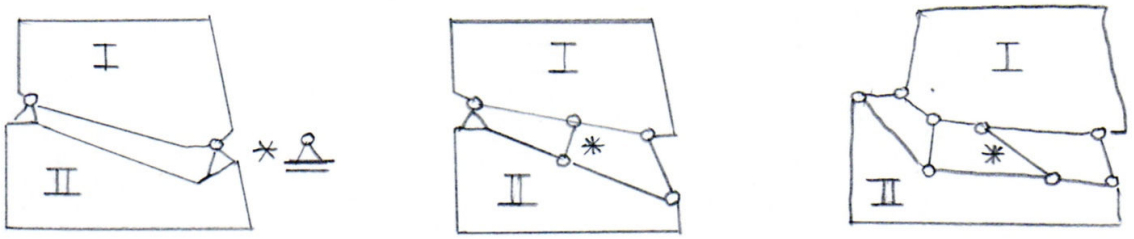




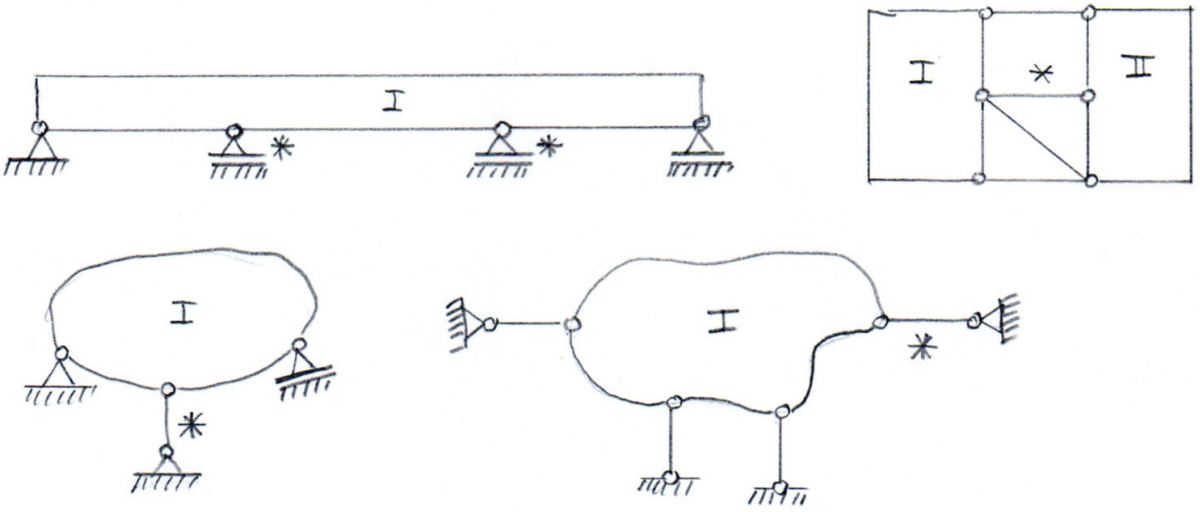
Isključenjem označenog spoja, prelazi zadani sistem(lijevo) u odredjeni (desno).



Sistemi koji se svode na prosti spoj dvaju tijela

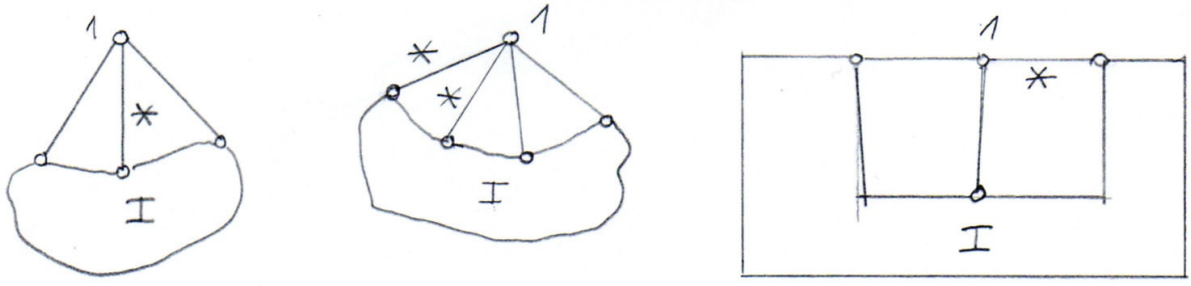


Prvi sistem sadrži označen spoj uz koji je ucrtan simbol pomičnog zgloba, što znači da sistem zamjenom označenog nepomičnog zgloba pomičnim prelazi u odredjeni. Preostala dva sistema prelaze u odredjene ako se označeni spojevi isključe. Navesti će se još nekoliko primjera.

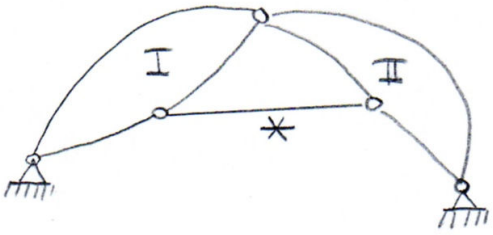


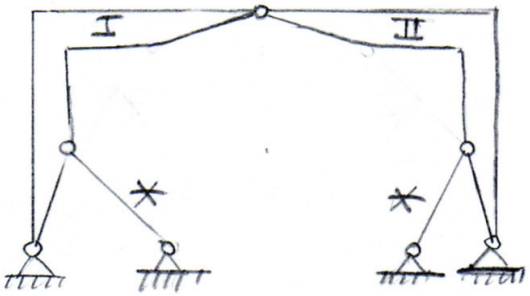
16.02. HWPK - 85 - 193

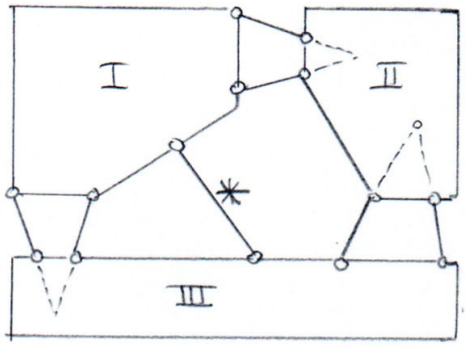
Sistemi koji se svode na prosti spoj tijela i čvora

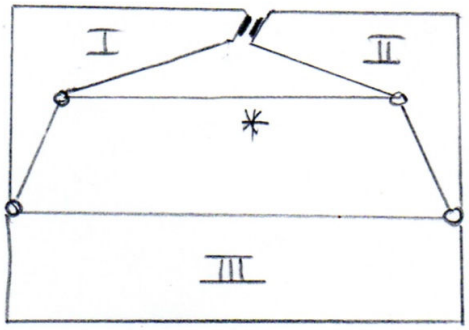


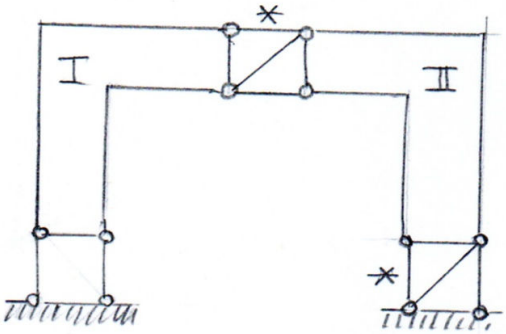
Sistemi koji se svode na trozglobni sistem ili na slične sisteme

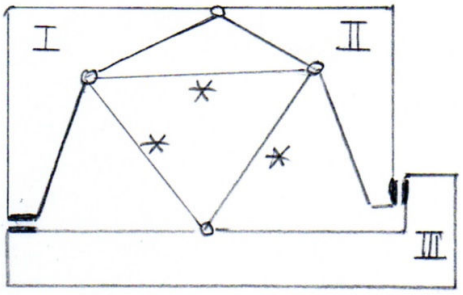






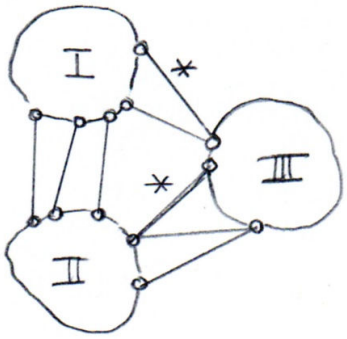


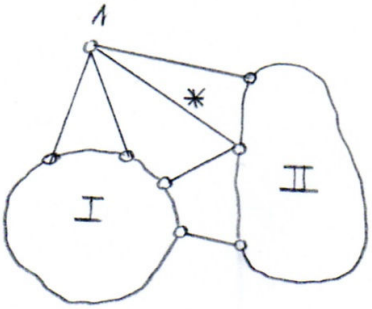


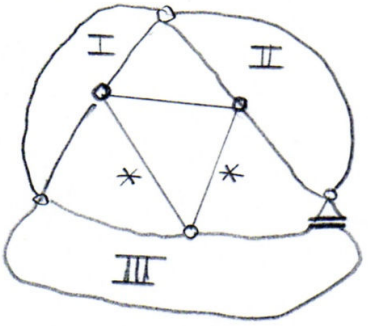


16.02.
HWPK-85-194

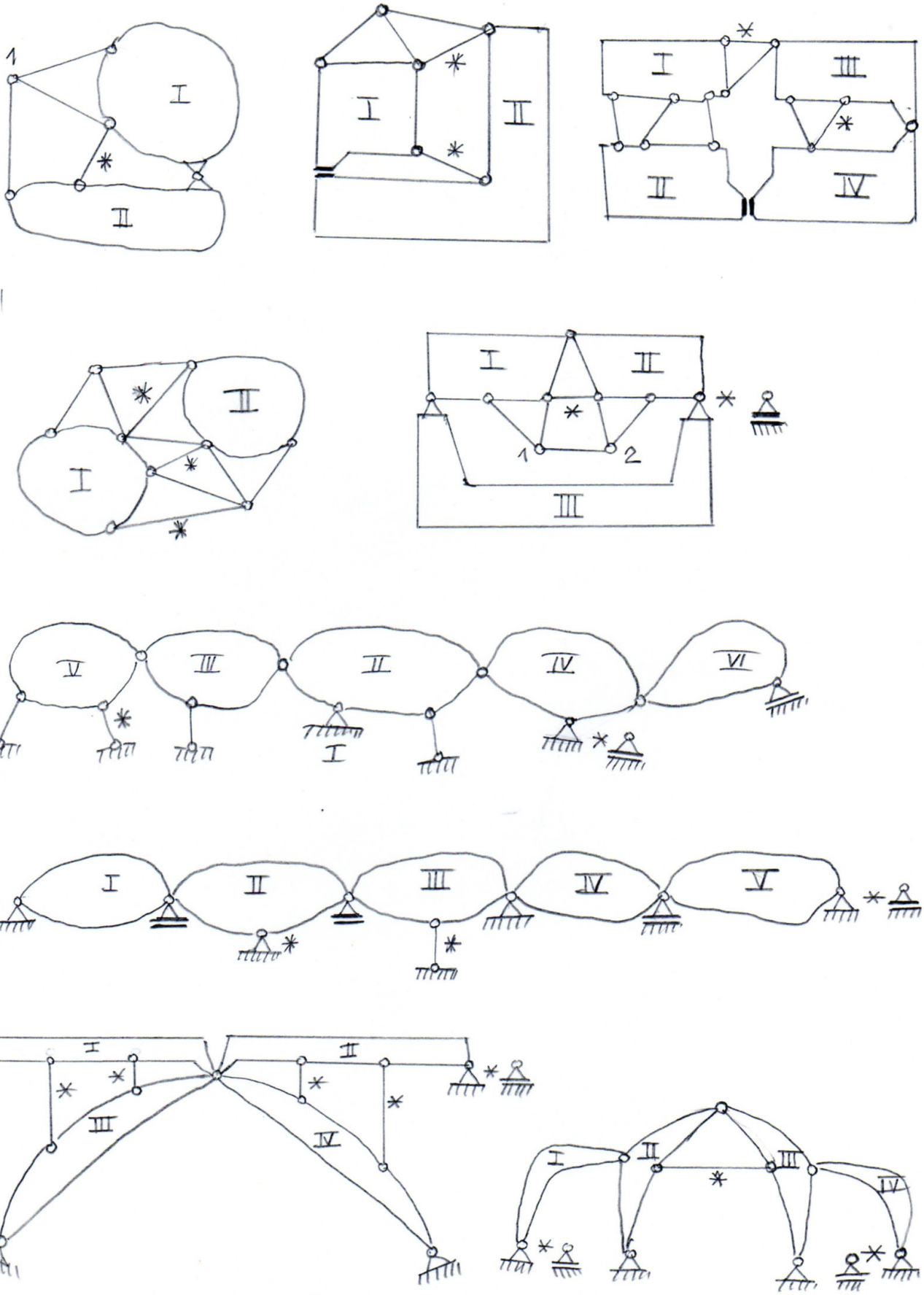
Sistemi koji se svode na ulančene sisteme





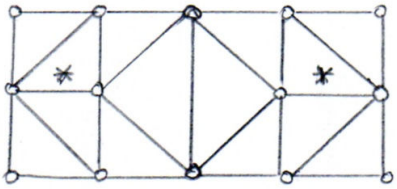


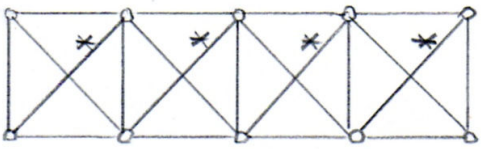
Sa * su označeni spojevi čijim isključivanjem se sistem svodi na odredjeni

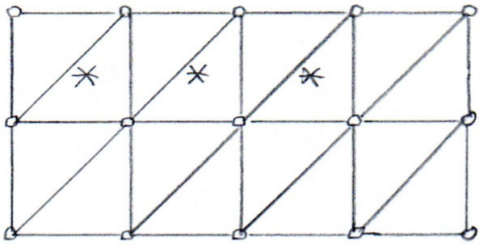


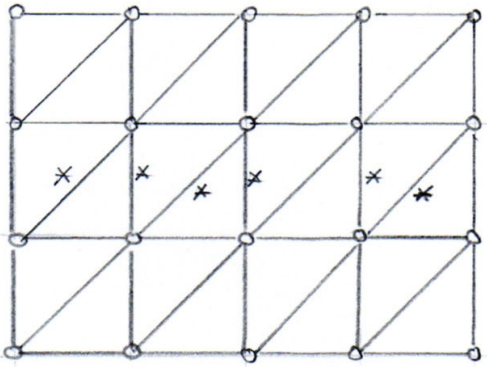
16.02.
HWPK-85-195

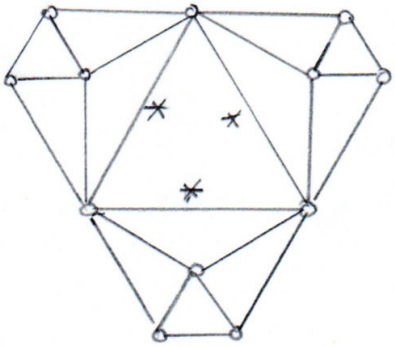
Sa * su označeni spojevi čijim isključivanjem se prikazani ravni preodredjeni spojeni sistem svodi na odredjeni.
Ako je uz znak * ucrtan simbol spoja koji nije uključen u sistem, onda se radi o zamjeni jednostavnijim spojem čiji je simbol prikazan.

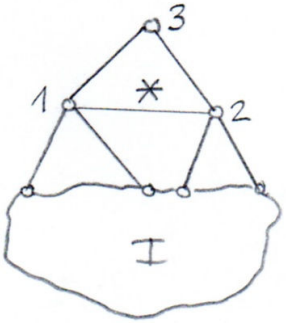


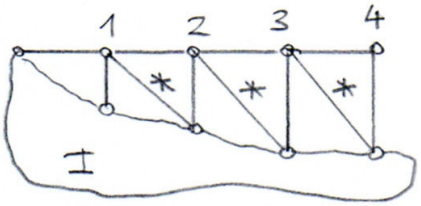


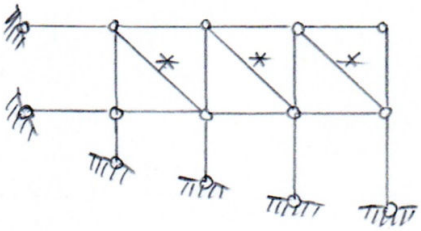


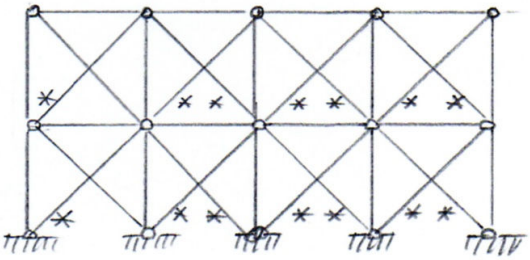


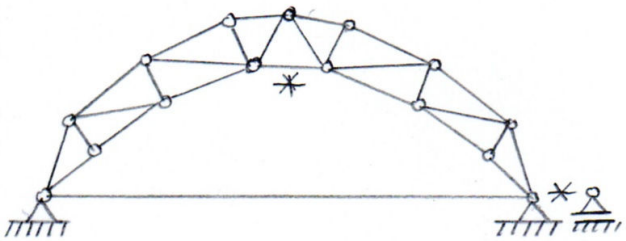






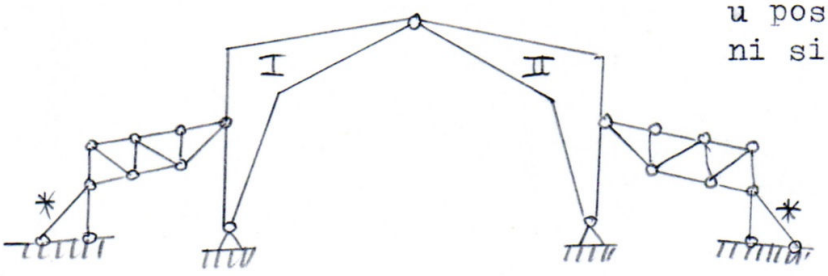






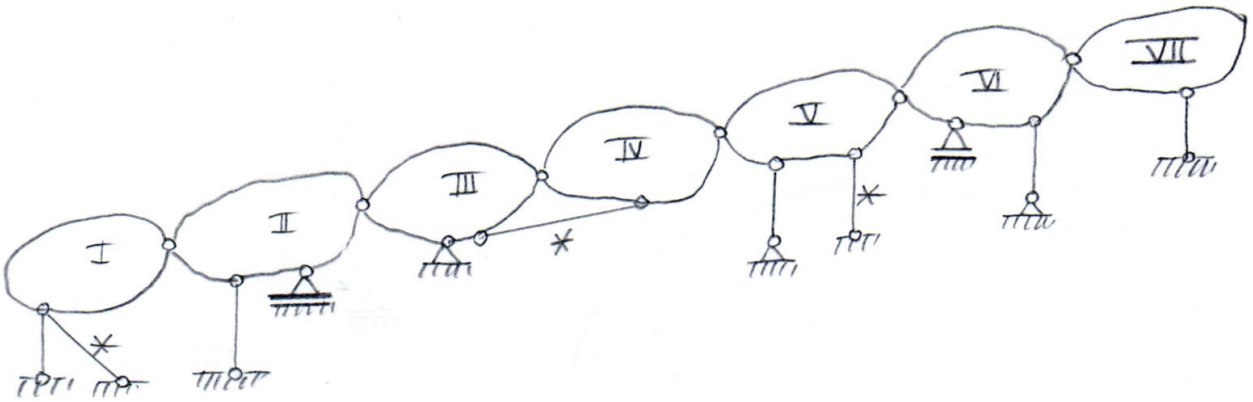
Simbol pomičnog zgloba uz znak ✳ označava da se u postupku svodjenja na odredjeni sistem označeni nepomični zglob mijenja za pomični.

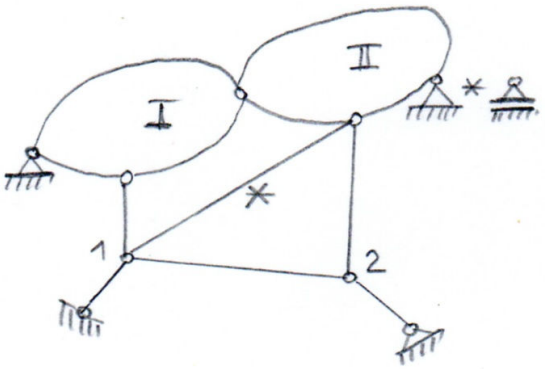
Simbol ✳ uz spoj označava da se u postupku svodjenja na odredjeni sistem, taj spoj isključuje.

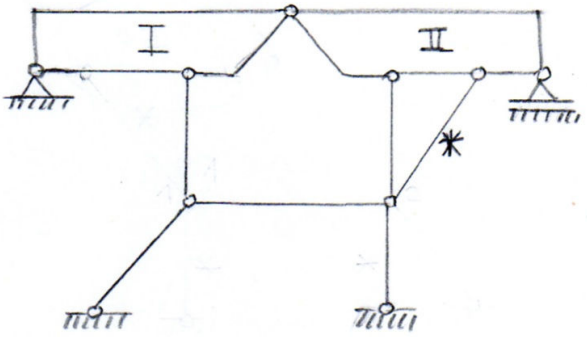


16.02.
HWPK- 85- 196

Preodredjeni ravni spojeni sistemi koji se svode na rekurzivno rješive.



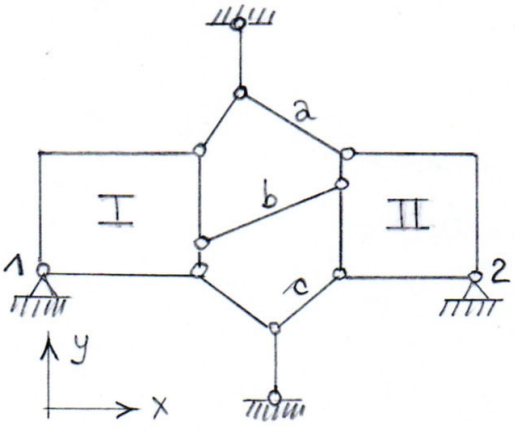




16.02. HWPK-85-197

Preodredjeni ravni spojeni sistemi koji se svode na nepravilni odredjeni sistem

Postupak potpuno odgovara postupku opisanom u općoj klasifikaciji (str.124.); umjesto broja s_0 uvodi se $s_1 = 3t + 2n - 3$.



Kao primjer je odabran sistem prikazan na skici. Sastoji se od dva tijela, sedam zglobnih štapova i podloge. Ukalnjanjem štapa "a" prelazi u sistem koji u osnovi odgovara sistemu obrađenom na str.188, od kojeg se razlikuje samo za prosto spojen čvor 3, pa ako je sistem bez tog čvora odredjen biti će odredjen i sistem s tim čvorom.

Ako je tako dobiven sistem mehanizam, ne znači da je i zadani sistem mehanizam; treba ispitati sve mogućnosti isključivanja jedne reakcije. Ispitati će se sistem koji nastaje isključenjem štapa "b", pa sistem koji nastaje isključenjem štapa "c", te četiri sistema koji nastaju tako da se po jedan od nepomičnih zglobova "1" ili "2" zamijeni pomičnim zglobom, a kod toga postoje dvije mogućnosti, npr. pravac klizanja paralelan s x i pravac klizanja paralelan s y.

Ako je barem jedan od takovih sistema odredjen, znači da je zadani sistem preodredjen. Ako su svi takovi sistemi mehanizmi, slijedi da je i zadani sistem mehanizam, i to mehanizam koji sadrži preodredjenost.

Ravni mehanizmi

Statička definicija: Ravni mehanizam je spojeni sistem, koji ne može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje u ravnini.
Zaključak: Ravni mehanizam je ravni spojeni sistem koji može ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja u ravnini.

Opće svojstvo: Ne ponaša se kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju.

Kinematsko svojstvo: Relativni pomaci nekih točaka sistema mogući i bez deformacije dijelova sistema. Ti pomaci mogu biti konačni ili samo infinitezimalni.

Ravni mehanizmi se dijele na: ravne mehanizme u užem smislu i ravne mehanizme koji sadrže preodredjenost.

HWPK - 85 - 198

Ravni mehanizmi u užem smislu

Statička definicija: Ravni mehanizam u užem smislu je ravni spojeni sistem kojimože ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja u ravnini, a pri tome se sve sile u spojevima mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Statičko svojstvo: kao za odredjeni spojeni sistem.

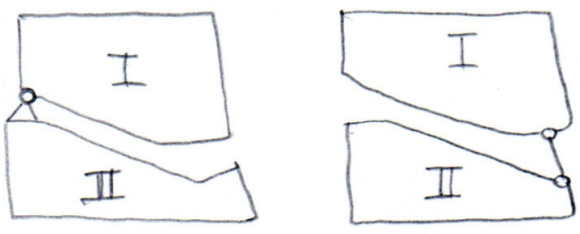
Opće svojstvo: kao za ravni mehanizam.

Kinematsko svojstvo: mogući konačni relativni pomaci nekih točaka sistema bez deformacije dijelova sistema.

DEfinicija pomoću ravnog odredjenog sistema: Ravni mehanizam u užem smislu može se dodavanjem spojeva i/ili zamjenom nekih spojeva složenijim spojevima, upotpuniti na ravni odredjeni spojeni sistem

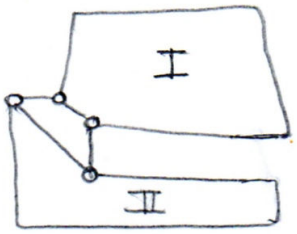
Algebarska formulacija statičke definicije odgovara općem slučaju samo se umjesto s_0 uvodi $s_1 = 3t + 2n - 3$.

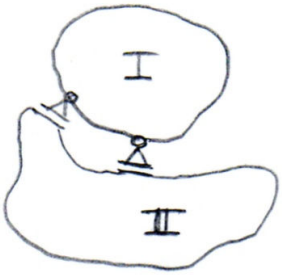
Mehanizmi koji se mogu upotpuniti na prosti spoj



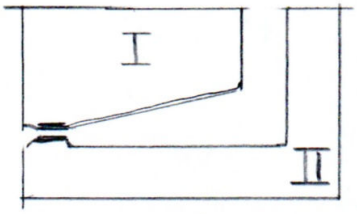
Prikazati će se primjeri koji se upotpunjavaju na primjere ravnih prosto spojenih sistema. Pripadni odredjeni su na str.144. Postupak odredjivanja karakteristike specijalnog opterećenja

prikazan je kod mehanizama prema općoj klasifikaciji i ovdje se ne će prikazivati.

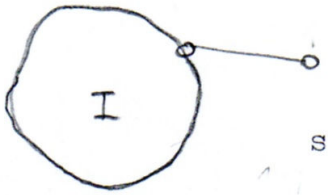




Odredjeni sistemi na koje se prikazani mehanizmi mogu svesti prikazani su na str.144.i 145.

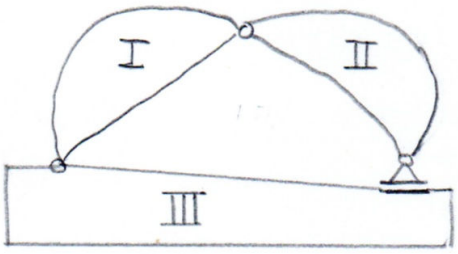


str.147.

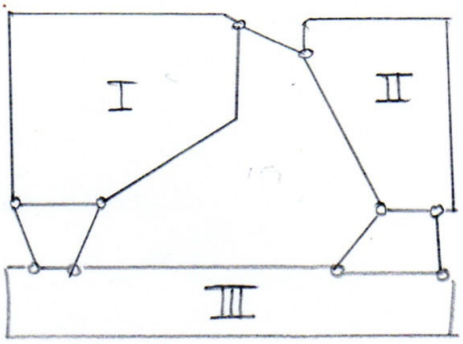


str.149.

Mehanizmi koji se mogu upotpuniti na trozglobni sistem i slične sisteme.



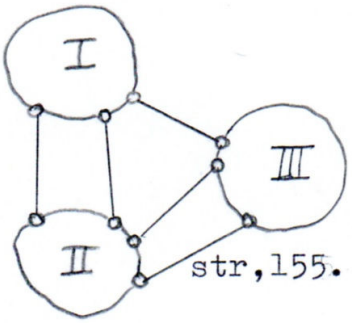
str.151.



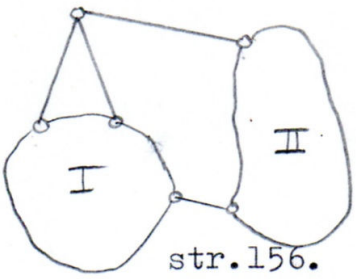
str.152.

16.02.
HWPK-85-199

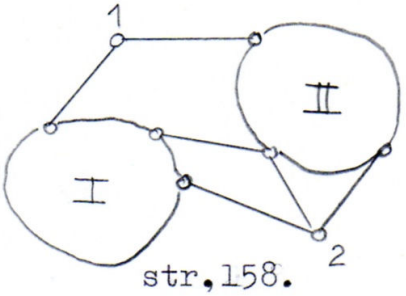
Mehanizmi koji se mogu se mogu upotpuniti na ravne ulančene sisteme.



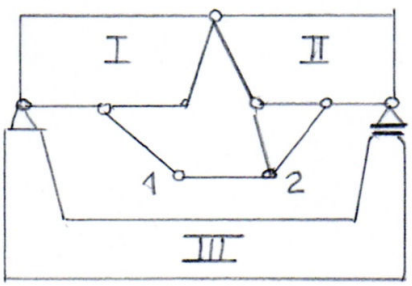
str,155.

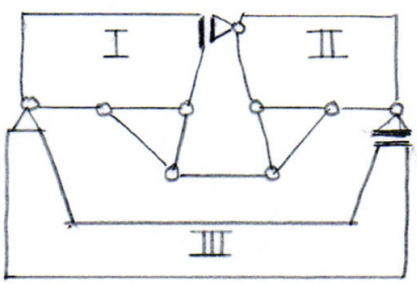


str.156.

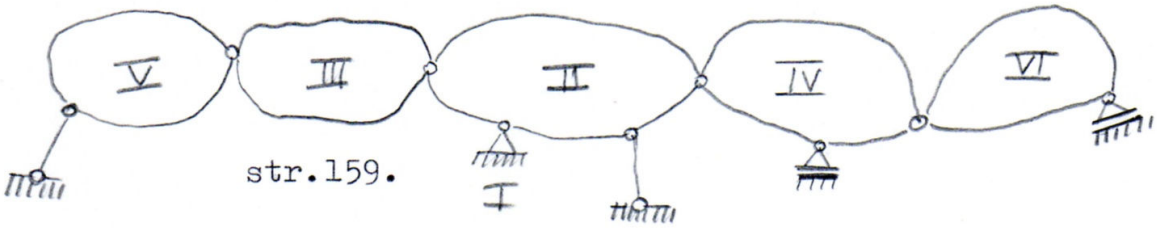


str,158.

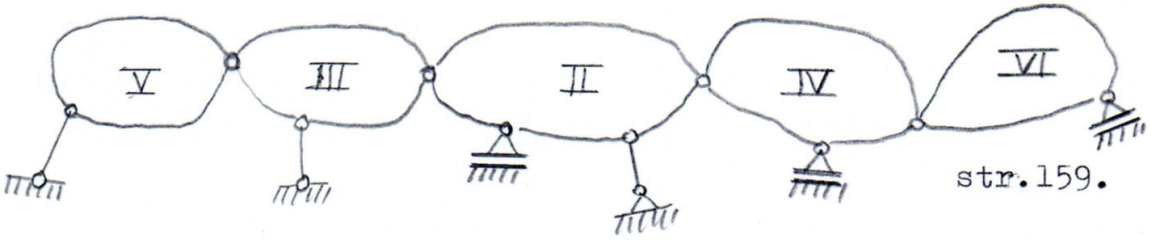




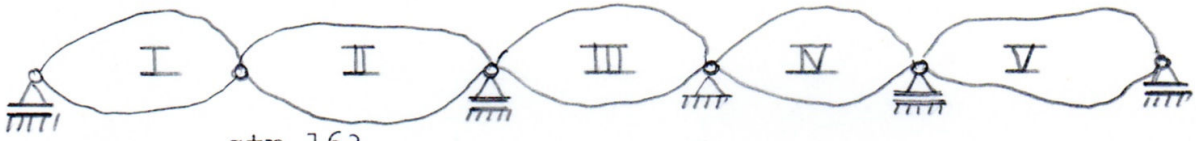
str.158.



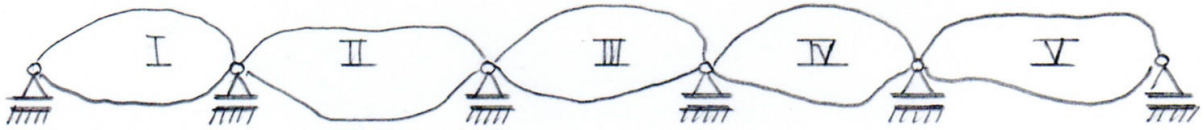
str.159.



str.159.

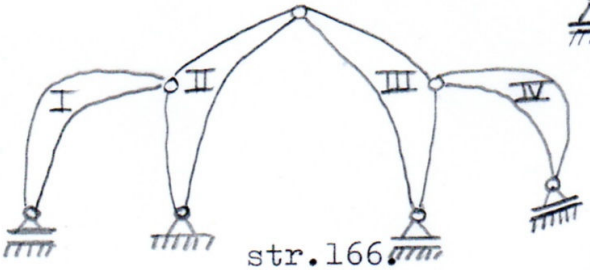


str.163.

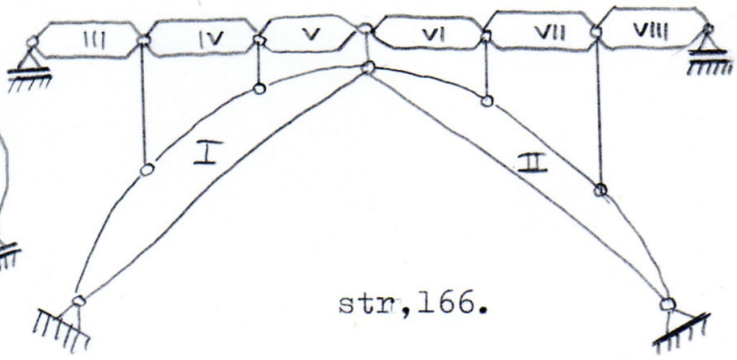


str.163.

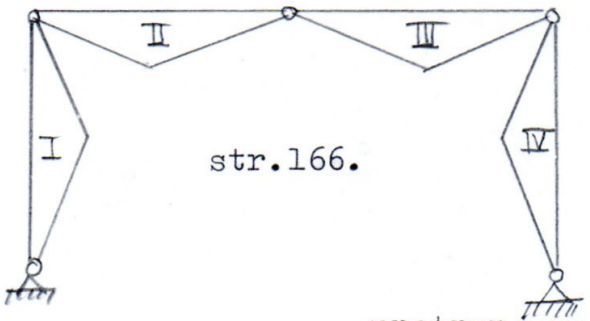
16.02.
HWPK - 85 - 200



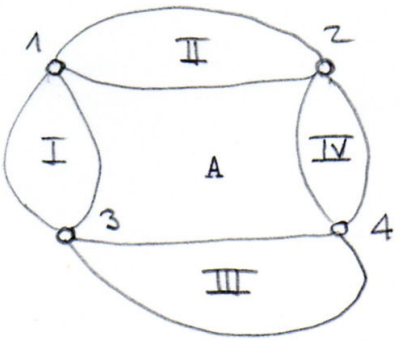
str.166.



str,166.

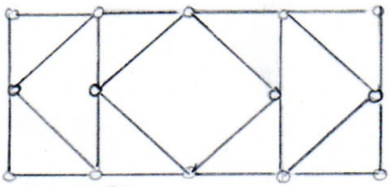


str.166.

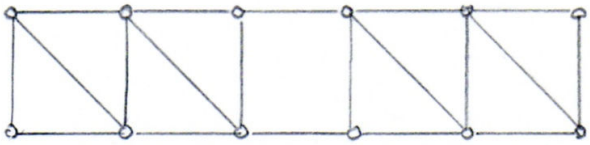


upotpunjava

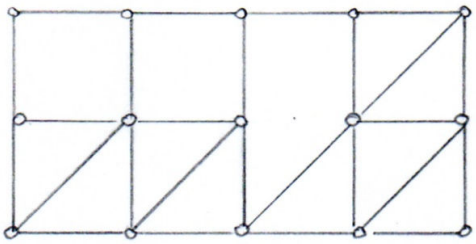
Sistem označen s A se na ulančeni, ako se npr zglobovi 2 i 3 spoje zglobnim štapom: tijela III i IV s tim štapom čine prosto spojeni podsistem, a taj podsistem zajedno s tijelima I i II čini trozglobni sistem.



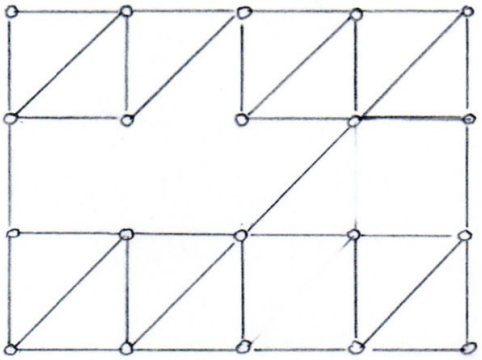
str.167.



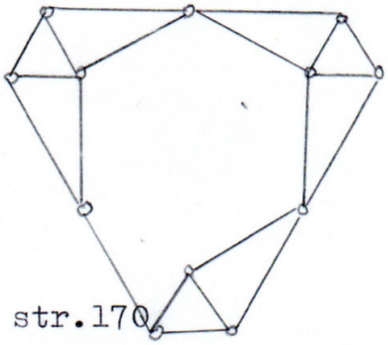
str.167.



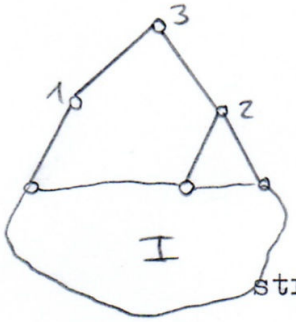
str.170.



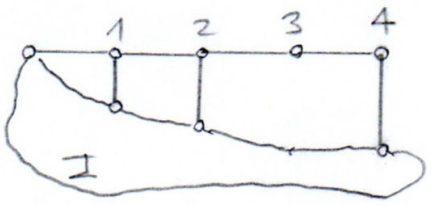
str.170.



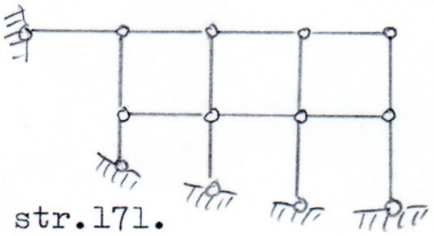
str.170.



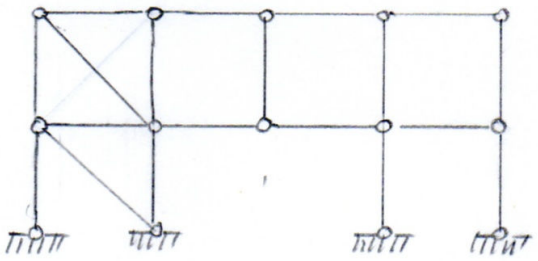
str.171.



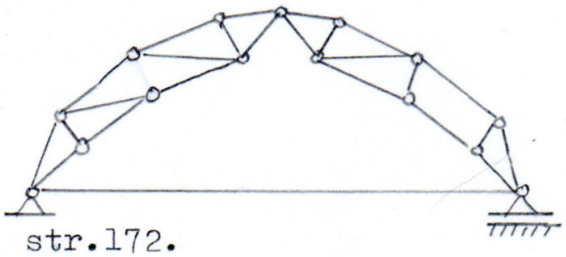
str.171.



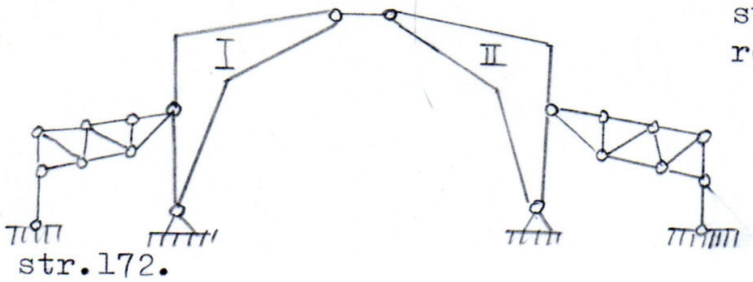
str.171.



str.171.



str.172.

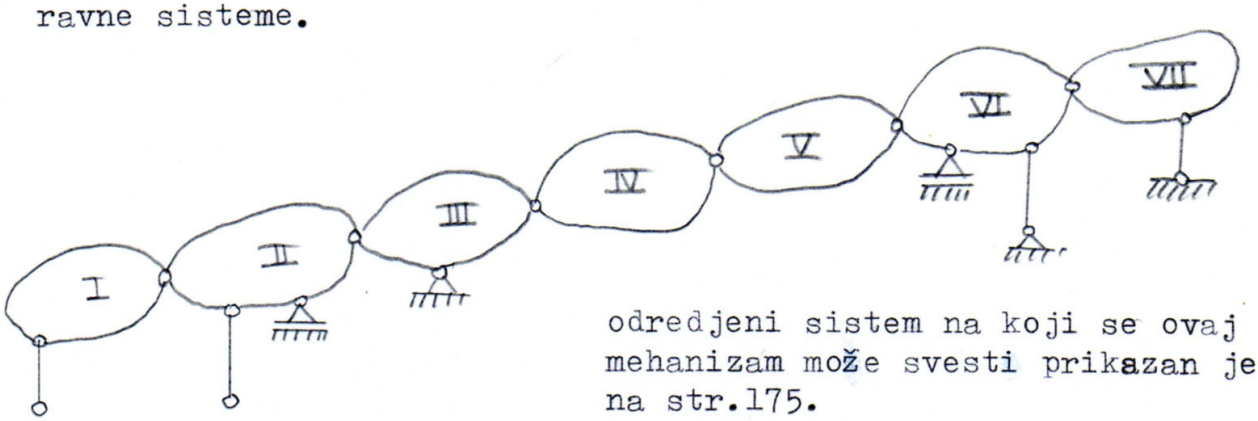


str.172.

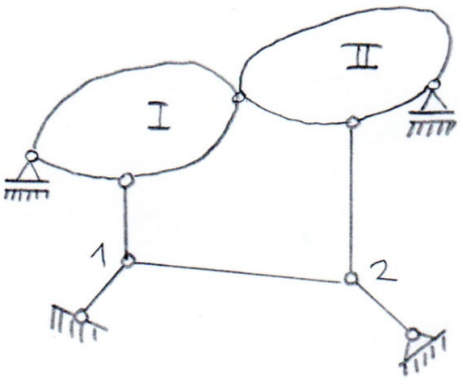
Prikazani su mehanizmi u užem smislu koji se mogu upotpuniti na ulančene rešetke i odredjene sisteme koji su kombinacija tijela i čvorova. Odredjeni sistemi ne koje se ovi mehanizmi mogu upotpuniti prikazani su na stranicama čiji su redni brojevi navedeni uz skice.

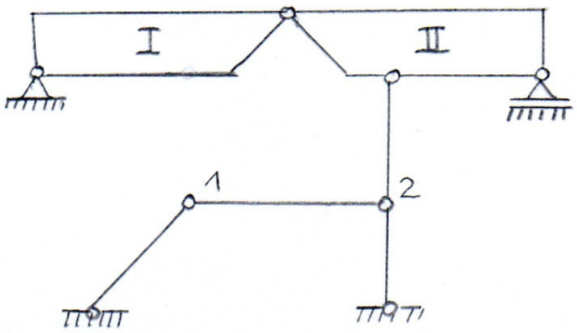
18.02
HWPK-85-201

Ravni mehanizmi koji se svode na rekurzivno rješive ravne sisteme.



odredjeni sistem na koji se ovaj mehanizam može svesti prikazan je na str.175.



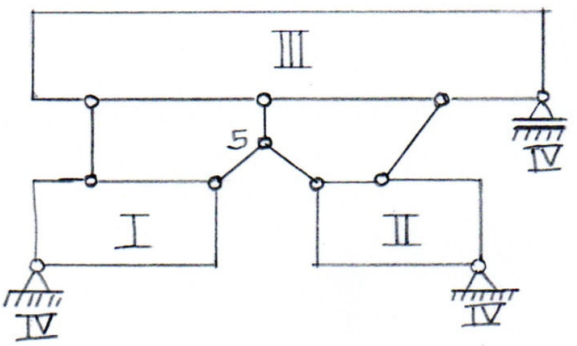


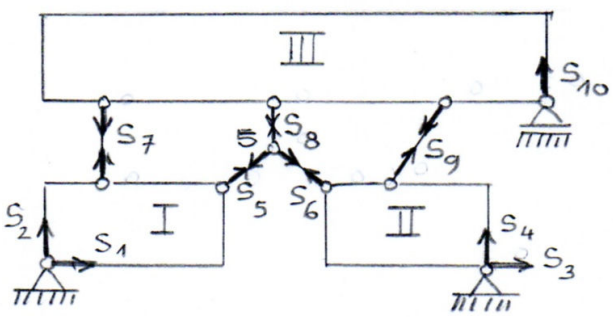
Mehanizmi prikazani na gornjim skicama mogu se svesti na odredjeni sistem prikazan na str.178.

HWPK- 85- 202 18.02

Nepravilni ravni mehanizmi u užem smislu

Nepravilni ravni mehanizam se ne može dodavanjem spojeva svesti ni na elementarni, ni na ulančeni, niti na rekurzivno rješivi sistem, pa ga se može prepoznati samo pomoću općeg algebarskog postupka





Na skici je prikazan primjer nepravilnog ravnog mehanizma. Odabran je primjer sistema koji može biti ravni mehanizam u užem smislu, jer je broj reakcija s=10, manji od broja nezavisnih uvjeta ravnog izoliranog sistema:

$s_1 = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 3 = 11$

Ako pripadni sistem od 11 jednadžbi s 10 nepoznanica sadrži determinantu tipa 10×10 različitu od nule onda je prikazani sistem mehanizam u užem smislu; ako sistem ne sadrži takovu determinantu, onda se radi o mehanizmu koji sadrži preodredjenost.

Primjer za postavljanje jednadžbi prikazan je kod prepoznavanja nepravilnog odredjenog ravnog sistema.

Ravni mehanizmi koji sadrže preodredjenost

Statička definicija: Ravni mehanizmi koji sadrže preodredjenost su ravni spojeni sistemi koji mogu ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja u ravnini, a pri tome se sve sile u spojevima ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Statičko svojstvo: kao za preodredjeni sistem.

Opće svojstvo: kao za ravni mehanizam.

Kinematsko svojstvo: Mogući relativni pomaci nekih točaka sistema bez deformacije dijelova sistema. Ti pomaci mogu biti konačni ili samo infinitezimalni.

Algebarska formulacija statičke definicije odgovara općem slučaju, smo umjesto s_o treba uvesti $s_1 = 3t + 2n - 3$.

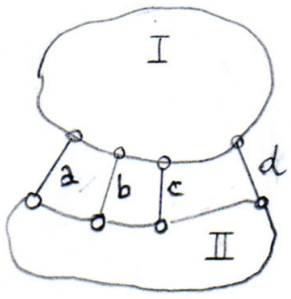
Definicija pomoću ravnog odredjenog sistema: Ravni mehanizam koji sadrži preodredjenost je onaj ravni spojeni sistem koji se samo isključivanjem nekih spojeva i dodavanjem novih spojeva može svesti na ravni odredjeni spojeni sistem. Umjesto ili uz isključivanje može se koristiti i zamjena nekog spoja jednostavnijim. Umjesto dodavanja ili uz dodavanje može se koristiti i uvodjenje složenijih spojeva.

Primjeri mehanizama koji sadrže preodredjenost su prikazani uz statički odredjene sisteme kao ilustracija uvjeta odredjenosti tih sistema.

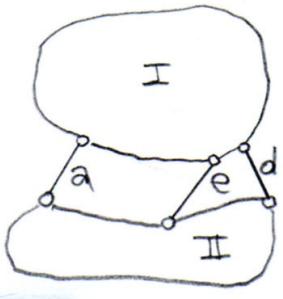
Kod prikazivanja mehanizama koji sadrže preodredjenost koristiti će se simboli uvedeni za prikazivanje preodredjenih sistema. Mogućnost svodjenja na odredjeni sistem će se prikazati znakom ✳ za spojeve koje treba isključiti, odnosno znakom ✳ i simbolom spoja za spojeve koji će se pri svodjenju zamijeniti bilo jednostavnijim, bilo složenijim spojem. Navesti će se i redni broj stranice na kojoj je pripadni odredjeni sistem uveden.

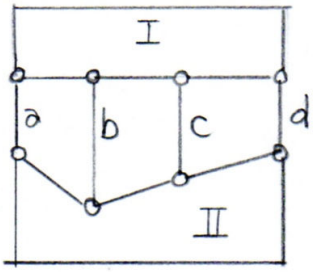
18.02 HWPK-85- 203

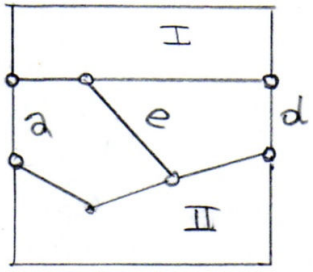
Mehanizmi koji se mogu svesti na prosti spoj

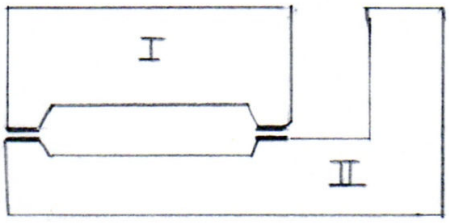


Mehanizmi prikazani na lijevoj strani mogu se uz isključenje štapova označenih s "b" i "c", te dodavanjem štapa "e" svesti na odredjene sistem, prikazane na desnoj strani.

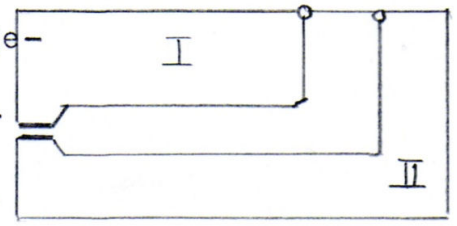


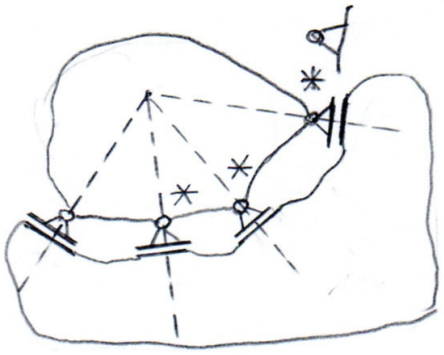




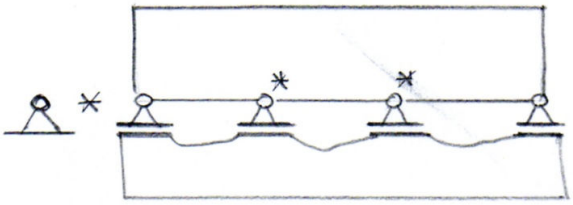


Mehanizam na lijevoj skici može se svesti ne odredjeni sistem na desnoj skici. (str.147).

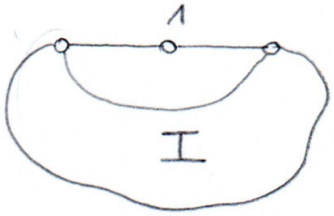




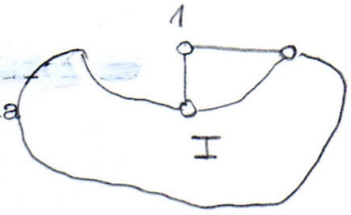
str.144



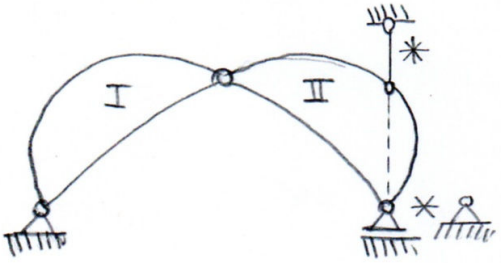
str.144.

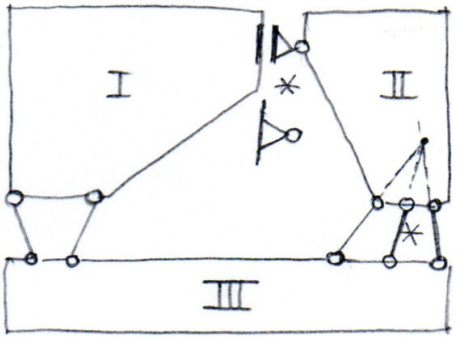


Mehanizam na lijevoj skici može se svesti na odredjeni sistem na desnoj skici(str.149).

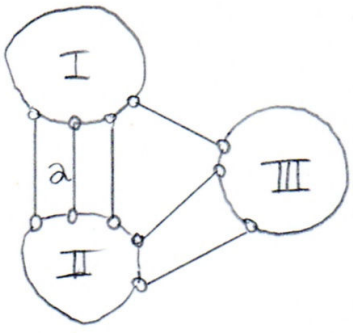


Mehanizmi koji se mogu svesti na trozglobni sistem i slične sisteme.

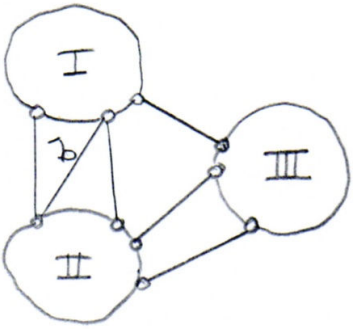




Mehanizmi koji se mogu svesti na ravne ulančene sisteme



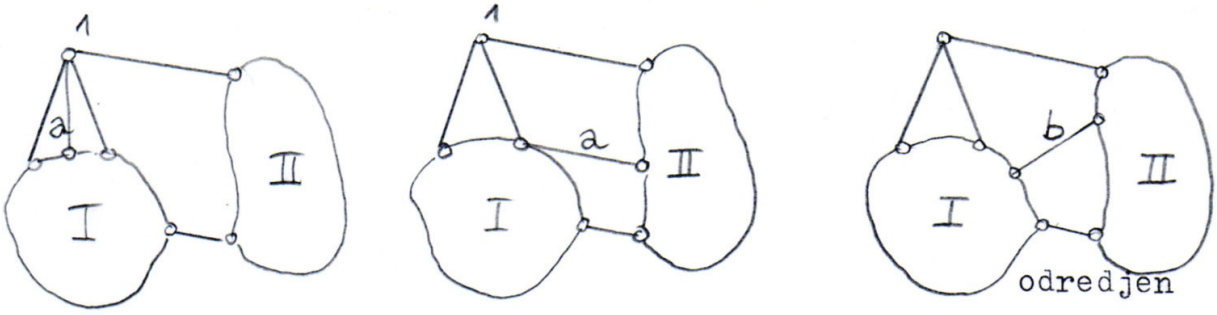
Sistem na lijevoj skici se uklanjanjem štapa "a" i uvodjenjem štapa "b" može svesti na ulančeni sistem. Podsistem(I+II) je mehanizam koji sadrži preodredjenost, Tijelo III je na taj podsistem vezano prostim



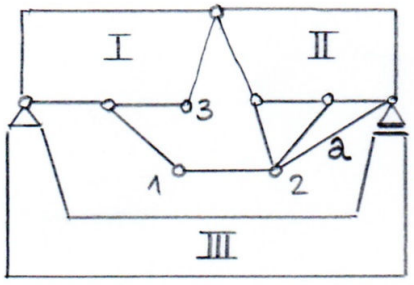
spajanjem, što znači;da je podsistem (I+II) geometrijski nepromjenjiv i cijeli sistem bi bio nepromjenjiv. Prosto spajanje ne sprečava deformaciju pojedinih dijelova, pa tri štapa s kojima je povezano tijelo III ne sprečavaju mehanizam (I+II) u njegovoj mogućnosti pomicanja. Slijedi da je cijeli sistem mehanizam, a zbog preodredjenosti u spajanju tijela I i II, to je mehanizam

18.02.
HWPK-95-204

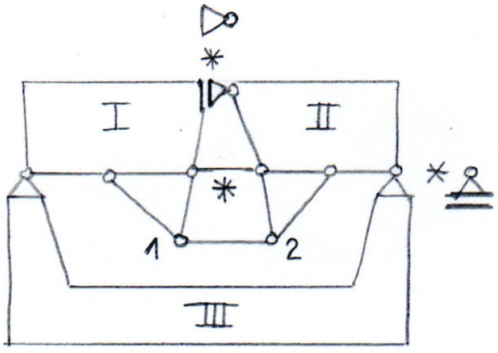
koji sadrži preodredjenost.



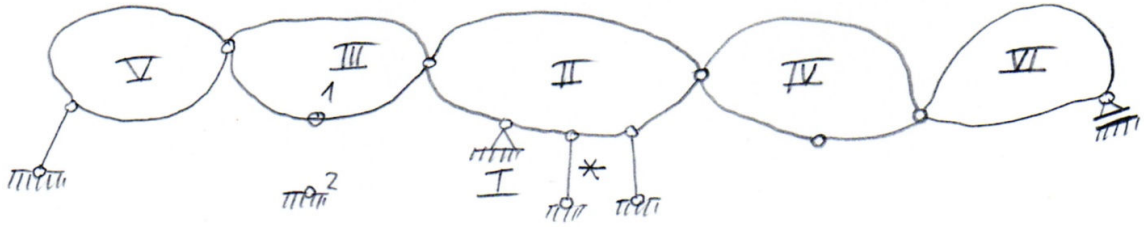
Na gornjoj lijevoj i srednjoj skici prikazani su mehanizmi koji sadrže preodredjenost. Oba sistema se, uklanjanjem štapa "a" i dodavanjem štapa "b" mogu svesti na ulančeni, dakle odredjeni sistem, koji je prikazan na skici gore desno.



Prikazani sistem je mehanizam koji sadrži preodredjenost, jer se samo uklanjanjem jednog od štapova koji povezuju tijelo II i čvor 2, te dodavanjem nekog daljnjeg spoja, može prevesti u odredjeni. Prema tome, ako se isključi štap "a" i uvede štap izmedju točaka 1 i 3 dobiva se odredjeni sistem prikazan na str.158.

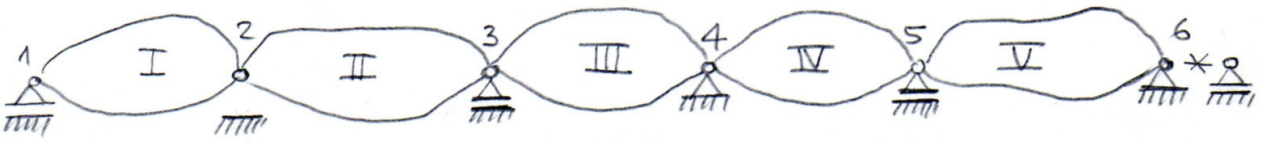


Prikazan je sistem kod kojeg su podsistemi (I+1) i (II+2) odredjeni. Spoj tih podsistema je mehanizam koji sadrži preodredjenost; izmedju podsistema se prenose tri paralelne sile. Spajanje s dva nepomična zgloba čija je spojnica paralelna s silama u spojevima izmedju podsistema (I+1) i (I+2) vodi na mehanizam, kao što je prikazano na str,153. Promjene koje su simbolički prikazane na skici vode na odredjeni sistem prikazan na str.158.

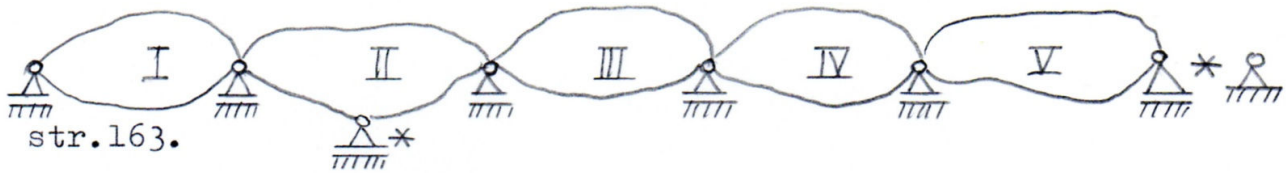


Uklanjanjem označenog štapa i uvodjenjem novog štapa i medju točaka 1 i 2 može se prikazani sistem svesti na odredjen sistem (str.159).

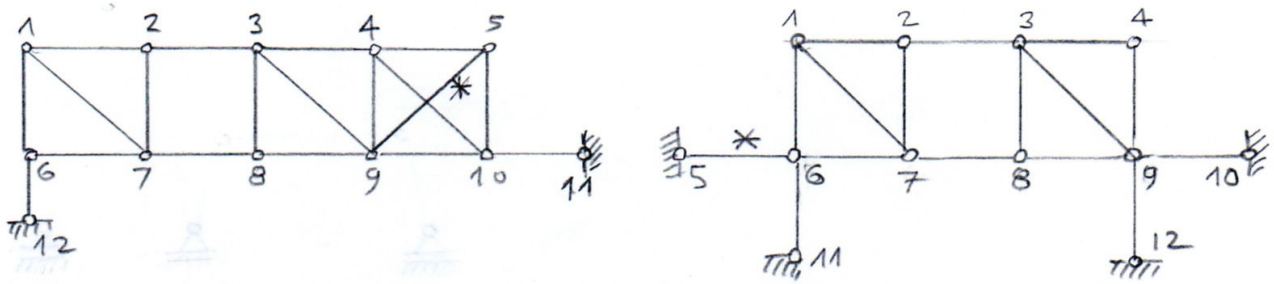
1302
HWPK - 85 - 205



Sistem prikazan na gornjoj skici može se zamjenom nepomičnog zgloba 6 pomičnim i uvodjenjem pomičnog zgloba izmedju 2 i podloge, svesti na odredjeni sistem. (str.163)



str.163.



Rešetke prikazane na gornjoj skici su mehanizmi koji sadrže preodredjenost. Uklanjanjem označenog štapa i uvodjenjem štapa izmedju čvorova 2 i 8 svode se na odredjene sisteme.

18.02. HWPK - 85 - 206

Nepravilni ravni mehanizmi koji sadrže preodredjenost

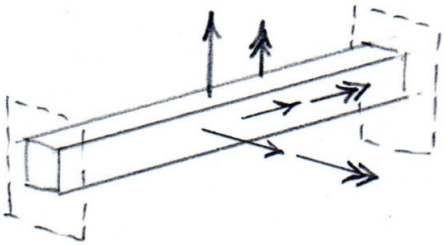
Nepravilni ravni mehanizam koji sadrži preodredjenost se može prepoznati samo pomoću općeg algebarskog postupka. Treba ustanoviti broj nezavisnih uvjeta ravnoteže pripadnog izoliranog ravnog mehaničkog sistema $s_1 = 3t + 2n - 3$. Ako koeficijenti uz reakcije sadrže najveću determinantu tipa $r \times r$ koja je različita od nule a pri tome vrijedi $r < s_1$ i broj reakcija $s > r$, onda je promatrani sistem mehanizam koji sadrži preodredjenost.

Pregled opće klasifikacije i rješavanja ravnih spojenih sistema algebarskim postupkom

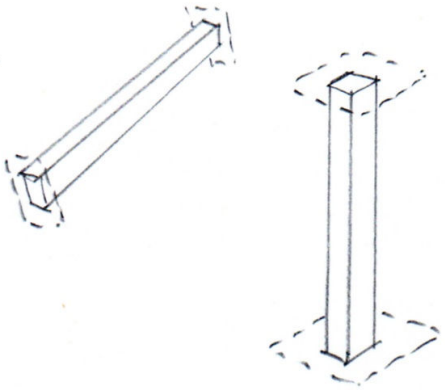
Pregled se može sastaviti potpuno analogno pregledu opće klasifikacije (str.134) ali umjesto s_0 treba u sve izraze uvesti $s_1 = 3t + 2n - 3$.

Osnovno o oblicima konstruktivnih elemenata

Većina konstrukcija se sastoji od elemenata čiji se oblici i funcija mogu svrstati u nekoliko tipova. Ovdje će se navesti osnovni oblici koji se pojavljuju u gradjevinarstvu. Nazivi elemenata su tradicionalni pa ne pripadaju jedinstvenom sistemu: neki se osnose na oblik, neki na orjentaciju u prostoru, a neki na tip opterećenja koji će pretežno taj element prenositi.

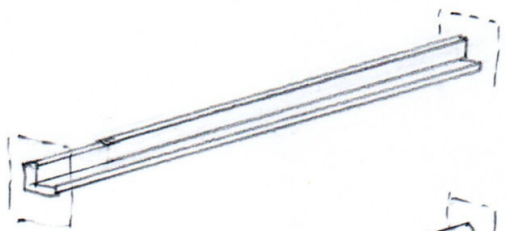


Greda je štapni element koji spaja dvije točke ostatka sistema. Os je horizontalna ili približno horizontalna. Prenosi proizvoljno opterećenje.

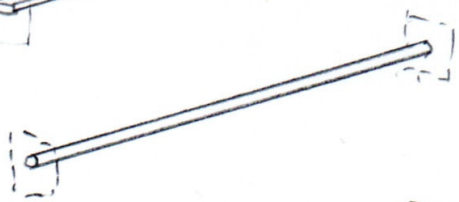


Kosnik je po funkciji i obliku sličan gredi, ali mu je os nagnuta prema horizontali.

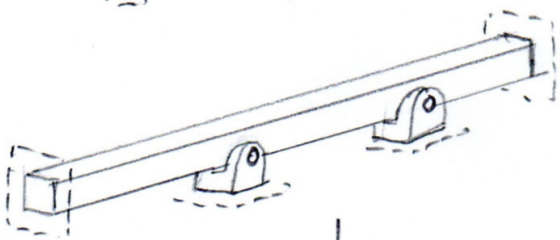
Stup je po funkciji i obliku sličan gredi: os mu je vertikalna.



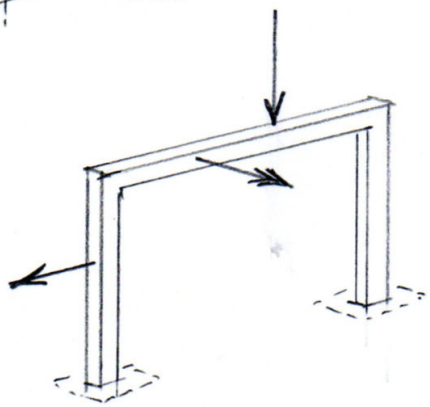
Aksijalni element je štapni element namijenjen pretežno prenosu uzdužnih sila: ostala opterećenja su bitno manja. Vitkiji je od greda.



Zatega je specijalni slučaj aksijalnog elementa; namijenjena je samo prenosu vlačne sile, pa može biti izvedena i kao žica.

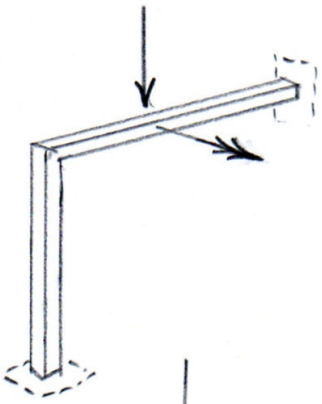


Kontinuirana greda je štapni element koji je na tri ili više točaka spojen s ostatkom sistema. Svi spojevi osim krajnjih su zglobni. Dio grede izmedju dva susjedna spoja s ostatkom sistema naziva se polje.



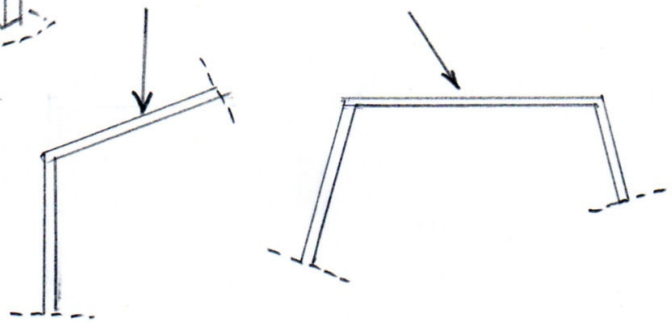
Okvir je ravan štapni sistem namijenjen pretežno prijenosu sila u ravnini. Sastoji se od dva stupa i grede, koja se u ovom slučaju može nazivati i prečka.

HWPK-85-207

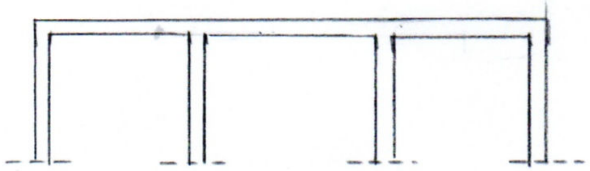


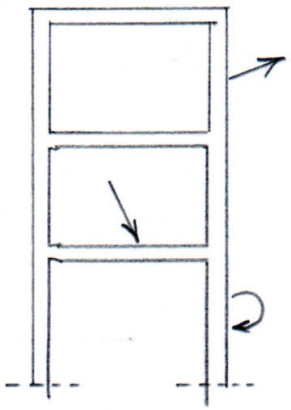
Poluokvir se sastoji od stupa i grede. Funkcija odgovara okviru.

Okvir i poluokvir mogu imati i kose stupove i/ili grede.

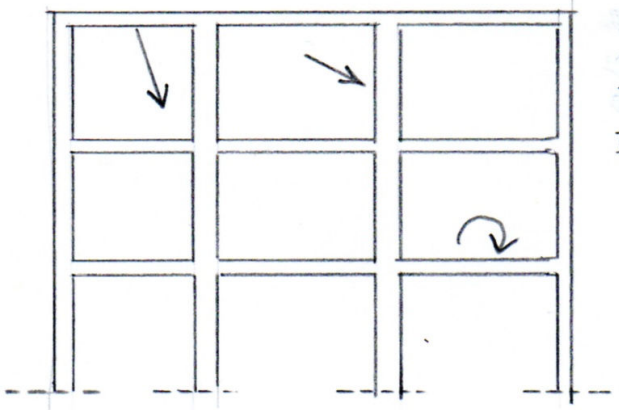


Okvir s više polja.
Funkcija odgovara okviru.



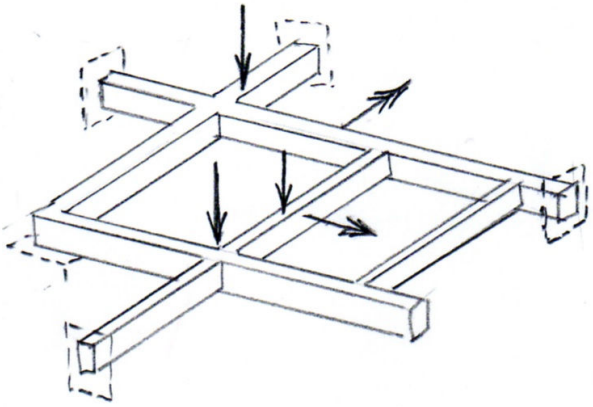


Višekatni okvir ima dva stupa i dvije ili više prečki.
Funkcija odgovara okviru

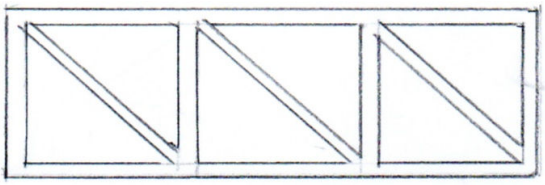


Višekatni okvir s više polja.
Funkcija odgovara funkciji okvira.

HWPK-85-208

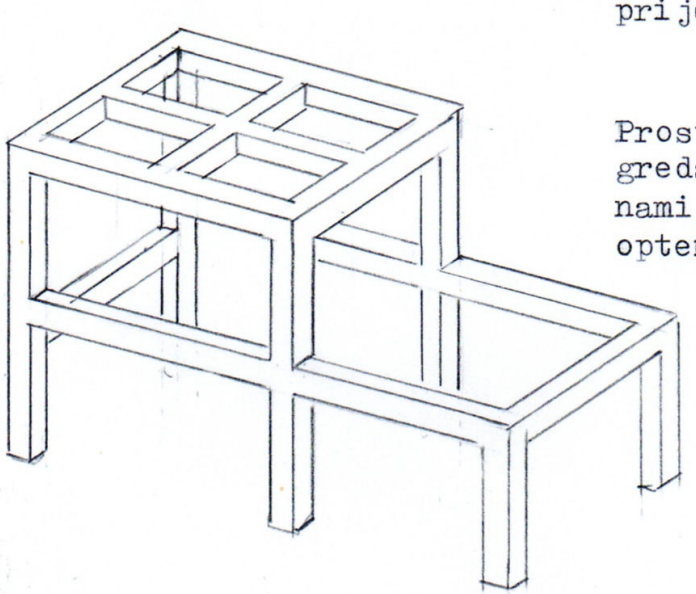


Roštilj je sastavljen od greda u istoj ravnini, a namijenjen je pretežno prijenosu sila okomitih na tu ravninu i momenata čiji vektori leže u ravnini.

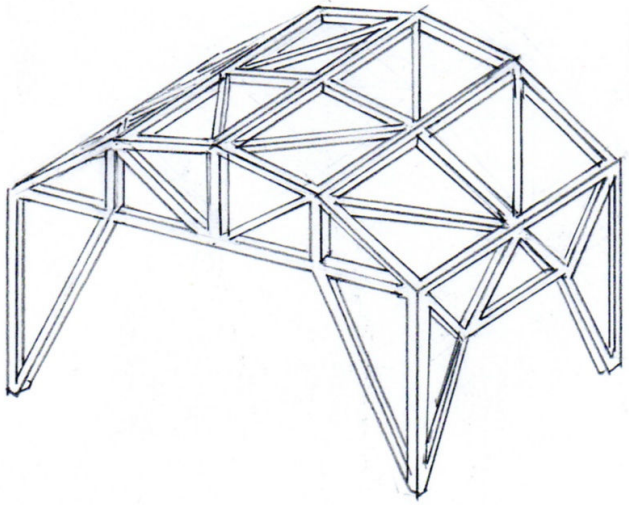


Rešetka je sastavljena od aksijalnih elemenata, a razlikuje se od okvira po tome što je idealni sistem koji se dobiva zamjenom svih čvorova kuglastima, geometrijski nepromjenjiv. Namijenjen je pretežno prijenosu sila u ravnini.

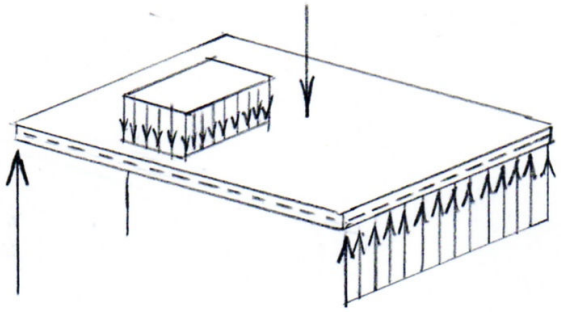
HWPK - 85 - 209



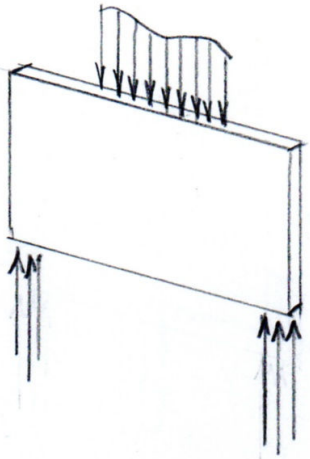
Prostorni okvir je sastavljen od greda, stupova i kosnika; može biti namijenjen prijenosu proizvoljnog opterećenja u prostor.



Prostorna rešetka je sastavljena od aksijalnih elemenata. Ako bi se čvorovi zamijenili idealnim kuglastim, sistem bi ostao geometrijski nepromjenjiv. Može biti namijenjena prijenosu proizvoljnog opterećenja u prostoru.

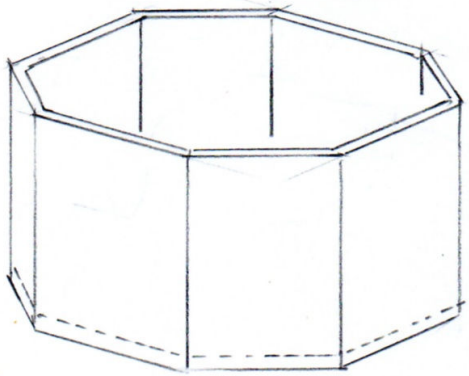


Ploča je konstruktivni element, koji ima jednu specifičnu ravninu simetrije, takovu da je najveća dimenzija ploče mjerena okomito na tu ravninu bitno manja od preostalih dviju dimenzija.
Ploča je namijenjena prenosu sila okomito na tu ravninu.
Specifična ravnina simetrije se naziva srednja ravnina ploče.



Stijena je konstruktivni element jednak ploči, ali namijenjen prijenosu sila u srednjoj ravnini.

Poliedarski element je konstruktivni element jednak ploči, a namijenjen je prijenosu proizvoljnih sila, dakle ima funkciju ploče i stijene.



Poliedarski sistem ili poliedarska ljuska je konstrukcija sastavljena od poliedarskih elemenata.
Namijenjen je prijenosu proizvoljnih sila.



Ljuska je plošni konstruktivni element koji se slično ploči definira pomoću srednje plohe koja je zakrivljena. Najveća dimenzija ljuske mjerena okomito na srednju plohu, bitno je manja od najveće duljine presjeka te plohe s nekom ravninom. Namijenjena je prijenosu proizvoljnih sila.

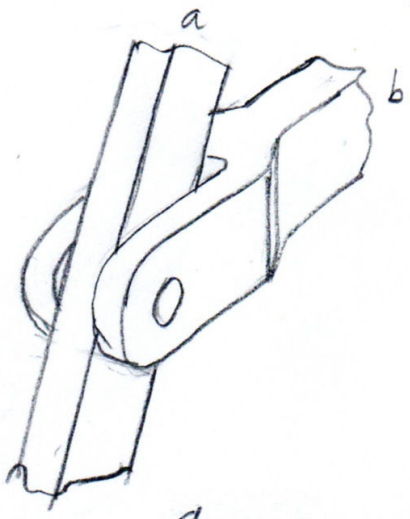
HWPK-85-210

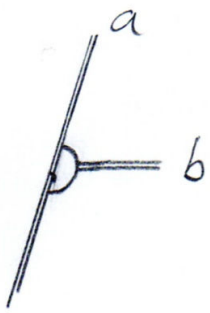
Štapni sistemi

Štapni sistem čini jedan štap ili sistem spojen u točkama,u kojemu su sva tijela štapni elementi, a može sadržavati čvorove i/ili podlogu.

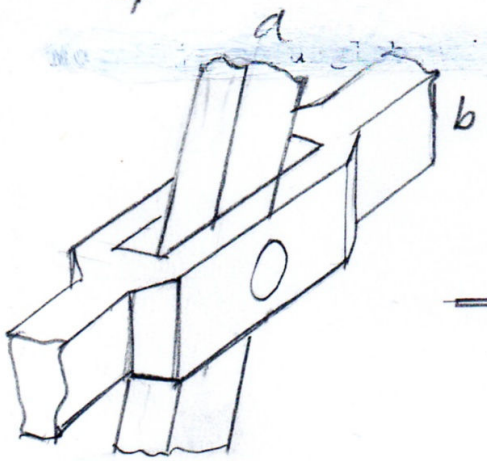
Štapni sistemi se na planu položaja ucrtavaju tako, da se osi štapnih elemenata unose debelom linijom ili sa dvije bliske tanke linije. Koriste se poznati simboli za spojeve u točkama. Uvodi se novi simbol: poluzglob.

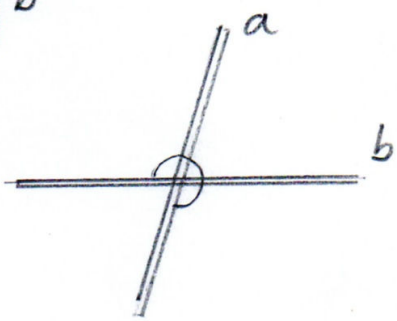
Poluzglob je zglob koji se ne nalazi na kraju štapa.



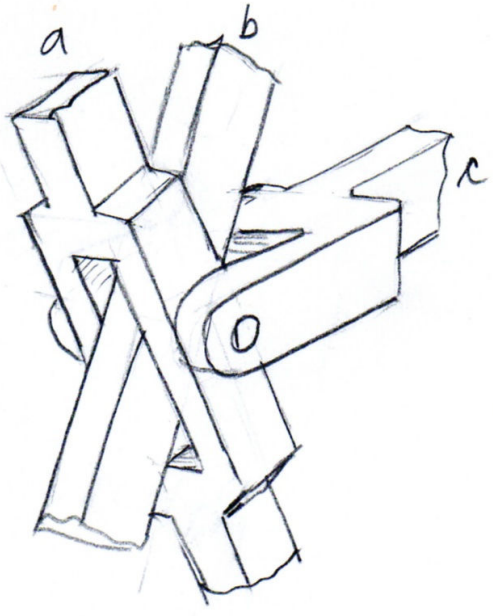


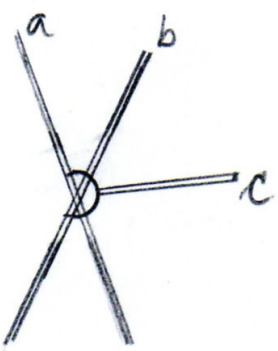
simbol poluzgloba na kraju jednog štapa i u unutrašnjosti drugog štapa.





simbol poluzgloba koji spaja unutrašnje dijelove dvaju štapova.





simbol višestrukog poluzgloba.

HWPK-85-211

Rješavanje štapnih sistema je odredjivanje sila u spojevima i odredjivanje reznih sila za sve presjeke svih štapova.

Ponoviti će se:
Rezne sile čine: moment torzije, momenti savijanja, uzdužna sila i poprečne sile.
Prikazivanje reznih sila u svim presjecima je moguće: postavljanjem analitičkih izraza ili crtanjem dijagrama.

Štapni sistemi će se podijeliti na : štapne odredjene, štapne preodredjene, štapne mehanizme u užem smislu i štapne mehanizme koji sadrže preodredjenost. Klasifikacija će se zasnivati na mogućnosti preuzimanja proizvoljnog opterećenja i mogućnosti statičkog rješavanja sistema.

Štapni sistem može biti specijalni slučaj spojenog sistema, pa se u tom slučaju može klasificirati i kao spojeni i kao štapni; pripadnost će u nekim slučajevima biti jednaka, a u nekim različita.

Različita pripadnost je moguća samo, ako je štapni sistem ujedno i odredjeni spojeni sistem ili mehanizam u užem smislu. Ako se u tim slučajevima pojavljuju zatvoreni štapovi i/ili unutarnji spojevi, pripadati će promatrani sistemi preodredjenim štapnim sistemima ili štapnim mehanizmima koji sadrže preodredjenost.

Ponoviti će se:
Unutarnji spojevi su spojevi koji spajaju dijelove istog tijela.

Opća klasifikacija štapnih sistema

Opća klasifikacija štapnih sistema se zasniva na mehaničkim svojstvima koja su definirana u prostoru, pa bi se mogla nazvati i "klasifikacija štapnih sistema prema djelovanju u prostoru".

U teoriji štapnih sistema se često uvodi pojam prostornih štapnih sistema, koji se odnosi na analizu svojstava u prostoru.

Naziv "prostorni štapni sistem" nije ovdje upotrijebljen jer su i ravni sistemi prostorne tvorevine, koje imaju mehanička svojstva vezana na jednu istaknutu ravninu, pa ima smisla uvodjenje odgovarajuće klasifikacije. Ravni štapni sistemi se mogu klasificirati i prema općoj klasifikaciji štapnih sistema, jer kao prostorne tvorevine imaju svojstva definirana u prostoru.

Opća klasifikacija štapnih sistema se zasniva na dva svojstva:
a) vrsta povezanosti: postavlja se pitanje da li se sistem ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju ili ne.
b) mogućnost rješavanja: postavlja se pitanje da li se sistem može riješti samo pomoću uvjeta ravnoteže.

HWPL- 85- 212

Štapni sistem će se ponašati kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju, ako:

- se sastoji samo od jednog štapa
- je geometrijski nepromjenjiv spojeni sistem kojemu su sva tijela štapni elementi

Rezne sile će se moći odrediti iz uvjeta ravnoteže, ako su zadovoljeni slijedeći uvjeti:

- sve sile u spojevima se mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže
- sva tijela sistema su otvoreni štapovi
- ne postoje unutarnji spojevi

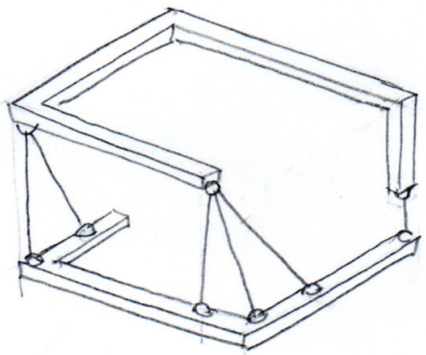
Odredjeni štapni sistemi

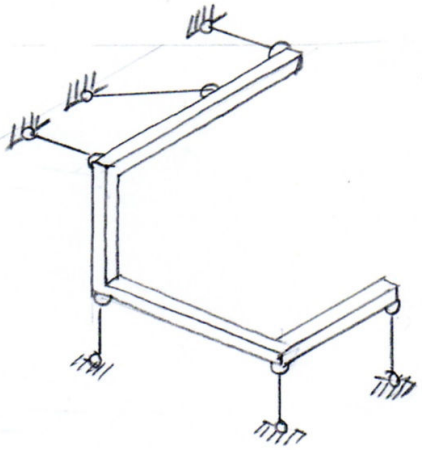
Statička definicija: Odredjeni štapni sistem je štapni sistem, koji može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje, a sve rezne sile se mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

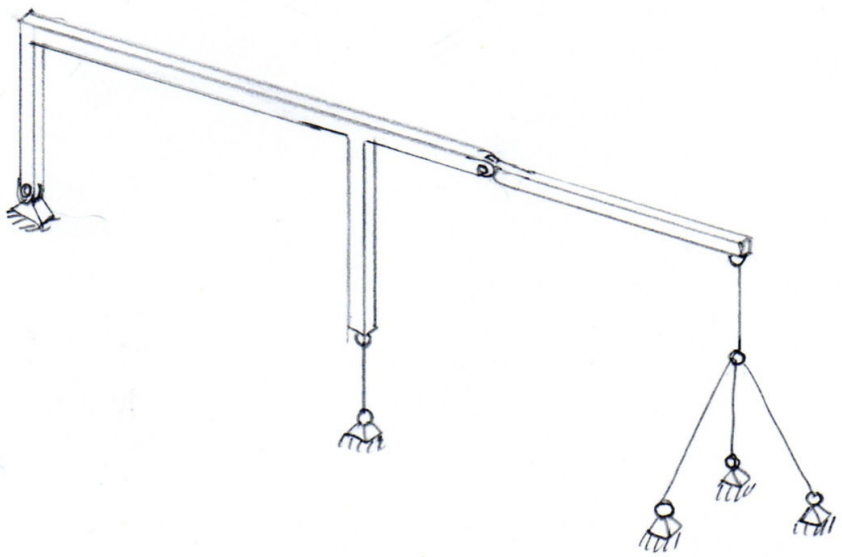
Zaključak: Odredjen štapni sistem sadrži samo otvorene štapove, ne sadrži unutarnje spojeve i može biti samo odredjen spojeni sistem.

Iz svih prikazanih primjera odredjenih spojenih sistema mogu se lako izvesti primjeri odredjenih štapnih sistema, tako da sva tijela u tim sistemima budu otvoreni štapovi bez unutarnjih spojeva

HWPK - 85 - 213







Preodredjeni štapni sistemi

Statička definicija: Preodredjeni štapni sistem je štapni sistem koji može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje, ali se sve rezne sile ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Definicija preodredjenog štapnog sistema pomoću odredjenog štapnog sistema: Preodredjeni štapni sistem sadrži barem jedan odredjeni štapni sistem, t.j. preodredjeni štapni sistem se može; isključivanjem spojeva,i/ili zamjenom spojeva jednostavnijim spojevima i/ili presjecanjem štapova, svesti na barem jedan odredjeni sistem.

Zaključak: Preodredjeni štapni sistem može biti:

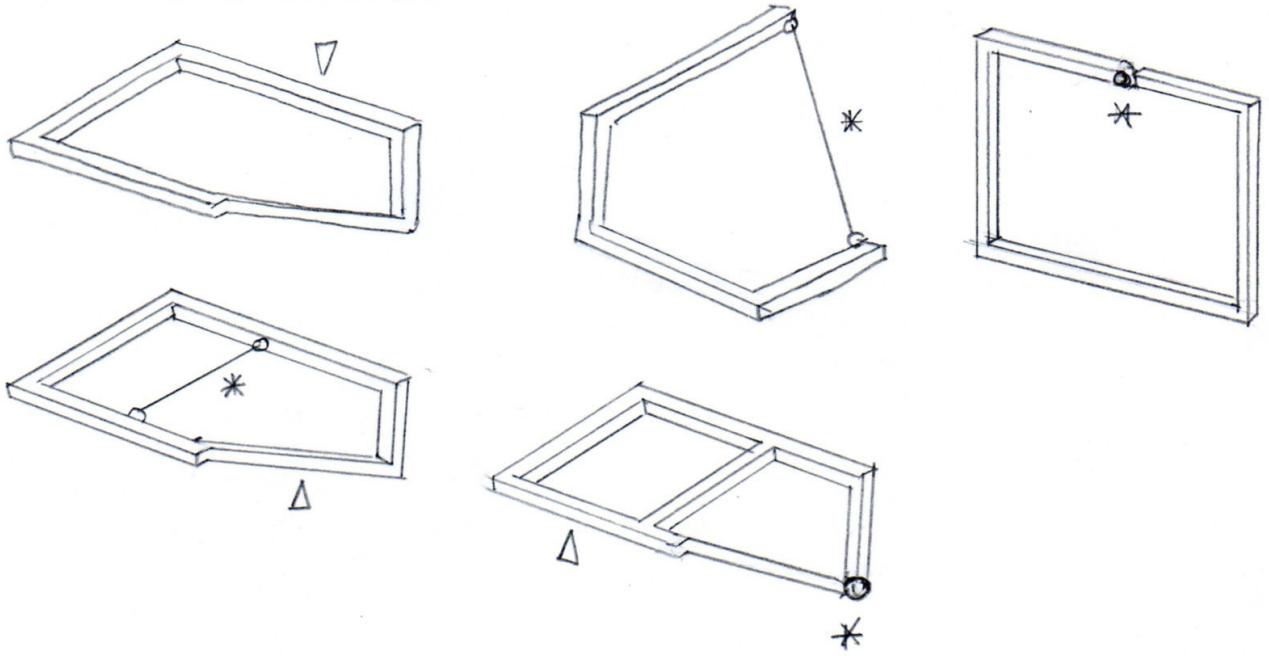
a) samo jedan otvoren štap koji mora sadržavati unutarnje spojeve.

b) samo jedan zatvoren štap koji može sadržavati unutarnje spojeve.

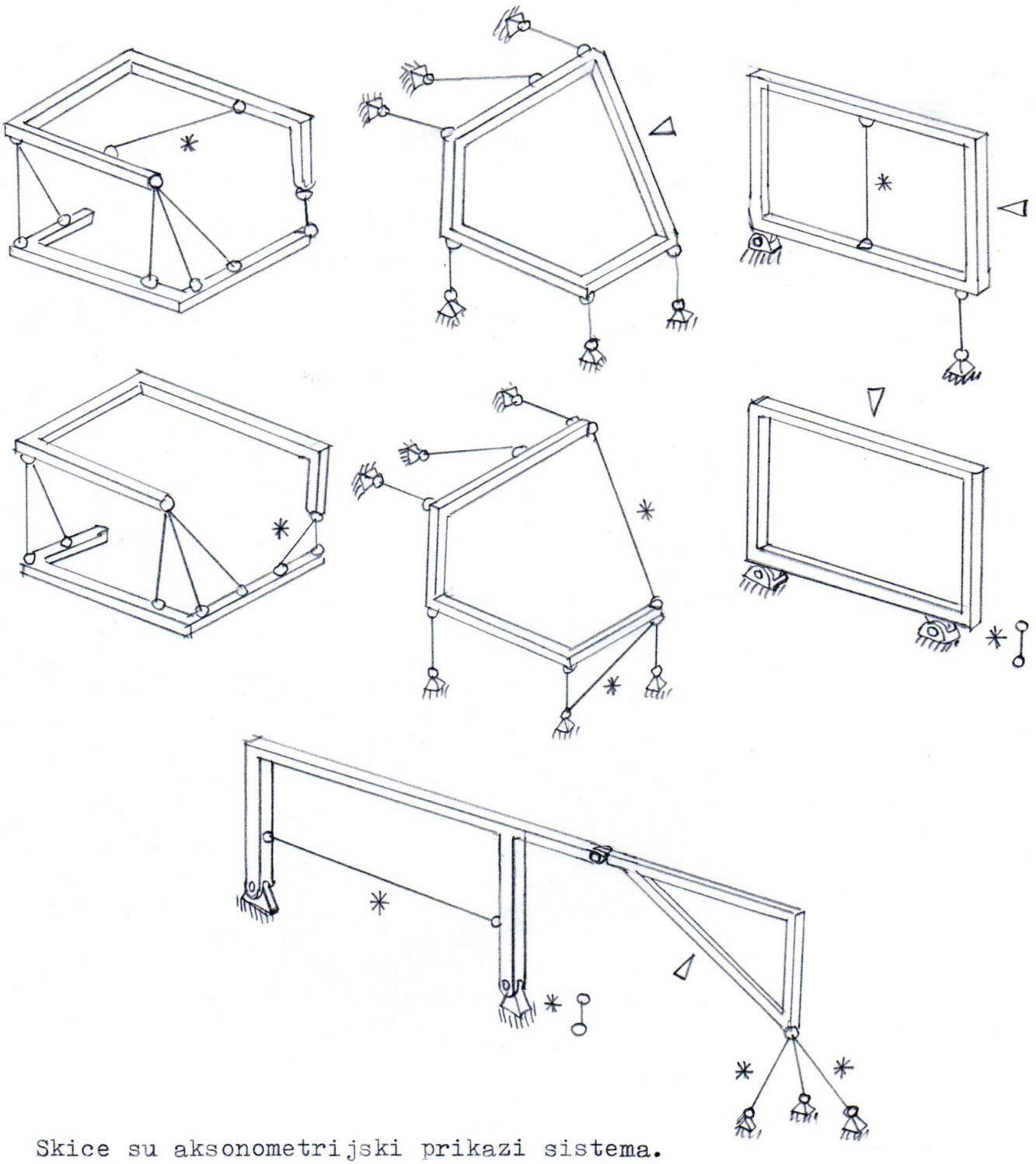
c) geometrijski nepromjenjiv sistem spojen u točkama, kojemu su sva tijela štapni elementi i koji ima barem jedno od slijedećih svojstava:

- preodredjenost prema spojevima
- zatvorenost osi barem jednog štapa
- postojanje barem jednog unutarnjeg spoja

Primjeri preodredjenih štapnih sistema mogu se, prema tome, izvesti iz primjera odredjenih spojenih sistema, tako da sva tijela u sistemu budu štapovi, a da pri tome barem jedan štap bude zatvoren i/ili da postoji barem jedan unutarnji spoj.
Primjeri preodredjenih štapnih sistema mogu se izvesti i iz preodredjenih spojenih sistema kojima su sva tijela štapni elementi, a oblik osi i postojanje unutarnjih spojeva u tom slučaju nisu bitni za prepoznavanje.



HWPK - 85 - 214



HWPK- 85- 215

Skice su aksonometrijski prikazi sistema.
Simboli uz skice ukazuju na postupke kojima se promatrani preodredjeni štapni sistem može svesti na odredjeni štapni sistem.
Simbol ✳ znači isključivanje spoja
Simbol △ znači presjecanje štapa
Simbol ✳ uz simbol spoja znači zamjenu jednostavnijim spojem.

Štapni mehanizmi

Štapni mehanizmi su mehanizmi kojima su sva tijela štapovi, a mogu sadržavati čvorove i podlogu.
Štapni mehanizmi se dijele na štapne mehanizme u užem smislu i štapne mehanizme koji sadrže preodredjenost.

Štapni mehanizmi u užem smislu

Statička definicija: Štapni mehanizam u užem smislu je štapni sistem koji može ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja, a sve rezne sile se mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Zaključak: Štapni mehanizam u užem smislu je mehanizam u užem smislu kojemu su sva tijela otvoreni štapni elementi i koji ne sadrži unutarnje spojeve.

Primjeri štapnih mehanizama u užem smislu mogu se izvesti iz primjera za mehanizme u užem smislu tako, da sva tijela u tim sistemima budu otvoreni štapovi bez unutarnjih spojeva.

HWPK - 85 - 216

Štapni mehanizmi koji sadrže preodredjenost

Statička definicija: Štapni mehanizam koji sadrži preodredjenost je štapni sistem koji može ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja, a sve rezne sile se ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Zaključak: Štapni mehanizam koji sadrži preodredjenost je mehanizam kojemu su sva tijela štapni elementi, a mora imati barem jedno od slijedećih svojstava:

- pripadnost mehanizmima koji sadrže preodredjenost
- zatvorenost osi barem jednog štapa
- postojanje barem jednog unutarnjeg spoja.

Primjeri štapnih mehanizama koji sadrže preodredjenost mogu se, prema tome izvesti iz primjera mehanizama u užem smislu tako, da sva tijela u sistemu budu štapni elementi, a da pri tome barem jedan štap bude zatvoren i/ili postoji barem jedan unutarnji spoj.

Primjeri štapnih mehanizama koji sadrže preodredjenost mogu se izvesti i iz primjera za mehanizme koji sadrže preodredjenost tako, da sva tijela u sistemu budu štapni elementi, a oblik osi i postojanje unutarnjih spojeva u tom slučaju nisu bitni za prepoznavanje.

Klasifikacija ravnih štapnih sistema

Ravni štapni sistem čini jedan ravni štap ili ravni sistem spojen u točkama, u kojemu su sva tijela štapovi čije osi leže u ravnini sistema.

Klasifikacija ravnih štapnih sistema odgovara općoj klasifikaciji štapnih sistema, ali se umjesto opće klasifikacije spojenih sistema koristi klasifikacija ravnih spojenih sistema.

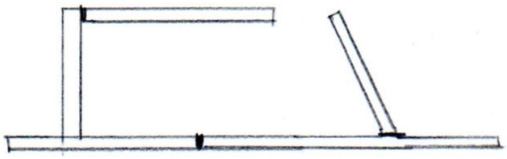
Odredjeni ravni štapni sistemi

Statička definicija: Odredjeni ravni štapni sistem je ravan sistem koji može ostati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje u ravnini sistema, a sve rezne sile se mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

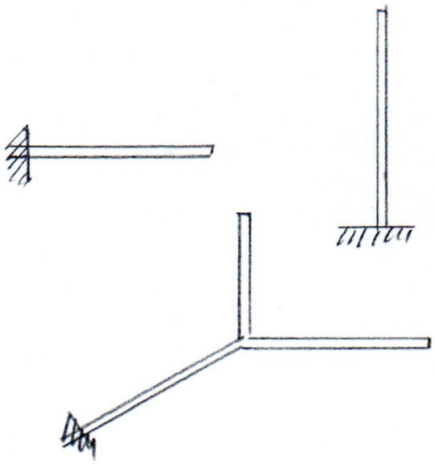
Podjela odredjenih ravnih štapnih sistema odgovara podjeli odredjenih sistema. Navesti će se samo osnovni primjeri.

Elementarni ravni štapni sistemi

Lanac krutih spojeva



Bilo koji štapni sistem sastavljen krutim spojevima tako, da je os otvorena biti će odredjen.



Konzola je štapni sistem sastavljen krutim spojevima tako da mu je os otvorena, a na jednom mjestu je spojen s podlogom.
Razlikovati će se konzolna greda, konzolni stup i konzole proizvoljnog oblika.

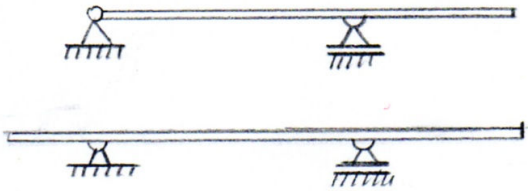
Prosto spojeni ravni štapni sistemi





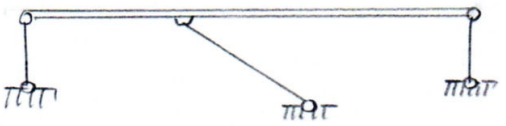
Prosta greda je štap kojemu je os dužina, a spojen je s podlogom na krajevima pomoću jednog nepomičnog zgloba i jednog pomičnog zgloba kojemu je pravac klizanja paralelan s osi.
Kod proste grede s kosim ležajem pravac klizanja nije paralelan s osi grede.

HWPK- 85- 217

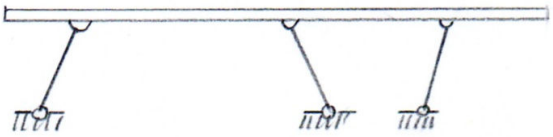


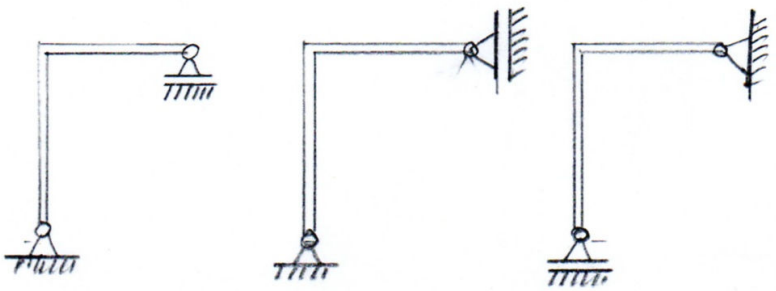
Greda s prepustom spojena je s podlogom s jednim zglobom i jednim poluzglobom. Prepust je dio grede izmedju kraja i poluzgloba. Dio izmedju spojeva se naziva polje.

Greda s dva prepusta spojena je s podlogom s dva poluzgloba.

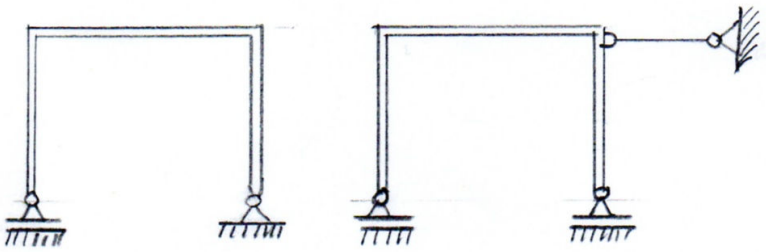


Greda može biti prosto spojena s podlogom i s tri neparalelna štapa, koji se ne sijeku u istoj točki.



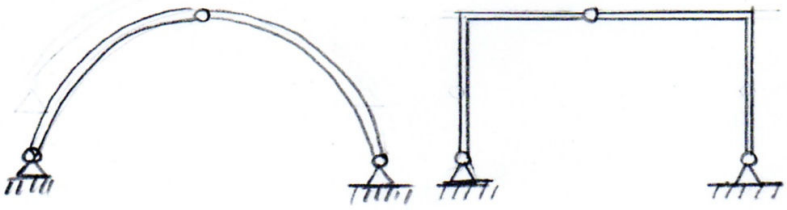


Na skicama su prikazani prosto spojeni poluokviri.



Na skicama su prikazani prosto spojeni okviri.

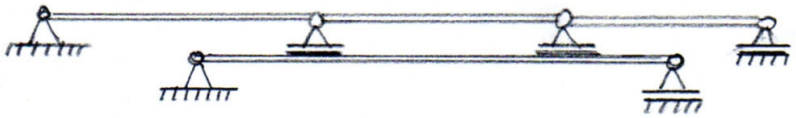
Trozglobni štapni sistemi



Najčešći oblici trozglobnih štapnih sistema su:
trozglobni luk (lijevo)
trozglobni okvir (desno)

HWPK- 85- 218

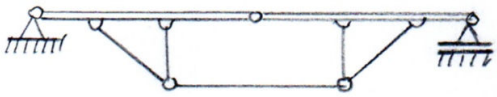
Ulančeni ravni štapni sistemi i rekurzivno rješivi ravni štapni sistemi



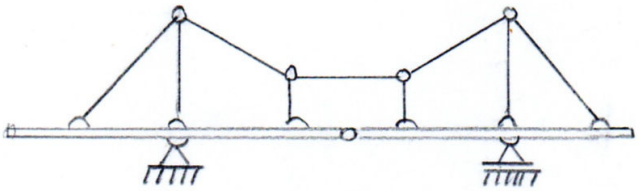
Indirektno opterećena greda.



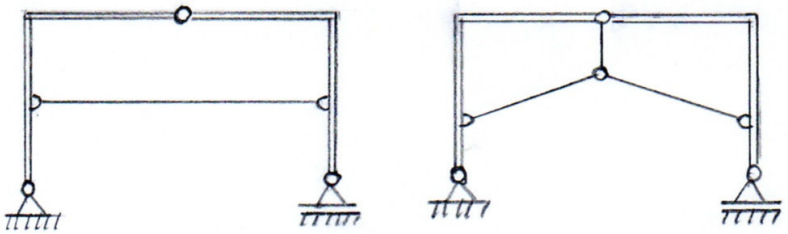
Gerberov nosač



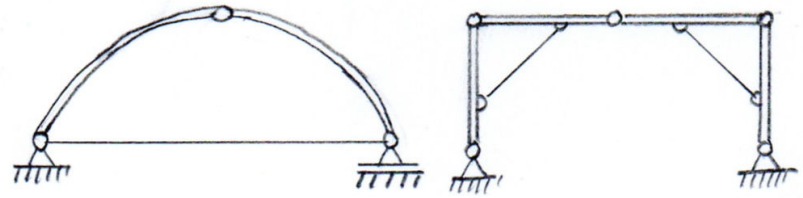
Ojačana greda

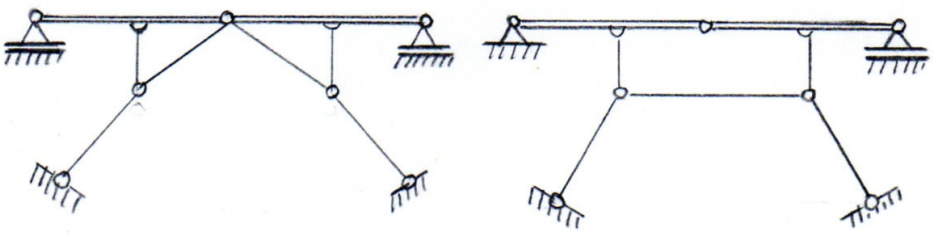


Ojačana greda s prepustima.

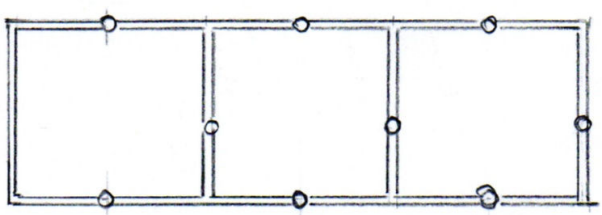


Okviri sa zategama i luk sa zategom





Razuprte grede.



Ulančeni okvirni sistem. Redoslijed spajanja je s lijeva na desno; dobiva se niz trozglobnih spojeva.

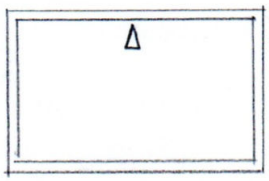
HWPK-85-219

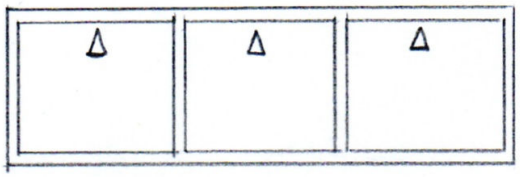
Primjeri za preostale vrste ravnih štapnih odredjenih sistema mogu se izvesti iz primjera za ravne spojene sisteme.

Preodredjeni ravni štapni sistemi

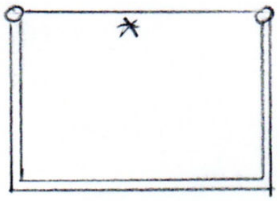
Statička definicija: Preodredjeni ravni štapni sistem je ravan štapni sistem, koji može odtati u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje u ravnini sistema, a sve rezne sile u ravnini se ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

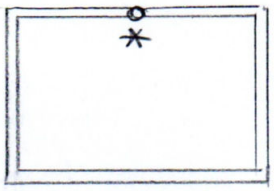
Definicija preodredjenog ravnog štapnog sistema pomoću odredjenog i pripadni zaključci su analogni onima iz opisa preodredjenih štapnih sistema.
Navesti će se samo osnovni primjeri.

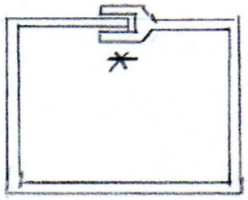




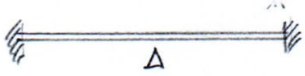
zatvoreni štapovi: mogu se presjecanjem prevesti u odredjene sisteme.

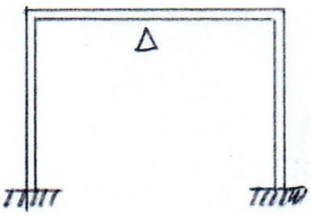


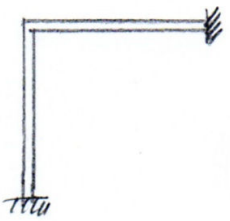




Štapovi s unutarnjim spojevima mogu se isključivanjem tih spojeva prevesi ti u odredjene.



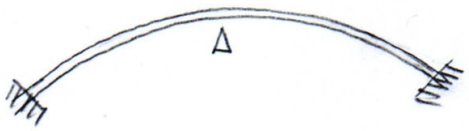




Primjeri otvorenih štapova na dva mjesta kruto spojenih s podlogom.

obostrano kruto spojena greda ili upeta greda

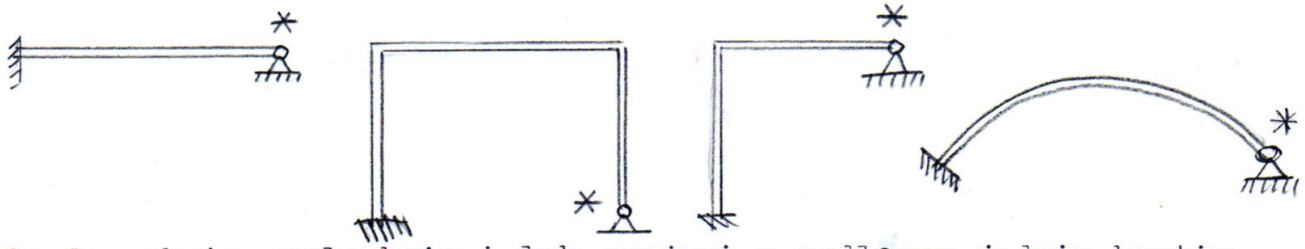
obostrano kruto spojen okvir odn. poluokvir ili upeti okvir odn, poluokvir.



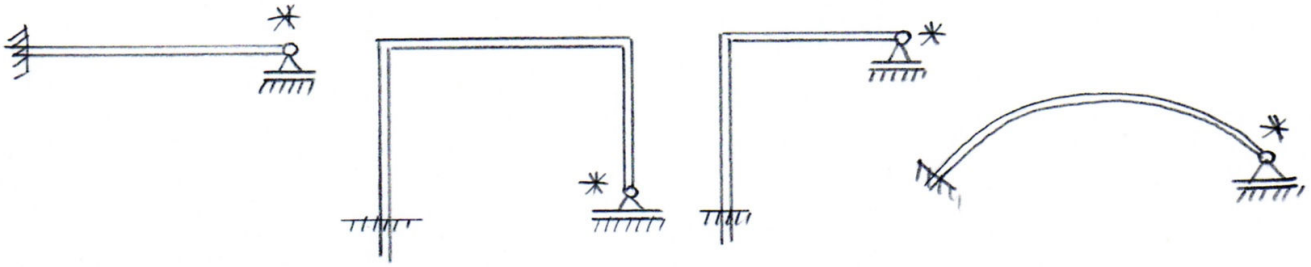
obostrano kruto spojen luk ili: obostrano upeti luk, naziva se i samo: upeti luk.

Simbol * označava spoj čijim isključivanjem se prikazani preodredjeni sistem može svesti na odredjeni štapni sistem.

Simbol Δ označava presjecanje štapa kojim se prikazani preodredjeni štapni sistem može svesti na odredjeni štapni sistem.

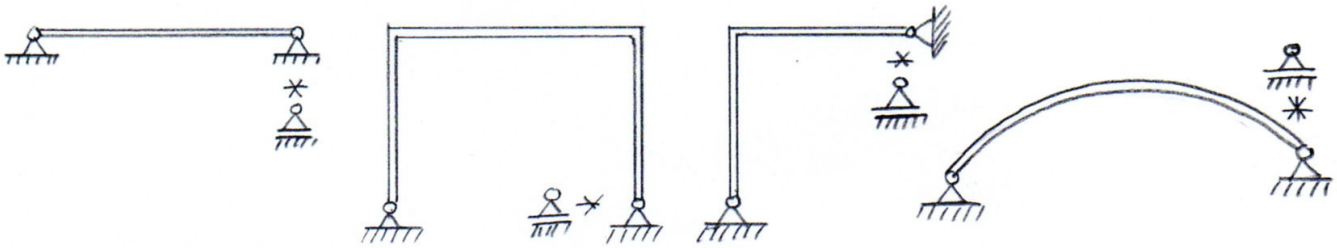


Greda, okvir, poluokvir i luk spojeni s podlogom jednim krutim spojem i jednim nepomičnim zglobom.



Greda, okvir, poluokvir i luk spojeni s podlogom jednim krutim spojem i jednim pomičnim zglobom.

HWPK-85-221



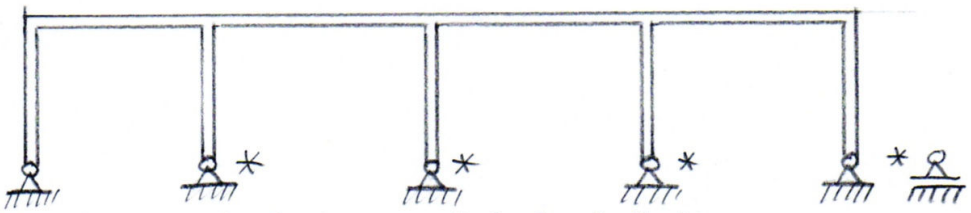
Otvoreni štapovi spojeni na dva različita mjesta s podlogom pomoću nepomičnih zglobova nazivaju se dvozglobni štapni sistemi. Skicirani su: dvozglobna greda, dvozglobni okvir, dvozglobni poluokvir i dvozglobni luk. Svi se ti sistemi mogu svesti na odredjeni ravni štapni sistem, ako se jedan od nepomičnih zglobova zamijeni pomičnim zglobom, što je u skicama simbolički označeno.



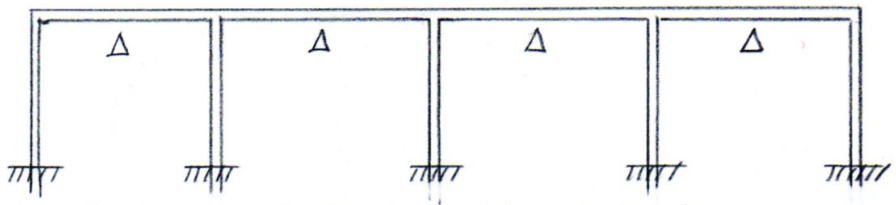
Kontinuirana greda s pomičnim ležajima osim jednoga.



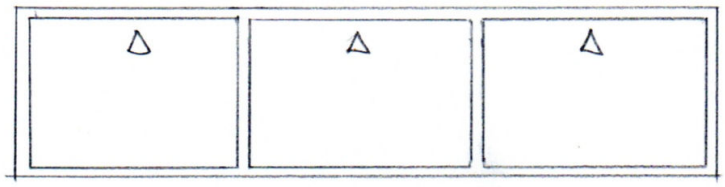
Kontinuirana greda s nepomičnim ležajima.



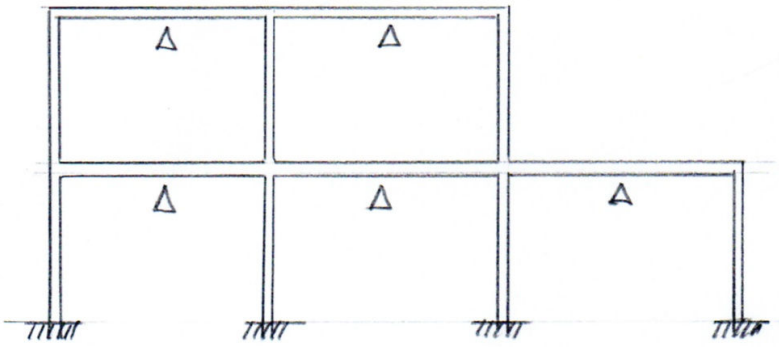
Kontinuirani okvir s zglobnim ležajima.



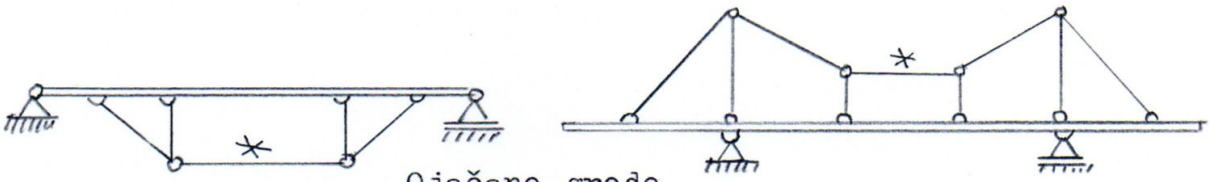
Kontinuirani okvir s upetim stupovima.



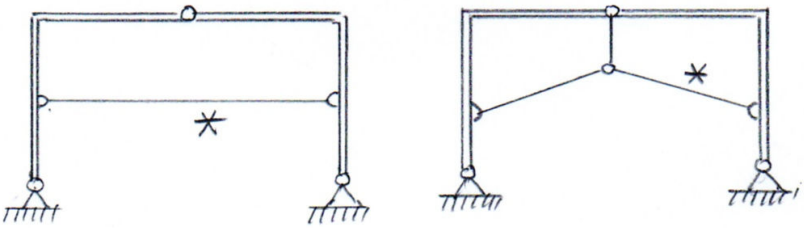
Okvirni nosač



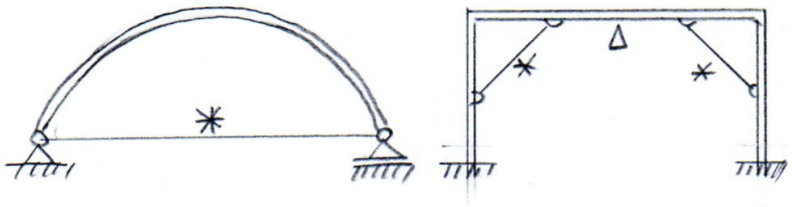
Dvokatni kontinuirani okvir s upetim stupovima.

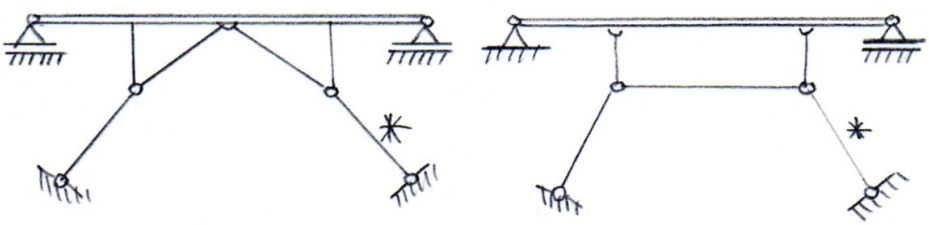


Ojačane grede



Okviri i lukovi s zategama.





Razuprte grede

Ravni štapni mehanizmi u užem smislu

Statička definicija: Ravni štapni mehanizam u užem smislu je ravni štapni sistem, koji može ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja, a sve rezne sile mogu se odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Zaključak: Ravni štapni mehanizam u užem smislu je mehanizam u užem smislu kojemu sva tijela otvoreni ravni štapni elementi koji ne sadrže unutarnje spojeve.

Primjeri ravnih štapnih mehanizama u užem smislu mogu se izvesti iz primjera za ravne mehanizme u užem smislu, tako da se umjesto svih tijela uvedu otvoreni štapni elementi.

Ravni štapni mehanizmi koji sadrže preodredjenost

Statička definicija: Ravni štapni mehanizam koji sadrži preodredjenost je ravni štapni sistem koji može ostati u stanju ravnoteže samo za neka specijalna opterećenja, a sve rezne sile se ne mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže.

Zaključak: Ravni štapni mehanizam koji sadrži preodredjenost je ravni mehanizam kojemu su sva tijela štapni elementi čije osi leže u ravnini sistema, a sadrži barem jedno od slijedećih svojstava:

- pripadnost ravnim mehanizmima koji sadrže preodredjenost
- zatvorenost osi barem jednog štapa
- postojanje barem jednog unutarnjeg spoja

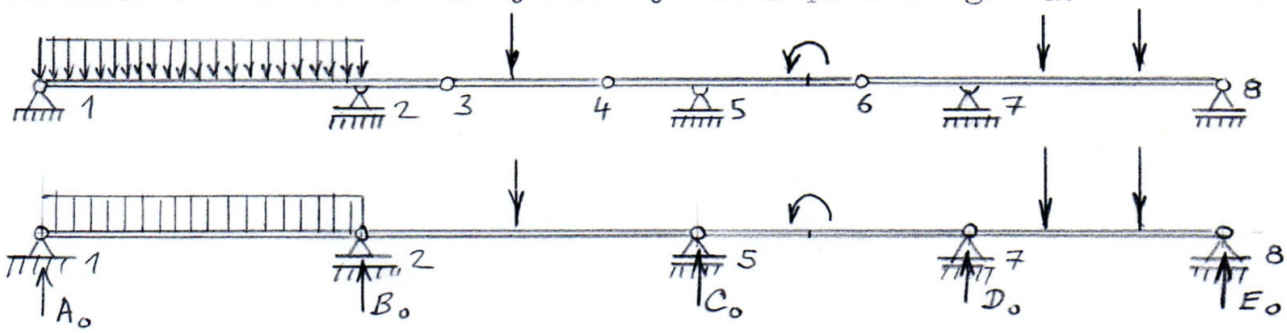
Primjeri se mogu izvesti iz primjera za ravne mehanizme .

HWPK 85-223

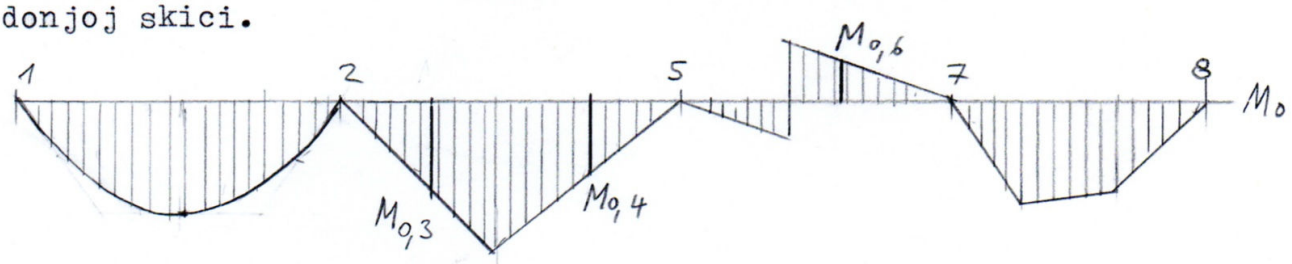
Superpozicijske metode rješavanja nekih ravnih štapnih sistema.

Gerberova greda

Rješenje Gerberove grede za sile okomite na os i koncentrirane momente svesti će se na rješavanje niza prostih greda.

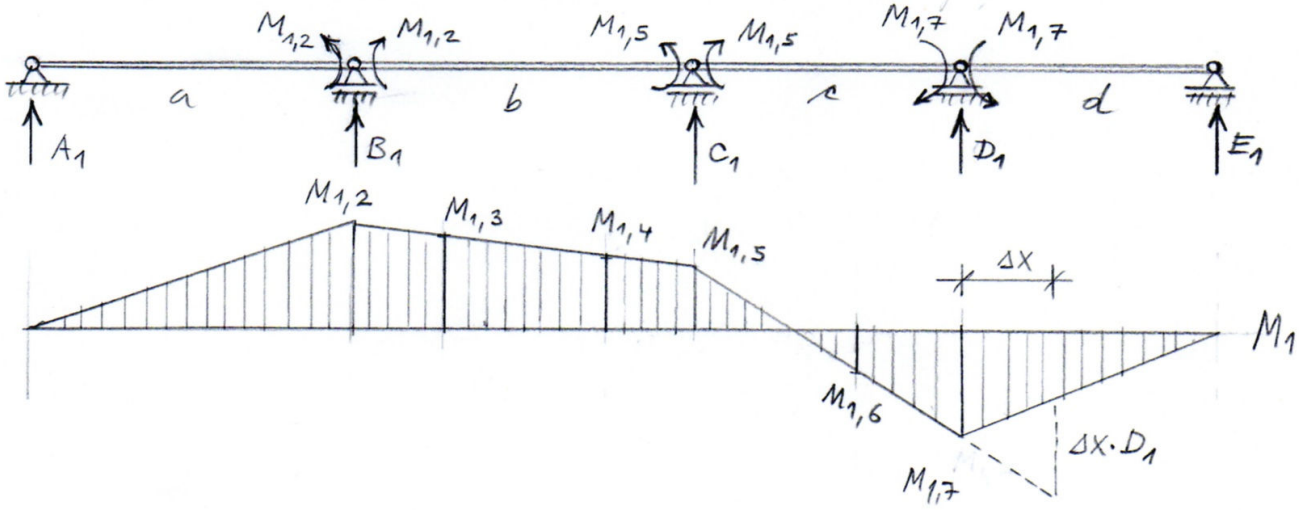


Zadanom sistemu prikazanom na gornjoj skici a) pridužiti će se niz prostih greda prikazan na gornjoj skici b). Taj se sistem jednostavno rješava. Na skici su ucrtane sile u spojevima koje djeluju na spojne elemente. Za daljnji postupak je potreban dijagram momenata savijanja, koji je kvalitativno prikazan na donjoj skici.



Dobiveno rješenje će imati različite sile u spojevima od traženog rješenja, a postojati će momenti savijanja na mjestima zglobava zadanog sistema. Na tim mjestima bi u konačnom rješenju trebale biti nultočke momentnog dijagrama.

Traženo rješenje zadanog sistema će se dobiti tako, da se na prvo rješenje niza prostih greda superponira drugo rješenje.
Drugo rješenje će odgovarati djelovanju parova suprotnih koncentriranih momenata uz zglobove niza prostih greda. Djelovanje tih vanjskih momenata biti će ekvivalentno djelovanju momenata savijanja na odgovarajućim mjestima zadanog Gerberovog sistema.



HWPK-85-224

Momenti u spojevima drugog rješenja su zasada nepoznati, ali se može odrediti karakteristika momemntnog dijagrama. Na ležajima će vrijednost momenta savijanja biti upravo jednaka veličini momenata koji djeluju uz zglob, a u poljima će moment savijanja biti linearan jer ne djeluje poprečna distribuirana sila. Veličina sila u pomičnim ležajima se odredjuje iz uvjeta ravnoteže susjednih polja, npr:

$$C = \frac{M_{1,2} - M_{1,5}}{b} - \frac{M_{1,5} + M_{1,7}}{c}$$

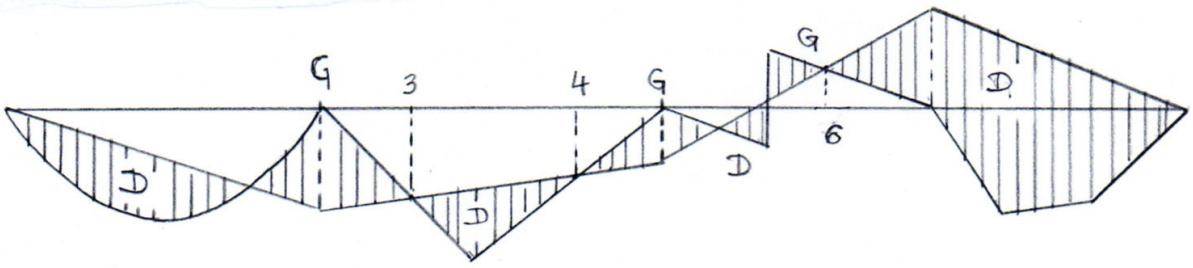
Grafički se veličina sila u pomičnim ležajima može odrediti pomoću loma tangenti momentnog dijagrama.

Momenti u zglobovima drugog rješenja odrediti će se tako, da momenti savijanja na mjestima stvarnih zglobova zadanog sistema budu upravo suprotni od momenata savijanja prvog rješenja.

Postupak se jednostavno može provesti grafički: na mjestima zglobova zadanog sistema nanesu se ordinate momenta savijanja suprotne od onih iz prvog rješenja. Na skici su označne sa: $M_{1,3}$, $M_{1,4}$, $M_{1,6}$. Prvo se odredjuje momentna linija u polju"b" i to spajanjem točaka koje odredjuju ordinate $M_{1,3}$ i $M_{1,4}$. Time su odredjeni momenti nad ležajima: $M_{1,2}$ i $M_{1,5}$. Sada se može konstruirati momentna linija za polje "a" kao spojnica nultočke za ležaj 1 i ordinate nad ležajem 2. Isto se tako može konstruirati i momentna linija za polje "c" koja je odredjena momentom nad ležajem 5 i ordinatom $M_{1,6}$. Tom se linijom odredjuje moment nad ležajem 7. Sada se spajanjem ordinate nad ležajem 7 i nultočke u ležaju 8 može konstruirati i momentna linija u polju "d".

Zbrajanjem dobivenih rješenja za niz prostih greda dobiva se traženo rješenje za Gerberovu gredu.

Cijeli postupak se može provesti i na jednom crtežu uz korištenje pravila za grafičko zbrajanje funkcija, koje glasi: graf jedne funkcije se nanosi na uobičajeni način, a za drugu funkciju se crta graf ordinata uzetih s negativnim predznakom



i od te linije se mjere ordinate zbroja. U promatranom slučaju se prvo nanosi momentni dijagram za niz prostih greda, pa se na momentnoj liniji odredjuju točke koje odgovaraju zglobovima zadane Gerberove grede. Konstrukcija se započinje s poljem u kojem su poznate dvije nultočke i provodi analogno prethodnoj.

HWPK-85-225

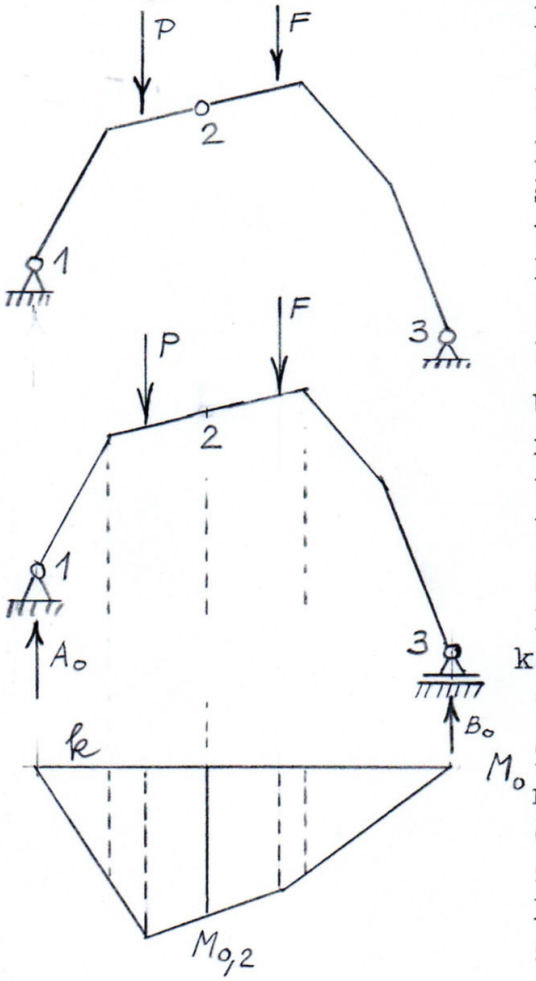
Na skici su s "G" označena područja u kojima je zategnuta strana gore, a s "D" područja u kojima je zategnuta strana dolje.

Sile u ležajima drugog rješenja mogu se odrediti grafički ili računski pomoću očitanih momenata nad ležajima.

Pomoću ovog postupka može se riješiti jedan od zadataka teorije konstrukcija: minimizacija reznih sila uz zadane uvjete konstruiranja. U ovom slučaju je zadano opterećenje i razmaci ležajeva, a zglobovi u poljima se mogu postaviti tako, da apsolutno najveća ordinata momentnog dijagrama bude minimalna.

Trozglobni sistemi

Promatra se trozglobni sistem koji sadrži dva štapna elementa i podlogu. Na štapne elemente djeluju paralelne sile, ali tako, da nijedan pravac paralelan silama ne može sijeći štapne elemente u dvije točke.



Rješenje trozglobnog štapnog sistema će se svesti na rješavanje odgovarajućeg prosto spojenog štapnog sistema.

Promatra se štapni sistem koji je iz štapnih elemenata zadanog sistema dobiven tako, da se zglob u točki 2 zamijeni krutim spojem, a nepomični zglob u točki 3 će se zamijeniti pomičnim čija je sila paralelna s opterećenjem.

Uvedeni sistem se rješava na poznati način. Zbog grafičkog postupka momentni dijagram nije nacrtan na skici sistema nego je reduciran na pravac.

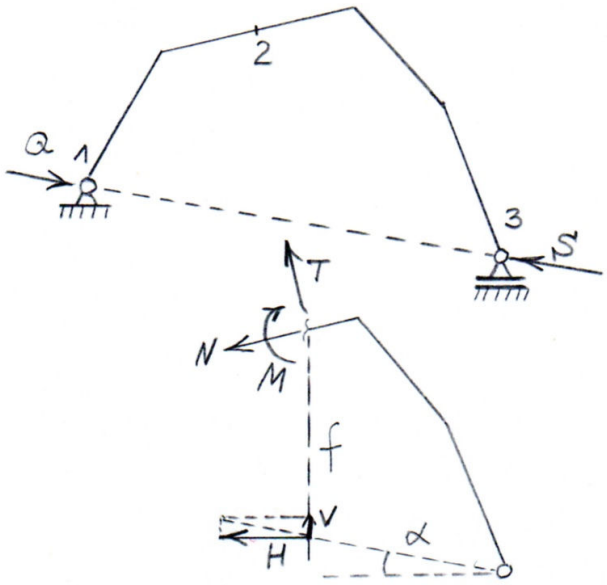
Svakoj točki štapnog sistema je s paralelom sa silama pridružena točka na pravcu k, i od njega se na istu paralelu nanosi ordinata. Dijagram je označen s M_o

Za daljnji postupak je bitna vrijednost momenta savijanja za točku 2. Ako bi slučajno moment savijanja u toj točki iščezavao, rješenje za prosto spojen štap poklapalo bi se s traženim rješenjem trozglobnog sistema.

U općem slučaju, koji je i prikazan na skici biti će moment savijanja $M_{o,2}$ različit od nule, pa će prvom rješenju prosto spojenog sistema pribrojiti drugo i to takovo, da moment savijanja u točki 2 bude suprotan od onoga za prvo rješenje.

Opterećenje drugog stanja biti će sila koja djeluje na pomični zglob 3, a pravac joj je odredjen spojnicom zglobova 1 i 3.

HUPK-85-226

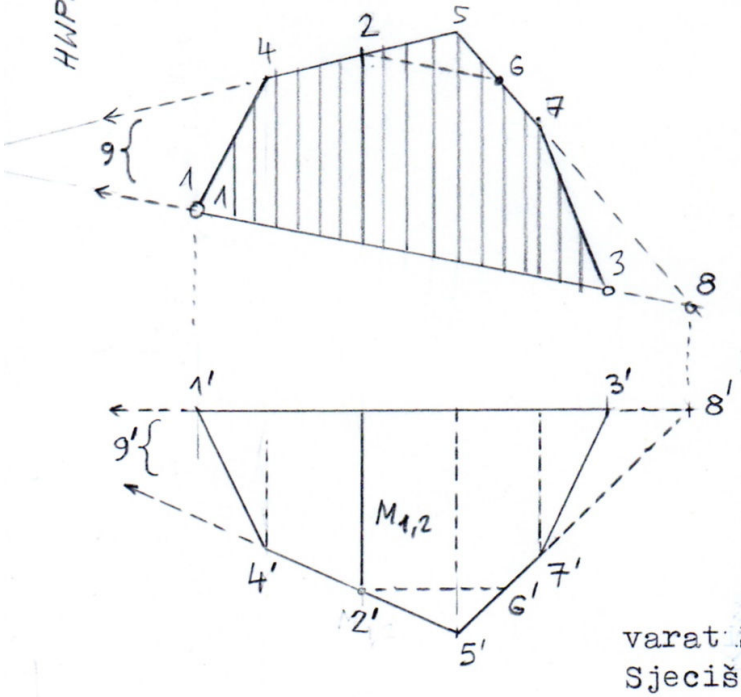


Uz takovo opterećenje sila u pomičnom zglobu 3 iščezava, a u nepomičnom zglobu 1 se pojavljuje sila na istom pravcu kao sila opterećenja, jednake veličine i suprotnog smjera:

Time su odredjene sile u spojevima drugog rješenja. Za daljnji postupak treba definirati način odredjivanja momentnog dijagrama za djelovanje sile S. Radi se o elementarnom slučaju: moment se odredjuje množenjem veličine sile s udaljenosti presjeka od pravca sile. Zbog grafičke provedbe postupka odredjivanje momenta savijanja će se nešto modificirati: kroz težište promatranog presjeka će se položiti paralela s opterećenjem i odrediti sjecište sa spojnicom zglobova. U toj točki će se sila S rastaviti na dvije komponente: jednu, veličine V koja leži na paraleli sa opterećenjem i drugu, veličine H koja je okomita na opterećenje. Kako doprinos sile V iščezava biti će moment savijanja odredjen izrazom:

$$M = -f \cdot H$$

pri čemu je "f" udaljenost sjecišta i točke presjeka. Slijedi, da je dijagram udaljenosti "f" proporcionalan momentu savijanja od sile S. Ako se momenta savijanja od sile S reducira na pravac dobiti će se lik proporcionalan dijagramu udaljenosti "f". Takova veza dvaju likova naziva se afinost i iskoristiti će se za grafičko konstruiranje momentnog dijagrama od sile S.



Na skici je prikazan dijagram momenata savijanja od sile S. Zbog isticanja afinosti označene su karakteristične točke na dijagramu istim brojevima kao odgovarajuće točke na osi sistema, uz dodatnu oznaku crtom.

Paralelnim linijama zadanog lika, odgovarat će paralelne linije na afinom liku. Sjecište dvaju pravaca na zadanom liku ležati će na istoj paraleli kao i sjecište odgovarajućih pravaca na afinom liku. Na skici osi se pravac odredjen točkama 5 i 6 siječe s pravcem odredjenim točkama 1 i 3 u točki 8, a sjecište 8′ u kojemu se sijeku pravci odredjeni točkama 5′,6′i 1′,3′nalazi se na istoj paraleli s opterećenjem. Pravac odredjen točkama 2 i 6 i pravac odredjen točkama 1 i 3 su paralelni. Njima na afinom liku

HWPK-85-227

odgovaraju pravci odredjeni točkama 2′,6′ i 1′,3′ koji su takodjer paralelni. Pomoću uočene zakonitosti može se konstruirati dijagram momenata savijanja od sile S samo pomoću jedne zadane ordinate. Ovdje će se odabrati ordinata u točki 2, označena sa $M_{1,2}$ i to tako, da bude suprotna ordinati točke 2 za prvo rješenje. Pri grafičkom postupku će se na skici osi odrediti sva potrebna sjecišta; u ovom slučaju 8 i 9. Zatim će se povući paralele s opterećenjem iz svih karakterističnih točaka; 9,1,4,2,5,7,3,8. Odabrati će se os 1′,3′ od koje se mjere ordinate i odrediti će se točka 2′. Konstruira se pravac 2′,9′ i time odredjuju točke 4′ i 5′. Sada je moguće konstruirati pravce 1′,4′ i 5′,8′, a time se odredjuje točka 7′. Na kraju se konstruira spojnica 7′,3′.

Nadalje treba odrediti silu S. Iz uvjeta jednakosti apsolutnih iznosa ordinata momenta savijanja prvog rješenja i drugog rješenja:

$$|M_{0,2}| = |M_{1,2}|$$

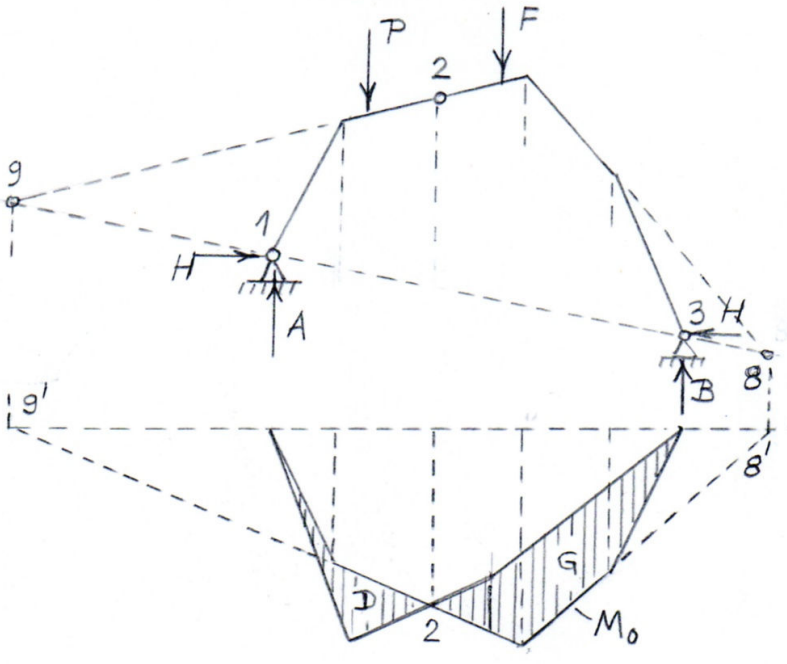
i izraza za moment savijanja u točki 2 od sile H, dobiva se;

$$H = \frac{M_{1,2}}{f} = \frac{M_{0,2}}{f}$$

Iz poznate komponente H direktno se odredjuju: sila S i komponenta V:

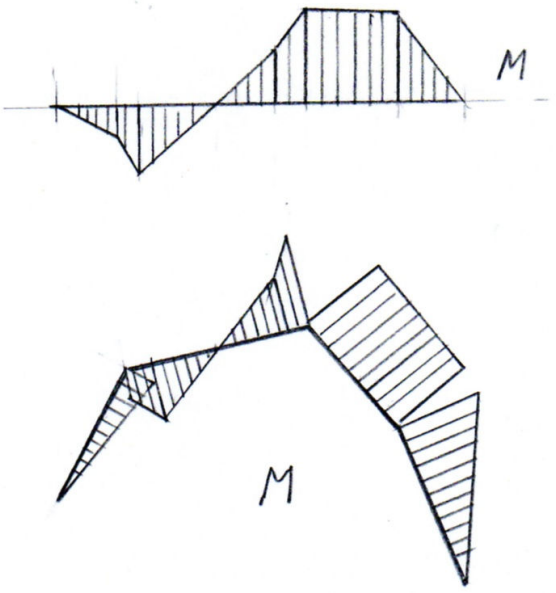
$$S = \frac{H}{\cos\alpha}\,; \qquad V = H \cdot tg\,\alpha$$

U traženom rješenju će se u zglobu 1 pojaviti komponente A_o i $Q = S$, a u zglobu 2 komponente B_o i S. Često se sile u zglobovima prikazuju pomoću okomitih komponenti, koje se lako odredjuju jer su komponente sile S već poznate. U zglobu 1 će djelovati komponente veličine $A = A_o - V$ i H, a u zglobu 3 će djelovati komponente veličine $B = B_o + V$ i H, pri čemu oznaka sila na različitim pravcima istom veličinom nije sasvim dosljedna, ali se koristi u praktičnim slučajevima. Komponente su u tehničkoj notaciji prikazane na donjoj skici.



U praktičnom postupku se ne crta zamišljeni prosto spojeni sistem, a superpozicija mometnih dijagrama se konstruira na istom crtežu prema prikazanom pravilu za grafičko zbrajanje funkcija. Konstruira se momentni dijagram prvog rješenja; za zadano opterećenje, pa se kroz krajnju točku ordinate za srednji zglob (2) konstruira afini lik t.j. momentni dijagram od sile S. Konačne ordinate se mjere od afinog lika. Sa "D" je označeno područje u kojemu je zateg-

HWPK- 85- 228



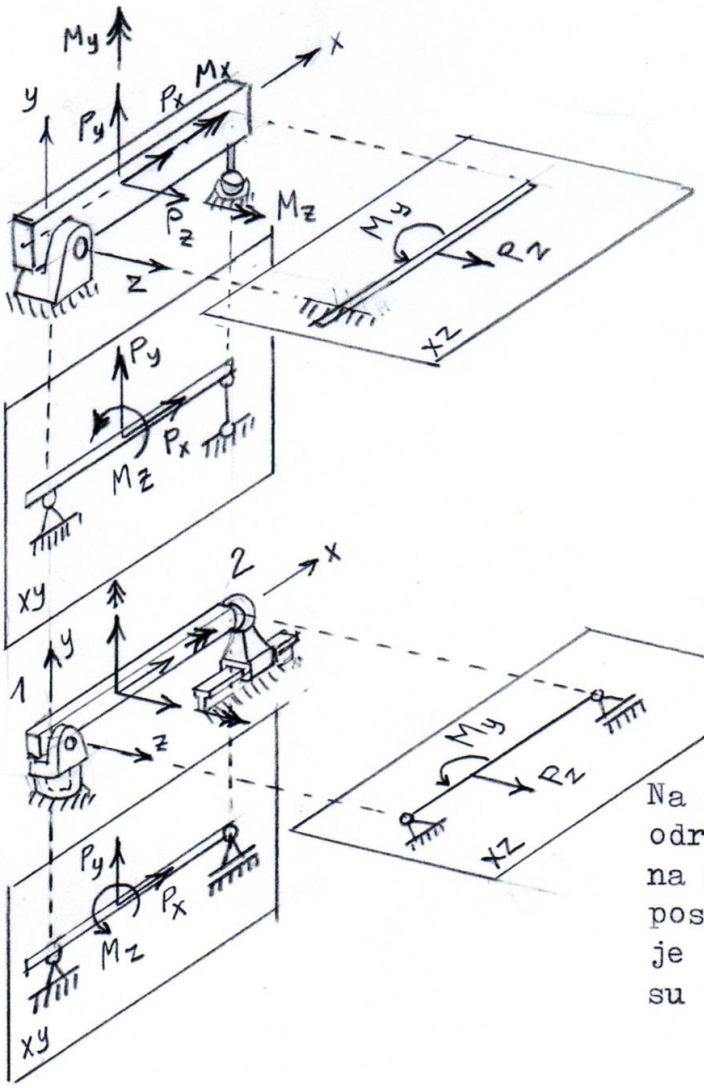
nuta strana dolje, a sa "G" je označeno područje u kojemu je zategnuta strana gore.
Dobiveni dijagram se može iskoristiti za konstrukciju mometnog dijagrama trozglobnog sistema reduciranog na liniju (gore) ili za konstrukciju uobičajenog dijagrama momenata savijanja na slici osi sistema (lijevo).
Iz poznatog opterećenja i sila u spojevima odredjuju se na poznati način preostale rezne sile i konstruiraju njihovi dijagrami.

Ukoliko je os trozglobnog štapnog sistema zakrivljena, konstruira se afina figura pomoću pogodno odabranih tangenti. Tangente čine poligon, a konstrukcija poligona je pokazana.

HWPK - 85- 229

43

Rješavanje prostornih djelovanja pomoću ravnih sistema

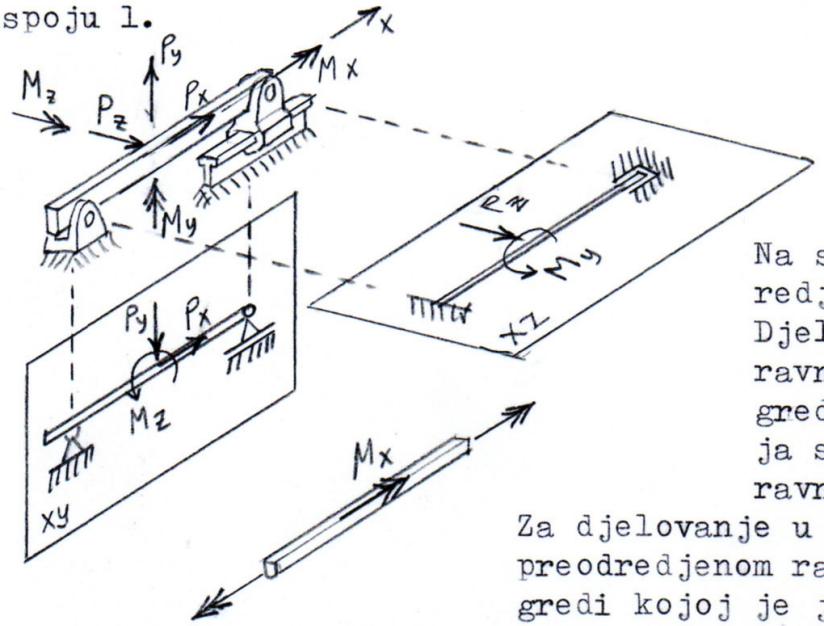


Rješavanje nekih sistema za opterećenje u prostoru može se pregledno svesti na niz rješenja ravnih sistema ili na pogodnu kombinaciju rješenja prostornog djelovanja i djelovanja u ravninama.

Na lijevoj skici je prikazan odredjen štapni sistem. Njegovo djelovanje u ravnini xy odgovara prostoj gredi, a djelovanje za sile u ravnini xz odgovara konzoli. Sile na osi x se mogu pridružiti jednoj ili drugoj ravnini, a kao prostorno djelovanje preostaje samo moment na osi štapa veličine M_x.

Na lijevoj skici je prikazan odredjen štapni sistem koji je na mjestu "1" spojen s podlogom posrednim spojem koji omogućuje dvije rotacije: oko osi koje su paralelne s osima y i z,

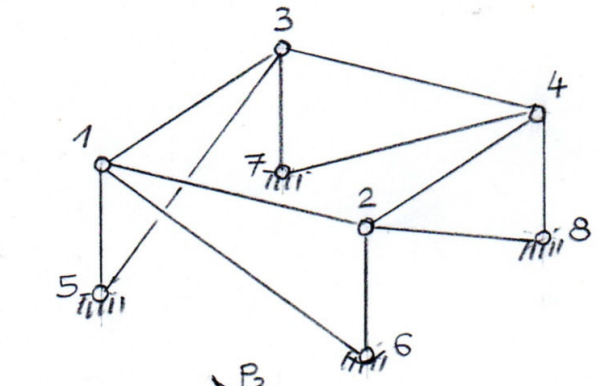
a na mjestu 2 je spojen kuglasto-linijsko kliznim zglobom. Djelovanje tog sistema i u ravnini xy i u ravnini xz odgovara prostoj gredi. Podjela opterećenja je analogna podjeli u prethodnom primjeru. I ovdje kao prostorno djelovanje preostaje jedino moment na osi štapa, a on se elementarno uravnotežava suprotnim momentom u spoju 1.

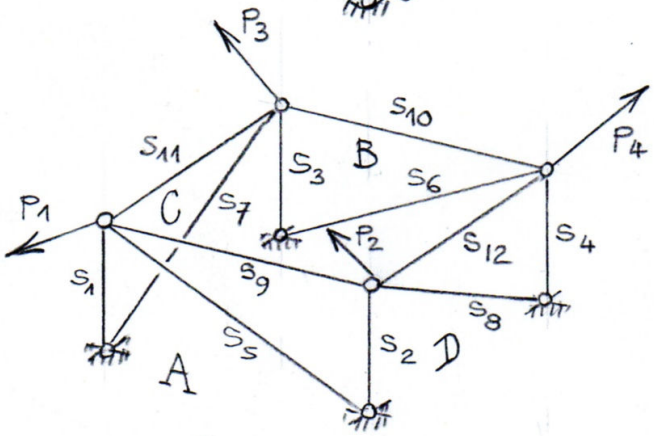


Na skici je prikazan preodredjen štapni sistem. Djelovanje tog sistema u ravnini xy odgovara prostoj gredi, pa se može reći da ja samo za djelovanje u toj ravnini odredjen.

Za djelovanje u ravnini xz odgovara preodredjenom ravnom štapnom sistemu: gredi kojoj je jedan kraj kruto spojen, a drugi ima klizni spoj. Za djelovanje momenta M_x koji leži na osi štapa, sistem je takodjer preodredjen.

Rješavanje prostornog djelovanja pomoću ravnih sistema je važno za rješavanje rešetkastih sistema. Na taj način će se riješiti rešetkasti sistem prikazan na skici. Sistem nije ulančen ni rekurzivno rješiv, pa bi se uz dosada prikazane postupke mogao riješiti metodom zamjene štapova ili općim algebarskim postupkom. Postupak rastavljanja na ravne rešetke je mnogo jednostavniji. Sistem ima četiri zglobna čvora (1,2,3,4) i dvanaest štapova, koji su općenito označeni sa s_i.



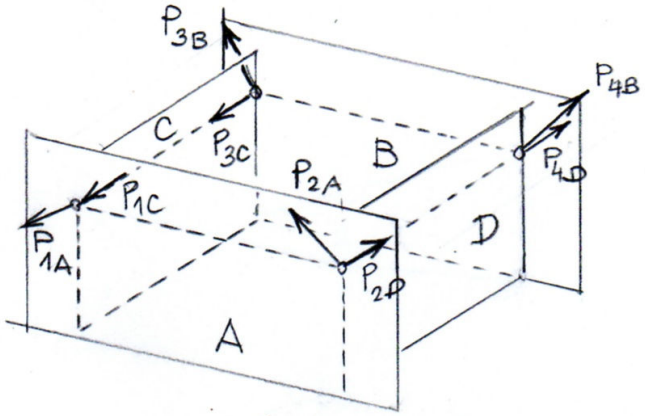


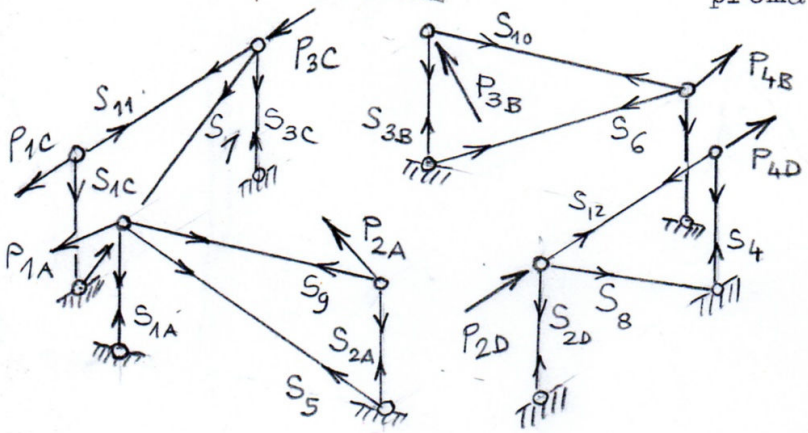
Promatra se slučaj općeg opterećenja, koje je prikazano silama čije su veličine općenito P_i.

Za rješavanje rastavljanjem bitno je uočiti geometrijski nepromjenjive ravne rešetke koje se pojavljuju u sistemu. Ovdje se pojavljuju četiri rešetke; opisati će ih se pomoću čvorova. Svaka od tih rešetki odredjuje jednu ravninu, te će se ravnine označiti

HWPE- 95- 230

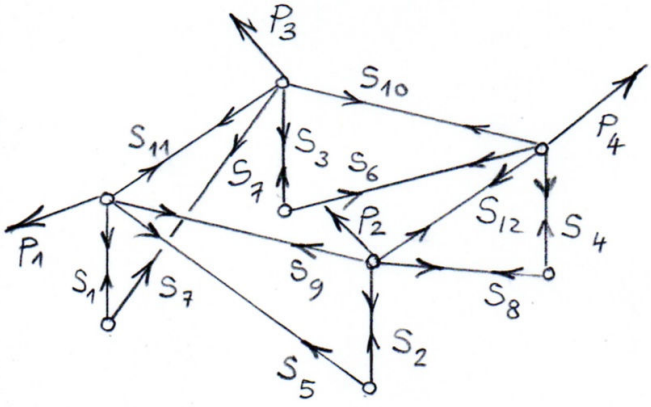
velikim slovima A,B,C,D. Rešetka 1,2,5,6 odredjuje ravninu A, rešetka 3,4,7,8, ravninu B, rešetka 1,3,5,7 ravninuC i konačno: rešetka 2,4,6,8 odredjuje ravninu D. Opterećenje će se rastaviti na komponente koje leže u tim ravninama. Rastavljanje sile na dvije komponete od kojih svaka leži u zadanoj ravnini, nije jednoznačno, pa će se u jednoj od ravnina odabrati pogodan pravac i rastavljanje provesti na komponentu u ravnini i na pravcu. Na skici su prikazane komponente sila i označen dodatnim indeksom prema oznaci ravnine u kojoj leže.





Zadani sistem će se rastaviti na ravne rešetke, ali tako, da se čvorovi i štapovi koji leže na presječnicama ravnina pojavljuju odvojeno u obje rešetke. Slikovito se može zamisliti, da su ti štapovi presječeni duž osi, pa da je jedan dio pripao jednoj, a drugi dio drugoj rešetki.

Svakoj rešetki će se pridružiti komponente opterećenja koje leže u njenoj ravnini. Vidljivo je da su dobivene odredjene ravne rešetke koje se rješavaju na poznati način. Sile u rešetkama će se označiti sa S_i pri čemu indeks odgovara indeksu štapa. Sile u "razdvojenim" štapovima označiti će se još i indeksom ravnine.



Konačne sile u štapovima zadanog sistema dobivaju se superpozicijom parcijalnih rješenja. Sile u štapovima na presječnicama ravnina dobivaju se prema:

$$S_1 = S_{1A} + S_{1C} \quad \text{itd.}$$

Ostale sile su jednake kao u ravnim rešetkama.

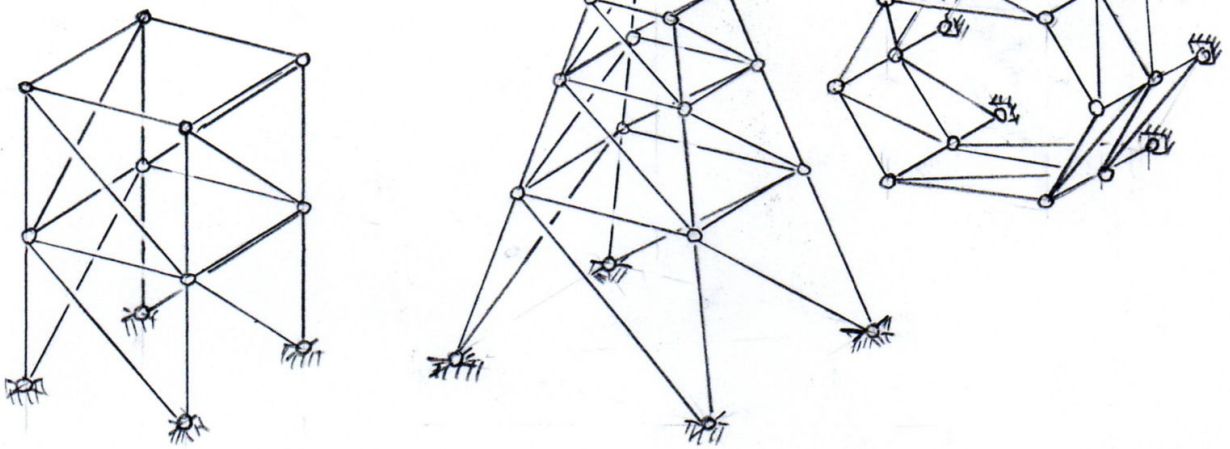
Ukupno djelovanje na svaki čvor dobiveno je superpozicijom dvaju uravnoteženih sistema sila, pa je očito da čvorovi tako dobivenog stanja moraju biti u ravnoteži. Pri rješavanju nije uvedena nikakova pretpostavka o djelovanju opterećenja, pa je dobiveno rješenje za proizvoljno opterećenje. Pri tome su sve sile odredjene iz uvjeta ravnoteže, pa slijedi da je promatrani sistem odredjen.

Ovaj postupak je provediv za sve srodne sisteme, pa se može zaključiti:

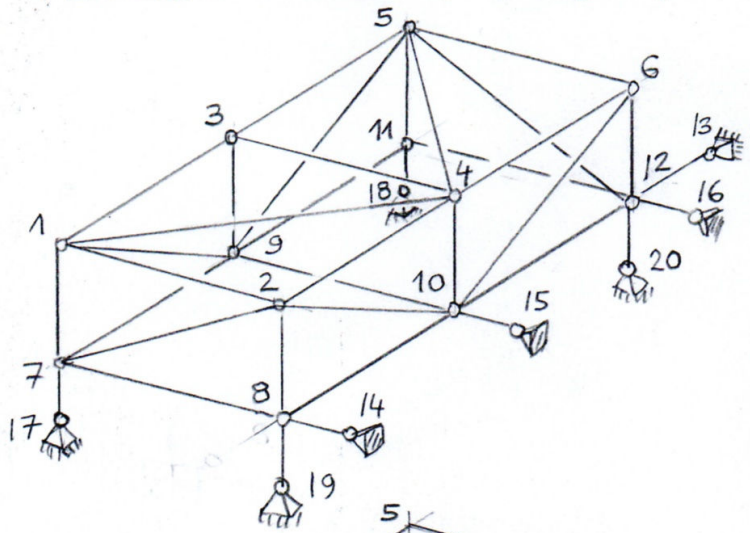
HWPK-85 231

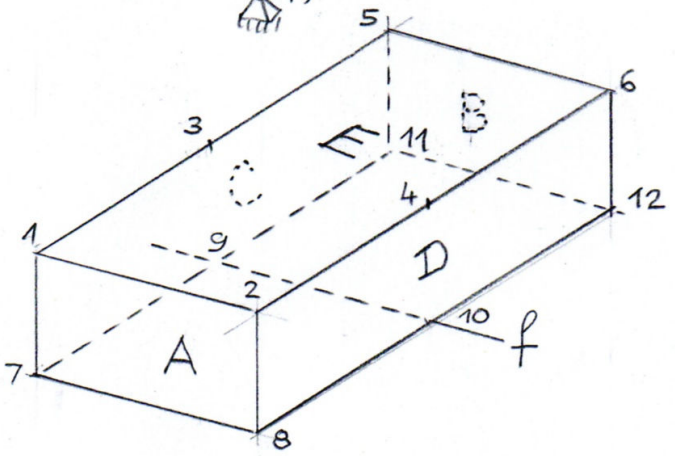
Svi rešetkasti sistemi koji sadrže slijedeća svojstva biti će odredjeni: (bridovima)

1. Svi čvorovi leže na oplošja prizme ili krnje piramide kojoj jednu bazu čini podloga.
2. za svaku stranicu prizme odnosno piramide vrijedi: svi štapovi koji na njoj leže čine s podlogom odredjen ravni rešetkasti sistem.



Rastavljanjem na ravne rešetke može se riješiti i složeniji rešetkasti sistem. Kao primjer je odabran sistem prikazan na skici. Kod ovog primjera je postupak rješavanja složeniji nego u prethodnom, jer sve ravne rešetke na koje se sistem može rastaviti nisu povezane s podlogom. Ovdje će se kao zasebni dio uvesti i niz štapova izmedju čvorova 9,10,15.

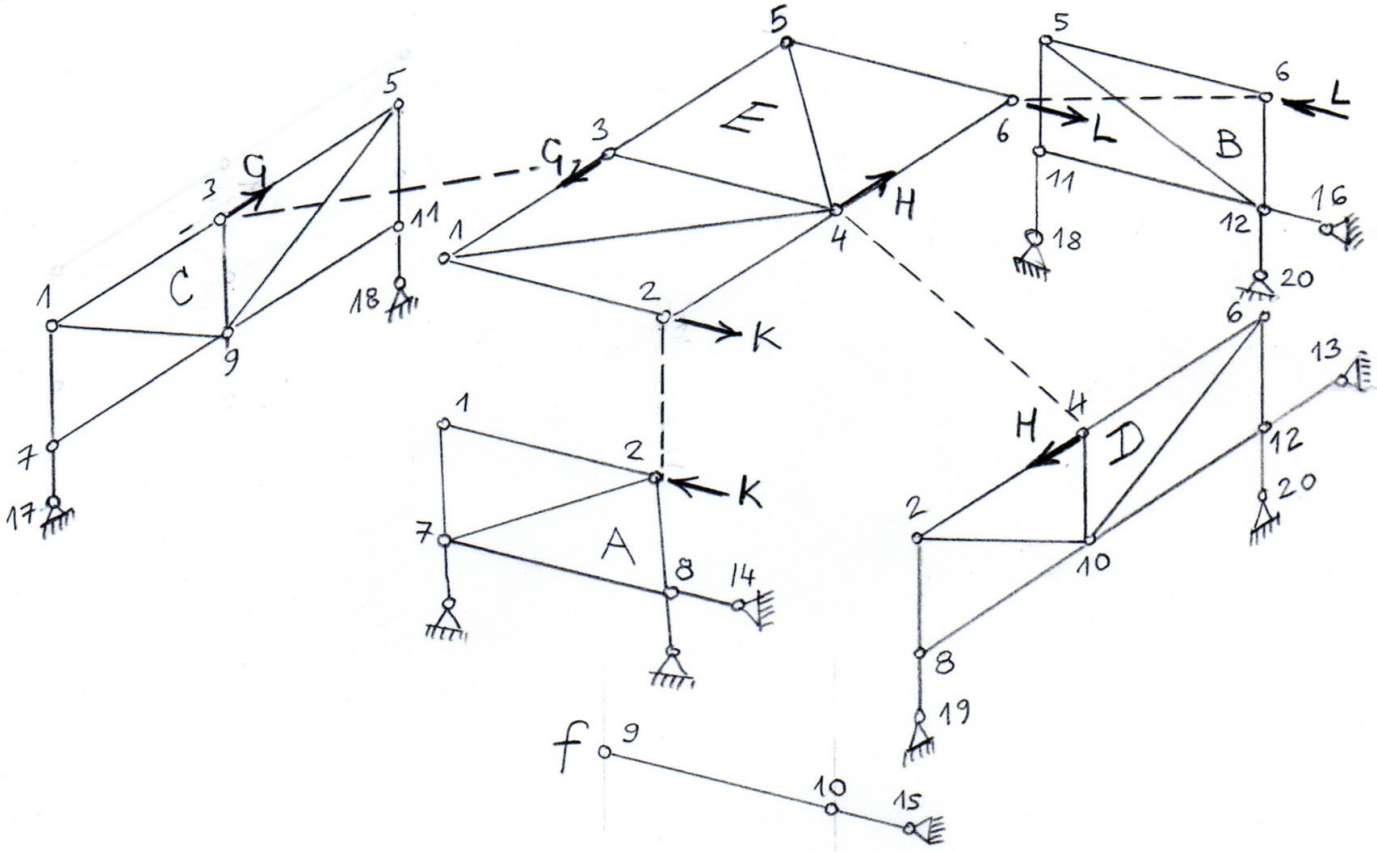




Pojedine ravne rešetke i odgovarajuće ravnine označiti će se slovima A,B,C,D,E, kao što je prikazano na donjoj skici. Sile opterećenja će se u svakom čvoru rastaviti na ravnine koje se u tom čvoru sastaju. Iznimke su čvorovi 9 i 10 u kojima će se opterećenje rastaviti na na pravac odredjen čvorovima 9,10,15 i na ravninu koja prolazi promatranim čvorom. Jedino za ta dva slučaja je rastavljanje jednoznačno.

HVPK- 85- 232

Za čvorove 3,4,7,8,11,12 u kojima se sastaju dvije ravnine, može se u jednoj od ravnina odabrati proizvoljan pravac i rastaviti silu opterećenja na taj pravac i preostalu ravninu. Način izbora dakako ne utječe na rješenje. Kod točaka 1,2,5,6 u kojima se sastaju tri ravnine, može se odabrati jedna ravnina i pravac u jednoj od dvije preostale.
Sistem će se zamišljeno rastaviti na pojedine ravne rešetke i niz štapova izmedju čvorova 9,10,15. Svakoj rešetki pripadaju komponente opterećenja koje leže u njenoj ravnini, a nizu štapova pripadaju komponente koje leže na pripadnom pravcu.



Rastavljeni sistem je prikazan na skici. Opterećenje nije ucrtano. Svaka rešetka će se riješiti kao odredjena ravna rešetka prosto spojena s ostatkom sistema. Rešetke A,B,D su prosto spojene s podlogom. Rešetka E je spojena s te tri rešetke. Postupak rješavanja će biti najpregledniji ako se zamisli da je taj spoj ostvaren samo u tri točke i da se u tim točkama prenose sile koje leže na presječnicama pripadnih ravnina. Nije bitno koji čvor na bridu će se odabrati za uvodjenje zamišljenog spoja. Ovdje su odabrani čvorovi 2,4,6 i sile u tim zamišljenim spojevima su označene s K,H,L. Spajanje je simbolički prikazano isprekidanim linijama.
Rešetka C je sa dva zglobna štapa povezana s podlogom, a čvorovi 1,3,5 su zajednički s rešetkom E. Zamisliti će se da je rešetka C spojena s rešetkom E samo u jednom čvoru i da se na tom mjestu prenosi sila paralelna s presječnicom ravnina C i E. Ovdje je odabran čvor 3, sile u zamišljenom spoju su ucrtane i označene s G. Vidljivo je da je takovo povezivanje rešetki analogno sastavljanju ulančenih sistema. U tom smislu će postojati i prirodni

HK/PK- 85- 233

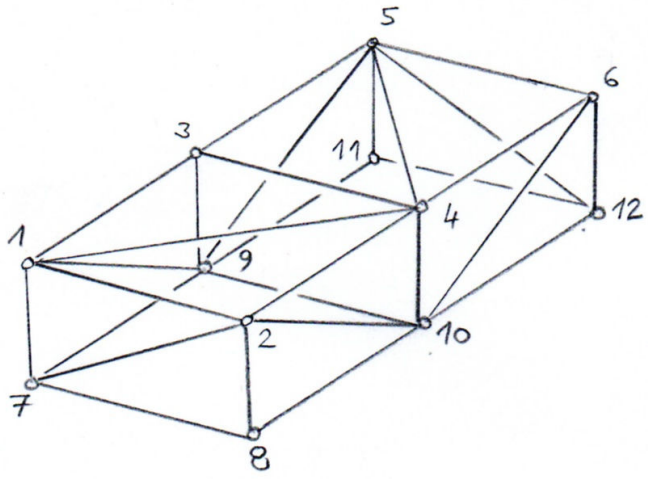
redoslijed rješavanja. Rješavanje započinje rješavanjem rešetke C; iz zadanog opterećenja se odredjuju sve sile u štapovima i sila G koja prikazuje vezu s rešetkom E. U slijedećem koraku se rješava rešetka E; iz zadanog opterećenja i poznate sile G odredjuju se sve sile u štapovima i sile K,H,L koje prikazuju vezu s rešetkama A,B,D, U posljednoj fazi se u proizvoljnom redoslijedu rješavaju rešetke A,B,D i sile u štapovima izmedju čvorova 9 i 10 i zgloba 15. Rešetka A se rješava za zadano opterećenje uz koje djeluje i poznata sila K. Na rešetku B osim opterećenja djeluje i poznata sila L. Na rešetku D djeluje osim opterećenja i poznata sila H.

Rješenje zadanog sistema za zadano opterećenje dobiva se superpozicijom rješenja za uvedene ravne rešetke i niz štapova.

Kao i u prethodnom primjeru dobivaju se sile u bridnim štapovima tako, da se zbroje doprinosi iz obje rešetke koje se u tom bridu sastaju.

Može se zaključiti da se zadani rešetkasti sistem može riješiti za proizvoljno opterećenje isključivo pomoću uvjeta ravnoteže, pa slijedi da se radi o odredjenom sistemu.

HWPL- 85- 234

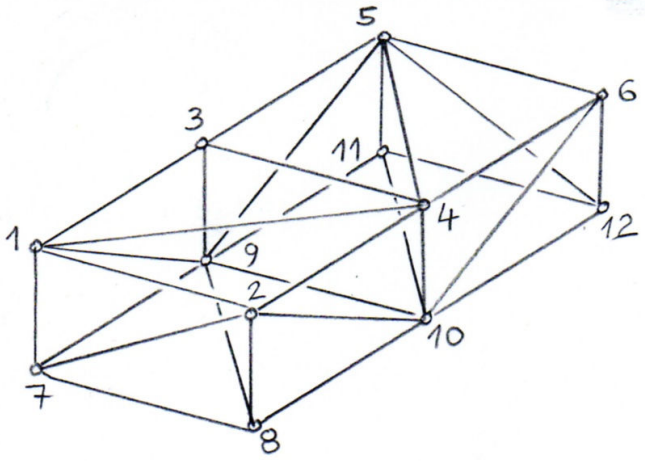


Treba uočiti da je kod promatranog sistema dio koji ne sadrži spojeve s podlogom mehanizam. Prema tome, prikazani dio sistema se ne ponaša kao jedno tijelo u krutom agregatnom stanju pa ne pretstavlja rešetkasti nosač. To se lako može ustanoviti prebrojavanjem štapova. Broj štapova s = 28 što je manje od broja nezavisnih uvjeta ravnoteže izoliranog sistema-

$s_0 = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 12 - 6 = 30$

Kako je promatrani sistem nastao isključivanjem spojeva iz odredjenog sistema, to je mehanizam u užem smislu.

Do istog zaključka se moglo doći i na drugi način: da je promatrani rešetkasti podsistem odredjen trebalo bi za njegovo odredjeno spajanje s podlogom upravo 6 štapova. Kako je u sistemu za koji je dokazano da je odredjen trebalo 8 štapova, može se zaključiti da podsistem prikazan na skici pripada mehanizmima.



Može se pokazati da je rešetkasti sistem prikazan na lijevoj skici odredjen spojeni sistem, pa je to primjer prostornog rešetkastog nosača.

Razliku prema gornjem podsistemu čine dva štapa uvedena izmedju čvorova 8 i 9, te izmedju čvorova 10 i 11.

Infinitezimalni pomaci linearno elastičnih štapnih sistema uslijed opterećenja

U ovom poglavlju dat je pregled postupaka potrebnih za rješavanje preodredjenih štapnih sistema. Izvodi i prikazi će biti navedeni kasnije.

Zbog složenosti oćih rješenja mehanike kontinuuma uvedeni su približni postupci za rješavanje mehaničkih stanja tijela specijalnog oblika: štapnih sistema i plošnih sistema.

Skup približnih postupaka za rješavnja štapnih sistema naziva se štapna mehanika ili mehanika štapnih sistema.

Najjednostavniji postupci u mehanici kontinuuma, pa tako i u štapnoj mehanici čine postupci zasnovani na slijedećim pretpostavkama:

1. materijal je linearno elastičan t.j. deformacija je proporcionalna veličini opterećenja koje je izazvalo deformaciju.
2. pomaci su infinitezimalni
3. ravnoteža se može formulirati na nedeformiranom sistemu.

Promatrati će se polje pomaka koje je definirano za sve točke štapnog sistema. Polje pomaka će se opisati u odabranom koordinatnom sustavu koji će se vezati za tri točke sistema, pri čemu te točke ne smiju ležati na istom pravcu.

Ako sistem sadrži nedeformabilnu podlogu, koordinatni sistem će se vezati za podlogu, a pripadni pomaci točaka sistema će se nazivati apsolutni pomaci.

U štapnoj mehanici se za opisivanje polja pomaka može uvesti pretpostavka ravnih presjeka prema kojoj će sve točke koje su se u nedeformiranom stanju nalazile na istom poprečnom presjeku i nakon deformacije ležati na istoj ravnini.

Tako dobiven lik će se nazivati pomaknuti i zaokrenuti poprečni presjek iako nije više okomit na pomaknutu os štapnog sistema.

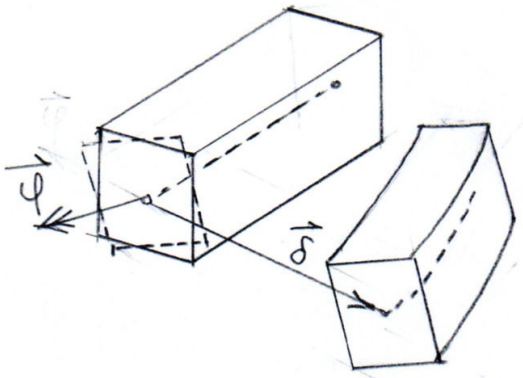
Poprečni presjek će se, prema tome, tokom deformacije ponašati kao nedeformabilno tijelo, pa se promjene njegovog položaja mogu odrediti s šest podataka: tri translacije neke točke i tri rotacije oko nekomplanarnih osi kroz tu točku.

Poznato je da se translacije mogu prikazati kao vektori, pa će se tri translacije na pravcima shvatiti kao komponente vektora ukupne translacije.

Može se pokazati da se umjesto niza rotacija oko raznih osi kroz istu točke uvijek može uvesti samo jedna rotacija oko pogodne osi koja će izazvati istu promjenu položaja. Osim toga se može pokazati da se infinitezimalne rotacije oko osi mogu prikazati kao vektori koji leže na osima rotacija. Dužina vektora je kut za koji se tijelo rotira, a smjer je odredjen pravilom desne ruke za rotaciju,

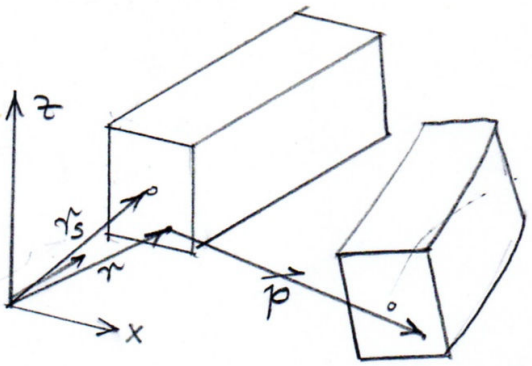
HWPK-85-235

U tom slučaju se tri vektora rotacije oko odabranih nekomplanarnih osi mogu shvatiti kao komponente vektora ukupne rotacije.



Najpogodnije je da se kao točka kroz koju prolazi os rotacije odabere težište poprečnog presjeka, dakle točka na osi štapnog elementa promatranog sistema. Preglednije je da se veličine pomaka i zaokreta ne označavaju kao ostale infinitezimalne veličine oznakom koja započinje malim slovom "d"

Na skici je prikazan štapni element prije i poslije pomaka . Nedeformirani položaj je označen s S_0, a deformirani sa S_1. Svaki poprečni presjek je pomicanjem prešao u novi položaj. Ovdje je istaknut krajnji presjek elementa. Njegov početni položaj je F_0 a krajnji je F_1 . Pomicanje se može prikazati kao rotacija i translacija, pa će se zamisliti da se presjek najprije zarotirao za kut φ u položaj F' , a zatim translatirao za δ u konačni položaj F_1.



Vektor pomaka bilo koje točke na poprečnom presjeku odredjen je s ta dva vektora prema izrazu:

$$\vec{p} = \vec{\delta} + \vec{\varphi} \times (\vec{r} - \vec{r}_s)$$

pri čemu je $\vec{r}_s$ radijvektor težišta presjeka, a $\vec{r}$ radijvektor promatrane točke.

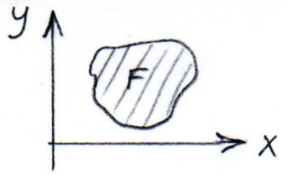
Prema tome je polje pomaka cijelog štapnog sistema odredjeno s dvije vektorske funkcije definirane na osi štapnog sistema. Te su funkcije: vektor infinitezimalne translacije poprečnog presjeka $\vec{\delta}(s)$ i vektor infinitezimalne rotacije poprečnog presjeka $\vec{\varphi}(s)$.

Nadalje će se $\vec{\delta}$ nazivati samo "pomak", a $\vec{\varphi}$ samo "zaokret".

Funkcije $\vec{\delta}(s)$ i $\vec{\varphi}(s)$ se odredjuju rješavanjem sistema diferencijalnih jednadžbi ili nekim drugim ekvivalentnim postupkom.

Ovdje će se prikazati rješenja u integralnom obliku, koja se zbog najčešćeg načina izvodjenja nazivaju još i energetska. Kako će se rješenja prikazati zasada bez izvoda ili objašnjenja, definirati će se veličine i pojmovi koji se u njima pojavljuju.

a) Površina lika



$$F = \int_F dF$$

U tehnici se često koristi nepreciznost; označavanja lika i njegove površine istom oznakom.

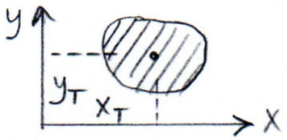
HWPK-85-236

b) Statički moment lika



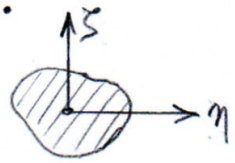
$$S_x = \int_F y\,dF\,; \qquad S_y = \int_F x\,dF$$

Statički moment se pojavljuje i kod odredjivanja težišta lika:



$$x_T = \frac{S_y}{F}\,; \qquad y_T = \frac{S_x}{F}$$

Ukoliko koordinatne osi prolaze težištem, statički momenti išče-zavaju.



$$S_\eta = 0\,; \qquad S_\zeta = 0$$

c) Osni momenti tromosti lika

$$I_{xx} = \int_F y^2\,dF \qquad I_{yy} = \int_F x^2\,dF$$

Ukoliko osi x i y prolaze težištem nazivaju se težišni osni momenti tromosti, a ponekad i samo "momenti tromosti"

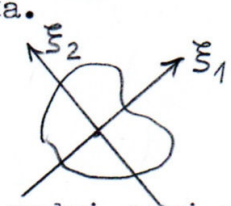
d) Centrifugalni moment tromosti

$$I_{xy} = \int_F xy\,dF$$

Ukoliko osi x i y prolaze težištem naziva se "težišni centrifu-galni moment tromosti"

g) Glavne osi tromosti lika. Glavni momenti tromosti

Za svaki ravni lik mogu se odrediti dvije medjusobno okomite koordinatne težišne osi tako da iščezava pripadni težišni centri-fugalni moment tromosti. Te se osi nazivaju glavne osi tromosti lika.



$$\int_F \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot dF = \emptyset$$

$$I_1 = \int_F \xi_2^2\,dF$$

$$I_2 = \int_F \xi_1^2\,dF$$

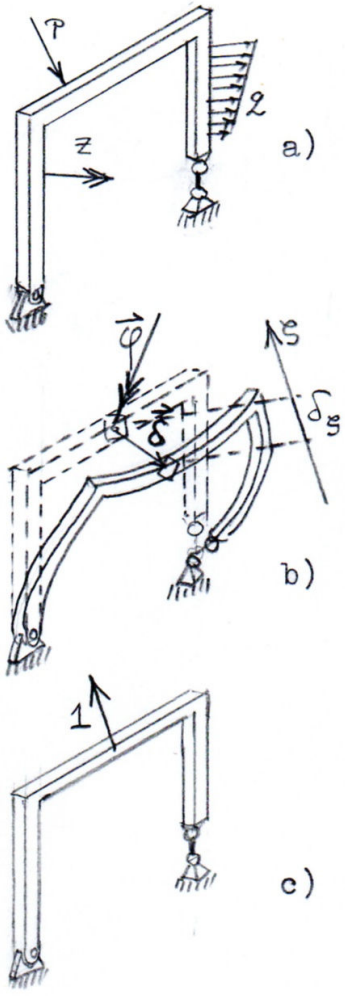
Pripadni osni momenti tromosti nazivaju se glavni momenti tromosti lika i označiti će se ovdje s I_1 i I_2. Glavni momenti tromosti čine ekstremne vrijednosti za sve težišne osne momente tromosti koji su mogući na zadanom liku.

h) Modul elastičnosti i modlul posmika

Modul elastičnosti, označen s E i modul posmika označen s G su dvije konstante koje potpuno određuju elastične karakteristi-ke homogenog izotropnog linearno elastičnog materijala. Dimenzija E i G je sila/površina, dakle dimenzija napona.

HWPK-85-237

Projekcije vektora aposlutnog pomaka



Promatra se štapni sistem čiji je početni, neopterećeni oblik poznat. Pod djelovanjem opterećenja sistem će promijeniti oblik i ta će promjena biti potpuno odredjena s dvije vektorske funkcije: funkcija pomaka točke sa osi i funkcija zaokreta poprečnog presjeka. Te su funkcije označene s $\vec{\delta}(s)$ i $\vec{\varphi}(s)$

Na skici je prikazan početni položaj sistema i opterećenje čija vrsta i raspored za postupak nisu bitni.

Na lijevoj skici je isprekidanom linijom prikazan početni položaj, a punom linijom pomaknuti položaj. Za proizvoljni presjek prikazani su: vektor pomaka $\vec{\delta}$ i vektor zaokreta $\vec{\varphi}$ Pomaci su zbog preglednosti ucrtani pretjerano; već je ranije navedeno da su δ i φ infinitezimalni.

Promatrani sistem treba riješiti za zadano opterećenje, što znači treba odrediti rezne sile za sve presjeke t.j. izraziti ih kao funkcije položaja na osi sistema:

$$N(s),\ T_1(s),\ T_2(s),\ M_t(s),\ M_1(s),\ M_2(s).$$

Vektori poprečnih sila i momenata savijanja leže na glavnim osima svakog presjeka, što je označeno odgovarajućim indeksima.

Za odredjivanje projekcije vektora pomaka u nekoj točki pomoću integralnog izraza, treba zadani sistem zasebno riješiti za mjerno opterećenje. U ovom slučaju mjerno opterećenje čini jedinična sila paralelna i usmjerena kao os na koju se pomak projicira. Hvatište sile se nalazi upravo na točki osi za koju se traži projekcija pomaka.

Za sistem na skici traži se projekcija vektora δ na os ζ pa je pripadno mjerno opterećenje prikazano na skici c).

Rješenjem zadanog sistema za mjerno opterećenje odredjuju se rezne sile za sve presjeke, t.j. biti će poznate funkcije:

$$n(s),\ t_1(s),\ t_2(s),\ m_t(s),\ m_1(s),\ m_2(s)$$

Rezne sile su označene malim slovima da bi se istaknula pripadnost mjernom opterećenju koje sadrži samo bezdimenzionalna djelovanja. Zbog toga će pripadni momenti savijanja imati dimenziju dužine, a pripadne sile, uzdužne i poprečne će biti takodjer bezdimenzionalne.

Projekcija traženog pomaka je odredjena integralnim izrazom:

HWPK-85-238

$$\delta_s = \int_S \frac{N(s)\cdot n(s)\,ds}{E(s)\cdot F(s)} + \int_S \frac{\alpha_1 T_1(s)\cdot t_1(s)\,ds}{G(s)\cdot F(s)} + \int_S \frac{\alpha_2 \cdot T_2(s)\cdot t_2(s)\cdot ds}{G(s)\cdot F(s)}$$

$$+ \int_S \frac{M_t(s)\, m_t(s)\,ds}{G(s)\, I_t(s)} + \int_S \frac{M_1(s)\cdot m_1(s)\,ds}{E(s)\cdot I_1(s)} + \int_S \frac{M_2(s)\cdot m_2(s)\,ds}{E(s)\cdot I(s)}$$

pri tome su α_1 i α_2 koeficijenti presjeka za odredjivanje deformacije od poprečnih sila, a I_t je konstanta s dimenzijom dužina^4 koja se pojavljuje u izrazima za torzione deformacije. Kod štapova promjenjivog presjeka biti će F, I_t, I_1, I_2 funkcije položaja. Konstante E i G kojima je odredjeno elastično ponašanje materijala konstantne su za svaki presjek, ali se mogu mijenjati u ovisnosti o položaju presjeka na osi.

Projekcija vektora apsolutnog zaokreta

Projekcija vektora zaokreta na odabranu os odredjuje se analogno odredjivanju projekcije vektora apsolutnog pomaka, ali se kao mjerno opterećenje pojavljuje jedinični koncentrirani moment koji djeluje u točki za koju se traži projekcija vaktora zaokreta.

Projekcija vektora apsolutnog zaokreta odredjuje se prema istom integralnom izrazu kao i projekcija apsolutnog pomaka.

Odredjivanje vektora pomaka i vektora zaokreta
za odabrani presjek zadanog štapnog sistema.

Vektor je u prostoru odredjen s tri projekcije na nekomplanarne osi, pa za potpuno odredjivanje vektora pomaka i zaokreta treba odrediti za svaki po tri projekcije; ukupno šest skalarnih podataka. Promatrani štapni sistem treba zasebno riješiti za šest različitih mjernih opterećenja. Uobičajeno je, da se u postupcima sa više mjernih opterećenja, ta opterećenja označe rednim brojevima, te da se cijelo mehaničko stanje sistema označi odgovarajućim rednim brojem.

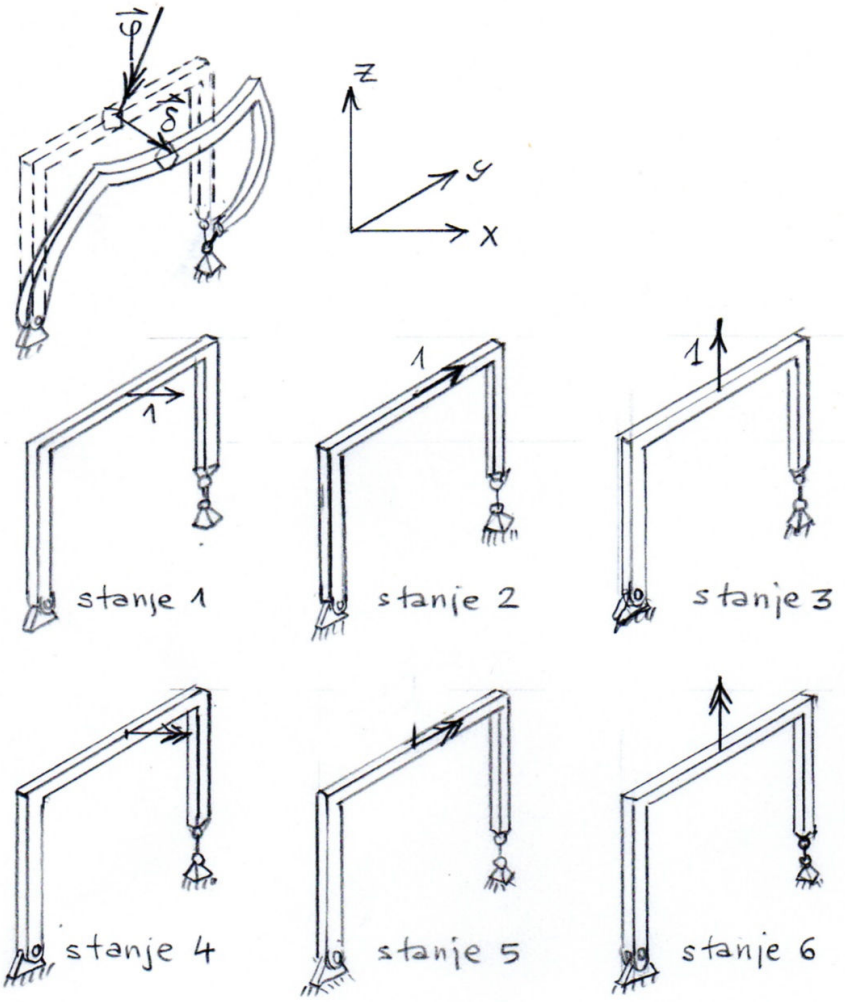
Oznake funkcija reznih sila mjernih opterećenja označiti će se indeksom rednog broja stanja. Kod veličina koje već imaju indeks, indeks rednog broja stanja će biti drugi indeks.

Za odredjivanje projekcija treba odabrati tri nekomplanarne osi.

Najčešće se uz sistem uvodi pravokutni koordinatni sistem npr xyz na čije osi će se projicirati traženi vektori pomaka i zaokreta.

Na skici na str. 240 je prikazan zadani sistem u početnom i pomaknutom položaju koji je nastao od djelovanja opterećenja. Na daljnjih šest skica sistema prikazano je šest mjernih opterećenja,

HWK - 85- 239



za koja treba zasebno riješiti promatrani sistem. Sistem treba dakako riješiti i za zadano opterećenje. Rezne sile od opterećenja su označene kao u ranijim primjerima, a rezne sile od mjernih opterećenja označiti će se indeksom pripadnog stanja:

$$n_i^*(s),\quad t_{1,i}(s),\quad t_{2,i}(s),\quad m_{t,i}(s),\quad m_{1,i}(s),\quad m_{2,i}(s)$$

Sve projekcije će se odrediti pomoću istog općeg integralnog izraza:

$$a_i = \int_s \frac{N(s)\cdot n(s)_i \cdot ds}{E(s)\cdot F(s)} + \int_s \frac{\alpha_1 T_1(s)\cdot t_{1,i}(s)\,ds}{G(s)\cdot F(s)} + \int_s \frac{\alpha_2 T_2(s)\cdot t_{2,i}(s)}{G(s)\,F(s)}$$

$$+ \int_s \frac{M_t(s)\cdot m_{t,i}(s)ds}{G(s)\cdot I_t(s)} + \int_s \frac{M_1(s)\cdot m_{1,i}(s)\,ds}{E(s)\cdot I_1(s)} + \int_s \frac{M_2(s)\cdot m_{2,i}(s)\,ds}{E(s)\cdot I_2(s)}$$

Veličina a_i će označavati rezultat integralnog izraza, a indeks će označavati mjerno opterećenje.
Za prikazani primjer gornji izraz će se odrediti šest puta; za vrijednosti indeksa od 1 do 6. Veza uobičajenog načina označavanja projekcija vektora i nove oznake je dana izrazima:

$$\delta_x = a_1;\quad \delta_y = a_2;\quad \delta_z = a_3$$

$$\varphi_x = a_4;\quad \varphi_y = a_5;\quad \varphi_z = a_6$$

Okomite projekcije na tri okomite osi jednake su koordinatama tih vektora u odgovarajućoj ortonormiranoj bazi, pa se traženi vektori mogu napisati simbolikom vektorske algebre:

$$\vec{\delta} = \delta_x \vec{i} + \delta_y \vec{j} + \delta_z \vec{k}; \qquad \vec{\varphi} = \varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k}$$

Dvoindeksno označavanje projekcija pomaka i zaokreta

Za daljnje postupke s projekcijama pomaka i zaokreta je pogodno da se sve veličine izračunate pomoću integralne formule označe s dva indeksa, jer se u podintegralnim funkcijama pojavljuju rezne sile od dva razna stanja. Opći oblik označavanja:

$a_{i,\nu}$

Prvi indeks, općenito označen s "i" je uvjek numerički i označava mjerno opterećenje, pa se prema tom indeksu odredjuje da li se veličina odnosi na projekciju pomaka ili zaokreta ili neke druge veličine odredjene mjernim opterećenjem "i"

Drugi indeks, označen općenito sa ν označava stanje koje je izazvalo polje pomaka štapnog sistema. Postoje dvije mogućnosti:

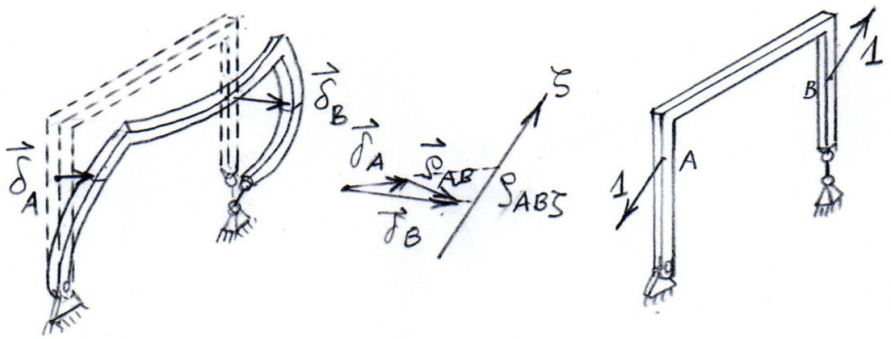
Drugi indeks je slovo; u tom slučaju polje pomaka je izazvano nekim opterećenjem koje će se u postupku označiti istim slovom, ili je polje pomaka izazvano nekim drugim vanjskim utjecajem npr. promjenom temperature.

Drugi indeks je broj; u tom slučaju je polje pomaka izazvano mjernim opterećenjem, koje može biti isto ili različito od prvoga.

$a_{i,j}$ pri čemu su oba indeksa brojevi, znači:
projekcija na os sile ili momenta mjernog opterećenja "i" pomaka ili zaokreta presjeka odredjenog hvatištem sile mjernog opterećenja "i", pri čemu je pomak ili zaokret izazvan djelovanjem mjernog opterećenja "j".

Često se kaže kraće: pomak ili zaokret na mjestu i u smjeru "i" uslijed jediničnog djelovanja na mjestu i u smjeru "j".

Relativni pomaci i zaokreti



HWPK-85-241

U daljnjim postupcima će se koristiti relativni pomaci i zaokreti.

Promatraju se dva presjeka; na skici su označeni s A i B. Pod djelovanjem zadanog opterećenja težišta presjeka će se pomaknuti. Pomaci su odredjeni vektorima $\vec{\delta}_A$ i $\vec{\delta}_B$.
Relativni pomak dviju točaka na osi štapnog sistema definirati će se kao razlika njihovih vektora pomaka. Relativni pomak je vektor koji će se označiti s dva indeksa:

$$\vec{\delta}_{AB} = \vec{\delta}_B - \vec{\delta}_A$$

Projekcije vektora relativnog pomaka odredjene su projekcijama vektora apsolutnih pomaka odgovarajućih točaka:

$$\delta_{AB\xi} = \delta_{B\xi} - \delta_{A\xi}$$

Izrazi za odredjivanje projekcija aposlutnih pomaka su poznati. Ako u postupku zasebno odredjivanje apsolutnih pomaka nije potrebno, može se postupak skratiti tako, da se uvede posebno mjerno opterećenje za odredjivanje projekcije relativnog pomaka. U izraz za projekciju relativnog pomaka uvrstiti će se integralni izrazi. Zbog preglednosti će se istaknuti samo prvi član, jer će zaključak vrijediti i za ostale članove.

$$\delta_{AB\xi} = \delta_{B\xi} - \delta_{A\xi} = \int_s \frac{N n_2 \, ds}{EF} - \int_s \frac{N n_1 \, ds}{EF} = \int_s \frac{N(n_2 - n_1)\, ds}{EF}$$

pri tome je s n_1 označena uzdužna sila mjernog opterećenja za odredjivanje $\vec{\delta}_A$, a s n_2 je označena uzdužna sila mjernog opterećenja za odredjivanje $\vec{\delta}_B$.
Vidljivo je da se projekcija relativnog pomaka može odrediti pomoću poznatog integralnog izraza u kojemu se pojavljuje razlika reznih sila dvaju mjernih opterećenja. Zbog linearnosti veze veličina iz opterećenja i reznih sila, može se uvesti novo mjerno opterećenje koje je razlika dvaju mjernih opterećenja za odredjivanje projekcija.
U konkretnom primjeru to mjerno opterećenje će sadržavati jediničnu silu pralelnu s osi projekcija u točki B i suprotnu jediničnu silu u točki A. Uzdužna sila od tog mjernog opterećenja biti će upravo $n_2 - n_1$. Analogno će vrijediti i za druge rezne sile.
Može se zaključiti:

Projekcija relativnog pomaka dvaju točaka štapnog sistema odredjuje se pomoću istog integralnog izraza kao i projekcija apsolutnog pomaka, ali se uvodi odgovarajuće mjerno opterećenje, koje sadrži dvije suprotne jedinične sile paralelne s zadanom osi, a njihova hvatišta se nalaze u točkama za koje se odredjuje relativni pomak.

I za projekciju relativnog pomaka može se uvesti dvoindeksno označavanje $a_{i,\phi}$ pri čemu indeks "i" označava mjerno opterećenje, a ϕ oznaku opterećenja koje izaziva pomake.

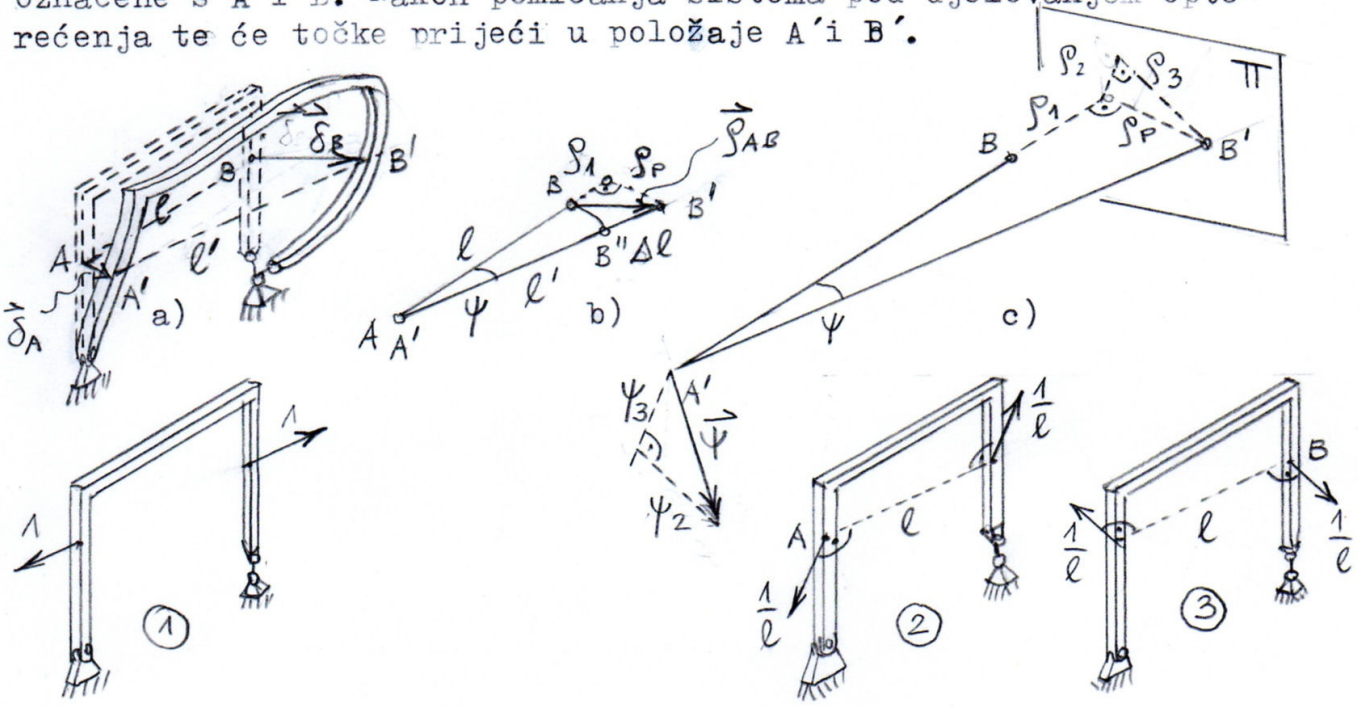
HNPK-85-242

Analogno se može zaključiti i za relativni zaokret dvaju presjeka štapnog sistema:

Projekcija relativnog zaokreta dvaju presjeka štapnog sistema odredjuje se pomoću istog integralnog izraza kao i projekcija apsolutnog pomaka, ali se uvodi odgovarajuće mjerno opterećenje koje sadrži dva suprotna jedinična koncentrirana momenta paralelna s osi projekcija, a njihova hvatišta se nalaze na presjecima za koje se odredjuje relativni zaokret.

Promjena udaljenosti i apsolutni zaokret spojnice točaka štapnog sistema.

Promatraju se dvije točke na osi štapnog sistema. Na skici su označene s A i B. Nakon pomicanja sistema pod djelovanjem opterećenja te će točke prijeći u položaje A′ i B′.



Udaljenost točaka na početnom položaju sistema označiti će se sa ℓ, a udaljenost točaka na pomaknutom sistemu označiti će se sa ℓ'. Odrediti će se promjena udaljenosti t.j. razlika $\ell' - \ell$ i definirati će se kut zaokreta spojnice točaka.

Iz proizvoljno odabrane točke konstruirati će se paralele s početnom dužinom ℓ i dužinom ℓ' koja odgovara pomaknutom stanju i to tako da će se premještena točka A poklapati s premještenom točkom A′, kao što je prikazano na skici b). Premještena točka B će u tom slučaju odredjivati početak, a premještena točka B′ šiljak vektora relativnog pomaka tih točaka $\vec{\delta}_{AB}$. Taj će se vektor projicirati na pravac odredjen dužinom ℓ. Dobivena projekcija je označena s δ_1. Time je odredjena i projekcija vektora $\vec{\delta}_{AB}$ na ravninu π okomitu na ℓ, i označena s δ_P.
Razlika ℓ' i ℓ može se odrediti tako da se ℓ zarotira na pravac odredjen s ℓ' i tako prenese ℓ na ℓ'. Time je dobivena točka B″. Izmedju B″ i B′ se pojavila tražena promjena udaljenosti,

HWPK-85-243

koja je označena s $\Delta\ell$. Kako je $\vec{\rho}_{AB}$ infinitezimalna veličina, biti će i kut ψ izmedju ℓ i ℓ' infinitezimalan, pa se može pokazati da se ρ_1 i $\Delta\ell$ razlikuju za malu veličinu višeg reda, pa će na limesu vrijediti $\Delta\ell = \rho_1$ t.j. promjena udaljenosti dviju točaka jednaka je projekciji vektora relativnog pomaka tih točaka na os odredjenu početnim položajem spojnice. Može se zaključiti:

Promjena udaljenosti dviju točaka štapnog sistema uslijed djelovanja opterećenja odredjuje se prema istom integralnom izrazu kao i apsolutni pomak, ali za mjerno opterećenje koje sadrži dvije suprotne jedinične sile koje leže na spojnici točaka za koje se traži promjena udaljenosti.

Odgovarajuće mjerno opterećenje je prikazano na str.243 s oznakom 1. Uz uvedeno dvoindeksno označavanje veličina odredjenih integralnim izrazom, promjena udaljenosti se može izraziti sa: $\Delta\ell = a_{1,\phi}$ Pozitivni $a_{1,\phi}$ znači promjenu udaljenosti u smislu sila mjernog opt.

Kut koji se pojavljuje izmedju paralelno prenesene duljine ℓ i paralelno prenesene duljine ℓ' definirati će se kao apsolutni zaokret spojnice točaka. Na skici je označen s ψ. Veličina kuta ψ se može odrediti iz pravokutnog trokuta čije su katete $\ell + \rho_1$ i ρ_P Direktno se dobiva: $$tg\,\psi = \frac{\rho_P}{\ell + \rho_1}$$

Kako je ρ_1 infinitezimalan može ga se zanemariti prema ℓ i nadalje kako je ρ_P infinitezimalan a ℓ konačan biti će njihov omjer infinitezimalan, a u tom slučaju se tangens i pripadni kut izražen u lučnoj mjeri razliku u za malu veličinu višeg reda, pa će na limesu vrijediti: $$\psi = \frac{\rho_P}{\ell}$$

ρ_P se ne može direktno odrediti jer unaprijed nije poznata ravnina koju odredjuju ℓ i ℓ' naneseni iz iste točke. Okomito na ℓ će se odabrati dva pravca i odrediti će se projekcije ρ_P na te pravce. Kako je ρ_P projekcija relativnog pomaka na ravninu π biti će ρ_2 i ρ_3 projekcije vektora relativnog pomaka na odabrane okomite pravce.

Pogodno je da se kut apsolutnog zaokreta spojnice ψ uvede kao vektor okomit na ℓ i na ℓ' dakle okomit na ravninu odredjenu paralelama s ℓ i ℓ' nanesenim iz iste točke. Smisao rotacije kuta će biti onaj koji odgovara da se paralela s ℓ zarotira oko zajedničke točke do ℓ'. Na skici c) je ucrtan vektor apsolutnog zaokreta spojnice. Vektor $\vec{\psi}$ je okomit na spojnicu pa je dovoljno prikazati njegovo projiciranje na osi koje su okomite na spojnicu. Vektor je okomit i na dužinu ρ_P pa će svakoj projekciji tog vektora na pravac okomit na spojnicu točaka odgovarati projekcija dužine ρ_P na pravac okomit na spojnicu točaka ali i na pravac na koji je projiciran vektor $\vec{\psi}$. Dužine označene s ρ_3 i ψ_3 su okomite. Zbog sličnosti trokuta ρ_2, ρ_3, ρ_P i trokuta ψ_2, ψ_3, ψ vrijediti će:

$$\psi_3 = \frac{\rho_3}{\ell}$$

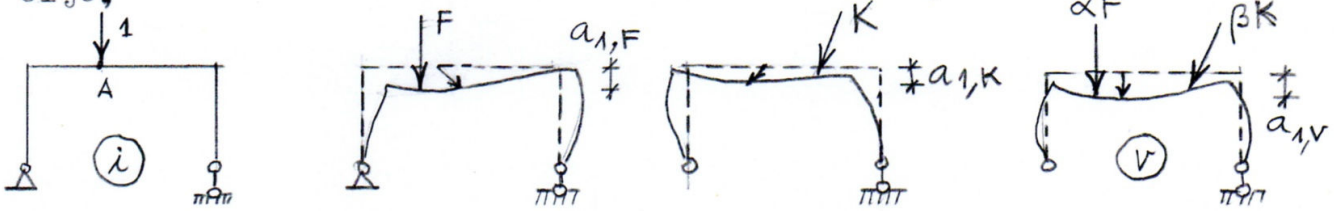
HWPK-85-244

Projekcija vektora apsolutnog zaokreta spojnice dviju točaka štapnog sistema na odabranu os okomitu na spojnicu tih točaka, odrediti će se pomoću istog integralnog izraza kao i apsolutni pomak (str.240), ali se uvodi odgovarajuće mjerno opterećenje. Mjerno opterećenje čini spreg čije sile su okomite na spojnicu točaka i istovremeno okomite na os projekcija. Veličina sila sprega je $1/\ell$ pri čemu je ℓ udaljenost točaka, a hvatišta sila su na promatranim točkama .

Na skici na str.243 su prikazana dva mjerna opterećenja za odredjivanje projekcija vektora zaokreta $\overrightarrow{\psi}$, a označena su sa 2 i 3.

Superpozicija pomaka

Veza infinitezimalnih pomaka i zaokreta linearno elastičnih sistema i veličina koncentriranih sila i momenata koji ih izazivaju je linearna. Isto vrijedi i za intenzitete distribuiranih djelovanja. Zbog toga će linearnoj kombinaciji opterećenja odgovarati linearna kombinacija pripadnih pomaka. U tehnici se često kaže: za infinitezimalne pomake i zaokrete vrijedi princip superpozicije.



Za primjer se promatra neki štapni sistem prikazan na skici. Na sistemu se odabire točka A. Promatrati će se projekcija pomaka točke A na os odredjenu mjernim opterećenjem označenim s "i". Promatra se djelovanje sile F na zadani sistem; projekcija pomaka uslijed tog opterećenja označiti će se $a_{i,F}$. Promatrati će se nadalje zasebno djelovanje sile K na isti sistem; pripadna projekcija pomaka točke A označiti će se $a_{i,K}$. Treći slučaj opterećenja istog sistema je linearna kombinacija prethodnih slučaja: na mjestu sile F pojavljuje se paralelna sila veličine αF , a na mjestu sile K pojavljuje se paralelna sila veličine βK. Taj slučaj opterećenja će se označiti s "v", pa će odgovarajuća projekcija pomaka točke A biti $a_{i,v}$. Prema principu superpozicije će projekcije pomaka povezivati ista linearna kombinacija koja povezuje i opterećenja:

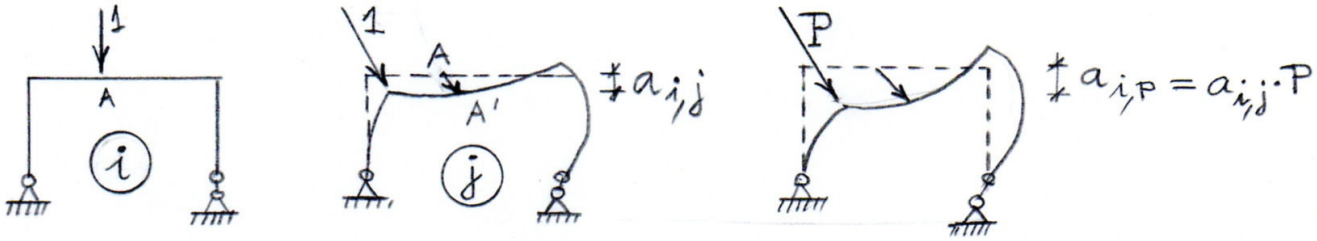
$$a_{i,v} = \alpha a_{i,F} + \beta \cdot a_{i,K}$$

Princip superpoziicije vrijedi za sve infinitezimalne veličine odredjene poljem pomaka, koje su ovdje općenito označene s $a_{i,\phi}$

HWPK- 85- 245

Projekcija pomaka ili zaokreta prikazana pomoću jediničnog djelovanja

Iz principa superpozicije se može zaključiti da se svaka projekcija pomaka ili zaokreta izazvana koncentriranom silom ili momentom može prikazati kao umnožak projekcije pomaka ili zaokreta izazvanog odgovarajućim jediničnim djelovanjem s veličinom zadane sile ili momenta.
U tom se slučaju pojavljuju dva stanja s jediničnim djelovanjima: prvo koje je mjerno i drugo u kojemu se pojavljuje jedničnо djelovanje na mjestu i u smjeru zadanog koncentriranog djelovanja.



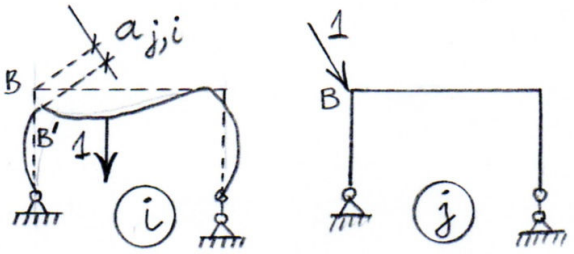
$\sharp a_{i,j}$ $\sharp a_{i,P} = a_{i,j} \cdot P$

Maxwell-Betti-jev stavak

HWPK-85-246

U prethodnom odsjeku je uvedena mogućnost da jedinično djelovanje bude uzrok pomaka štapnog sistema. Za odredjivanje projekcija pomaka ili zaokreta treba uvesti daljnje jedinično djelovanje, koje će biti mjerno opterećenje. Očito se može zamisliti obrat: jedninično djelovanje koje je u prvom slučaju bilo mjerno opterećenje može biti uzrok pomaka sistema, a jedninično djelovanje koje je u prvom slučaju bilo uzrok može se iskoristiti kao mjerno opterećenje. Analizom integralnog izraza se lako zaključuje da će u oba slučaja veličina projekcije biti jednaka. Naime; u podintegralnoj funkciji se pojavljuju umnošci istih reznih sila, pa je zbog komutativnosti produkta rezultat u oba slučaja jednak.

$$a_{i,j} = \int_S \frac{n_i(s) \cdot n_j(s)\, ds}{E(s) \cdot F(s)} + \ldots = \int_S \frac{n_j(s) \cdot n_i(s)\, ds}{E(s) \cdot F(s)} = a_{j,i}$$



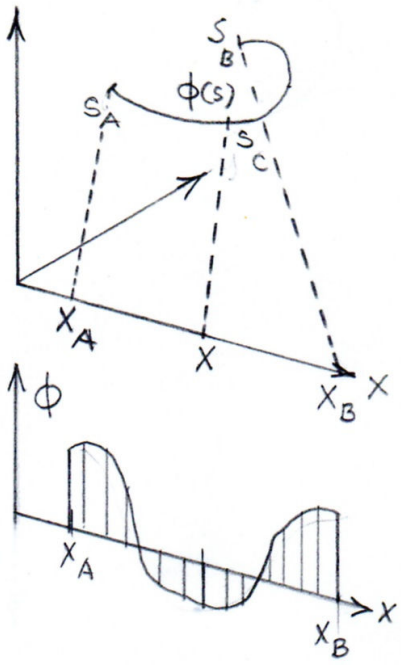
Na skicama je prikazan obrat slučaja prikazanog u prethodnom odsjeku: projekcija pomaka točke B na silu stanja"j"pri čemu je pomak izazvan jediničnom silom stanja "i".

Prikazana zakonitost je specijalni slučaj Maxwell-Bettijevog stavka koji se u općem slučaju formulira energetski.

Lako se zaključuje da Maxwell-Betti-jev stavak vrijedi i za bilo koji par mjernih opterećenja, koja se mogu odnositi bilo na odredjivanje apsolutnih ili relativnih veličina ili njihovih linearnih kombinacija.

Napomena o linijskom integralu

Za primjene u tehničkoj mehanici pogodno je uvesti geometrijsku interpretaciju linijskog integrala. Na zadanoj krivulji promatra se odsjek izmedju točaka A i B. Točki A se pridružuje proizvoljna veličina s_A, a svakoj drugoj točki ofisjeka pridružuje se njena udaljenost po krivulji od točke A uvećana za s_A: Ako se promatrana točka u odsjeku označi s C, vrijedi:



$$s_C = s_A + \int_A^C ds$$

Na taj način je svaka točka odredjena veličinom s. Na odsjeku krivulje može se definirati funkcija od "s". Takova funkcija će se općenito označiti s $\phi(s)$. Promatra se linijski integral $\int_A^B \phi(s)\,ds$

Odsjeku AB na promatranoj krivulji pridružiti će se osjek x_A, x_B na koordinatnoj osi x tako, da za svaku točku vrijedi:

$$x = s$$

Funkcija definirana na krivulji može se sada definirati na pridruženom odsjeku osi x, pa će vrijediti:

$$\int_A^B \phi(s)\,ds = \int_{x_A}^{x_B} \phi(x)\,dx$$

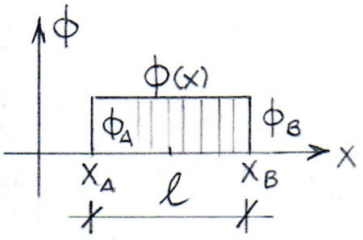
Odredjeni integral na pridruženom odsjeku koordinatne osi biti će jednak linijskom integralu na zadanom odsjeku krivulje. Pomoću odredjenog integrala se može odrediti površina omedjena grafom funkcije, rubnim ordinatama i koordinatnom osi, pri čemu vrijedi: Za područje s pozitivnim funkcijskim vrijednostima odredjeni integral je jednak površini grafa funkcije, a za područje s negativnim funkcijskim vrijednostima odredjeni integral je jednak površini grafa funkcije uzetoj s negativnim predznakom.

Pomoću geometrijske interpretacije se lako odredjuju integrali jednostavnih funkcija, a moguća je i gruba kontrola u složenijim slučajevima.

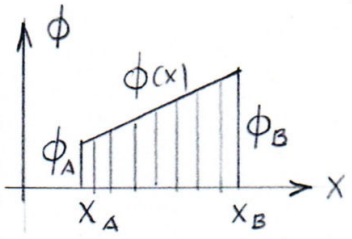
U većini primjera odredjivanja pomaka ili zaokreta štapnih sistema podintegralne funkcije su polinomi. Polinom n-tog stupnja je potpuno odredjen s ordinatama u n+1 točki, pa se odredjeni integrali mogu izraziti pomoću tih ordinata. Pripadne apscise se u najjednostavnijim slučajevima odabiru na rubovima područja integracije i pravilno rasporedjene po području.

Navesti će se izrazi za odredjene integrale izražene pomoću ordinata za polinome od 0-tog do 3-eg stupnja.

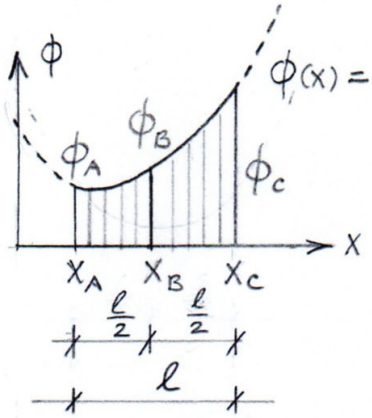
HWPK-85-247



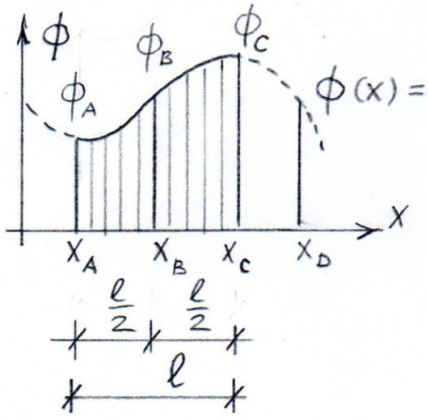
$$\int_{X_A}^{X_B} \phi(x)\,dx = \ell \cdot \phi_A$$



$$\int_{X_A}^{X_B} \phi(x)\,dx = \frac{\ell}{2}\left(\phi_A + \phi_B\right)$$



$$\int_{X_A}^{X_C} \phi(x)\,dx = \frac{\ell}{6}\left(\phi_A + 4\cdot\phi_B + \phi_C\right)$$



$$\int_{X_A}^{X_C} \phi(x)\,dx = \frac{\ell}{6}\left(\phi_A + 4\cdot\phi_B + \phi_C\right)$$

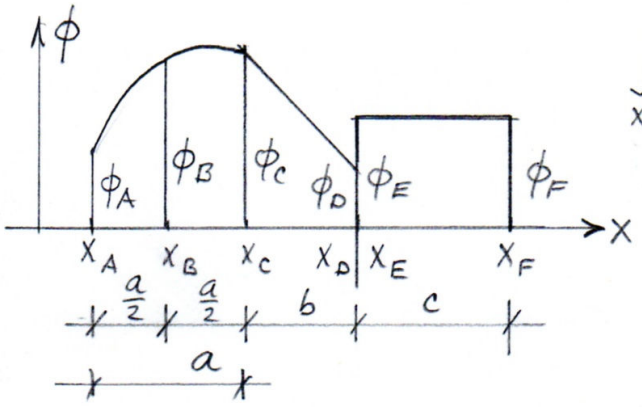
Podintegralne funkcije koje se pojavljuju u izrazima za pomake često sadrže prekide, i to prekide u funkcijskoj vrijednosti koji se utehnici često nazivaju "skokovi" , prekide u prvoj derivaciji, koji se u tehnici često nazivaju "lomovi", kao i prekide u višim derivacijama.

Na mjestu prekida podijeliti će se područje integracije na parcijalna područja na kojima će za podintegralnu funkciju vrijediti isti analitički izraz. Ukoliko je taj izraz polinom do najviše trećeg stupnja primijeniti će se gornji izrazi za svako parcijalno područje zasebno.

Na skici na str.249 je prikazana funkcija s tri parcijalna područja: izmedju x_A i x_C funkcija je polinom trećeg stupnja, izmedju x_C i x_D je funkcija linearna. Izmedju točaka x_E i x_F

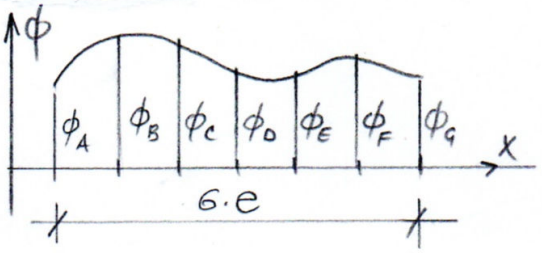
HWPK- 85-248

funkcija je konstantna, pri čemu su x_D i x_E infinitezimalno blize točke, koje se u tehnici nekad, smatraju istom točkom, pa se obično kaže da postoji "funkcijska vrijednost s lijeva" i "funkcijska vrijednost s desna".



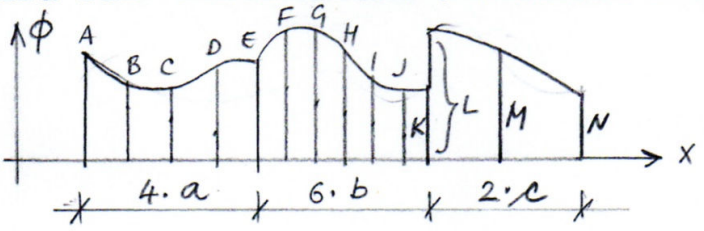
$$\int_{x_A}^{x_F} \phi(x)\,dx = \frac{a}{6}\left(\phi_A + 4\phi_B + \phi_C\right) + \frac{b}{2}\left(\phi_C + \phi_D\right) + c\cdot\phi_E$$

Za odredjene integrale koji se ne mogu izraziti u zatvorenom obliku kao i za sve složenije slučajeve u kojima korištenje točnih izraza može otežavati provedbu, koristi se u tehnici numerička integracija. Ovdje će se navesti samo Simpsonova numerička integracija. Područje integracije se dijeli na parni broj jednakih podjeljaka. Po dva podjeljka zajedno čine parcijalno područje na kojem se zadana funkcija približno zamjenjuje polinomom drugog stupnja. Kako se većina funkcija u tehnici prikazuje grafovima, često se Simpsonova integracija opisuje i kao aproksimacija zadane krivulje po odsjecima kvadratnim parabolama. Na rubovima područja kao i na granicama podjeljaka trebaju biti poznate funkcijske vrijednosti, pa se za svako parcijalno područje koje sadrži dva podjeljka koristi prikazani izraz za odredjeni integral kvadratne funkcije. Ako se duljina podpodručja izrazi duljinom podjeljka e, a doprinosi svih podpodručja zbroje, dobiva se:



$$\int_{x_A}^{x_G} \phi(x)\,dx = \frac{e}{3}\left(\phi_A + 4\phi_B + \phi_C + 4\phi_D + \phi_E + 4\phi_F + \phi_G\right)$$

Ukoliko je poznato da funkcija koja se približno integrira Simpsonovom formulom sadrži diskontinuitete odabrati će se podjela tako da se diskontinuiteti nalaze na granicama parcijalnih područja, t.j. da se pojedinom kvadratnom funkcijom aproksimira samo kontinuirani dio zadane funkcije. Broj podjeljaka odabrati će se prema toku funkcije. U većini tehničkih primjena se izbor vrši intuitivno: kod "naglijih" promjena veći broj podjeljaka. Na prikazanom primjeru su zbog preglednosti funkcijske vrijednosti označene samo

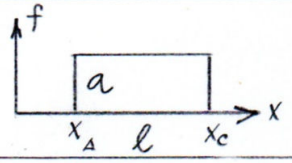
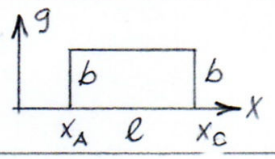
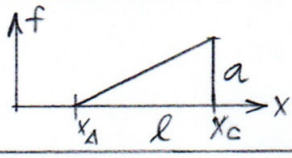
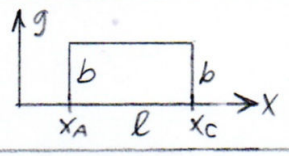
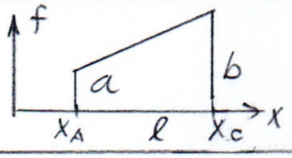
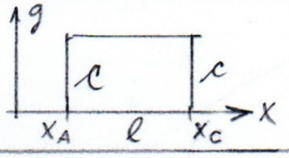
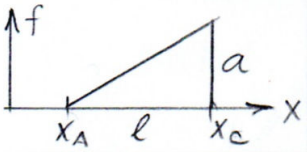
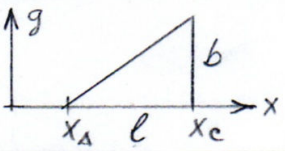
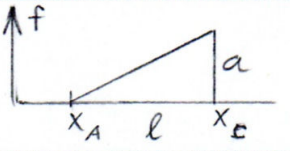
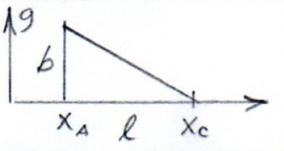
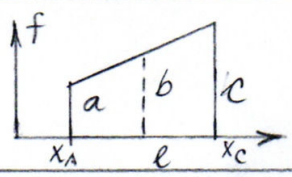
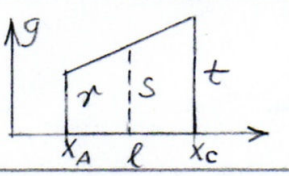
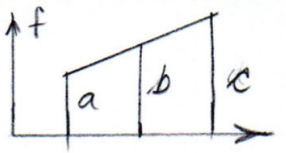
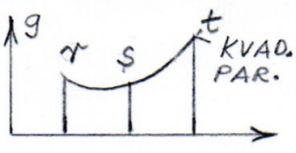


HWPK-85-249

velikim slovima; dakle umjesto dosadašnjeg ϕ_A biti će samo A . Odredjeni integral će se aproksimirati prema:

$$\int_{X_A}^{X_N} \phi(x)\,dx = \frac{a}{3}(A + 4B + 2C + 4D + E) + \frac{b}{3}(E + 4F + 2G + 4H + I + 4J + K) + \frac{c}{3}(L + 4M + N)$$

U slučaju konstantnih nazivnika svode se podintegralne funkcije u izrazima za pomeke i zaokrete na odredjeni integral produkta dviju funkcija pomnožen s konstantom. U nekim slučajevima je pogodno da se odredjeni integral produkta dviju funkcija izrazi pomoću ordinata tih funkcija. Navesti će se nakoliko jednostavnih primjera.

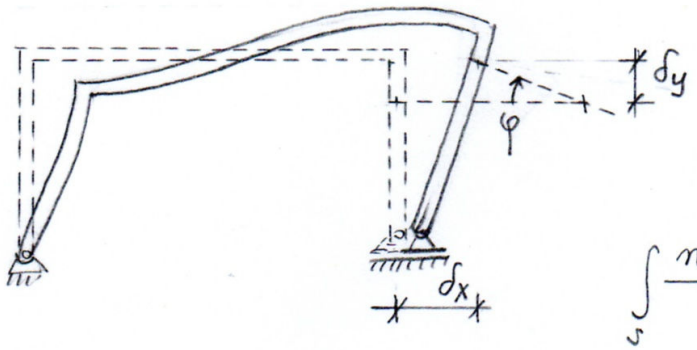
$f(x)$	$g(x)$	$\int_{X_A}^{X_C} f(x)\cdot g(x)\,dx$
		abl
		$\frac{abl}{2}$
		$\frac{(a+b)c\cdot\ell}{2}$
		$\frac{ab\ell}{3}$
		$\frac{abl}{6}$
		$\frac{\ell}{6}(2ar + at + cr + 2ct)$
		$\frac{\ell}{6}(ar + 4bs + ct)$

HWPK-85-250

XI

Pomaci i zaokreti ravnih sistema pri djelovanju opterećenja u ravnini

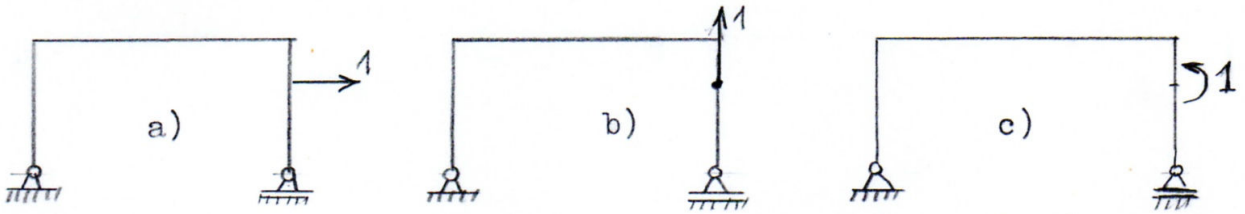
Ravni štapni sistemi imaju posebnu ravninu simetrije u kojoj leže osi svih štapova i svi spojevi i koja se naziva ravnina sistema. Ako opterećenje štapova djeluje samo u toj ravnini (sile u ravnini, a momenti okomiti na ravninu) biti će različite od nule samo odgovarajuće komponente sila u spojevima i reznih sila. Pri takovom opterećenju ravnog štapnog sistema pojaviti će se samo pomaci i zaokreti u ravnini: vektor pomaka neke točke osi sistema leži u ravnini, a vektor zaokreta nekog poprečnog presjeka je okomit na ravninu sistema. U tom slučaju će samo tri integrala u integralnom izrazu biti različita od nule.



$$a_{ij} = \int_s \frac{m_i(s) \cdot m_j(s)\, ds}{E(s) \cdot I(s)} + \int_s \frac{n_i(s) \cdot n_j(s)\, ds}{E(s) \cdot F(s)} + \int_s \frac{\alpha\, t_i(s) \cdot t_j(s)\, ds}{G(s) \cdot F(s)}$$

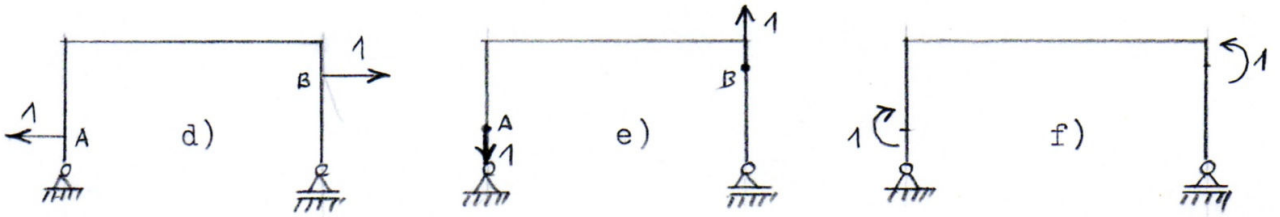
Naveden je izraz za slučaj u kojemu pomake izaziva mjerno opterećenje. Izraz za slučaj u kojemu pomake izaziva proizvoljno opterećenje je analogan; umjesto m_j, n_i, t_i uvrštavaju se M, T, N.

Korištenje mjernih opterećenja u ravnini je specijalni slučaj njihovog korištenja u prostoru. Projekcija apsolutnog pomaka se



se odredjuje pomoću jedninične sile (skice a) i b)). Za potpuno odredjivanje vektora apsolutnog pomaka potrebne su dvije projekcije, pa prema tome i dva mjerna opterećenja. Za odredjivanje zaokreta potrebno je jedno mjerno opterećenje. U ovom slučaju se obično i ne uvodi zaokret kao vektor.

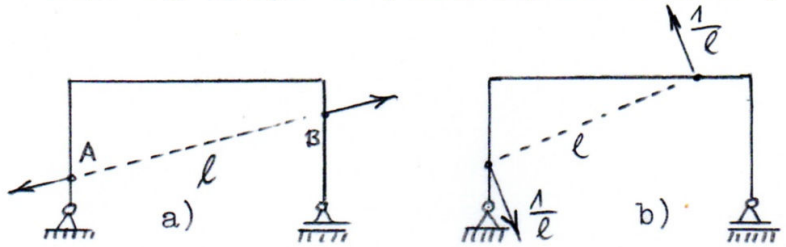
Za odredjivanje projekcije relativnog pomaka dviju točaka osi uvodi se mjerno opterećenje s dvije paralelne, suprotno usmjerene sile koje djeluju u promatranim točkama osi (skice d) e)).



HWPK-85-251

Mjerno opterećenje za odredjivanje relativnog zaokreta dvaju presjeka štapnog sistema sadrži dva suprotna jedninična koncentrirana momenta (str.251.skica f)). Pozitivan rezultat integralnog izraza znači da se presjeci relativno zaokreću u smislu momenata mjernog opterećenja, a negativni predznak znači da se presjeci relativno zaokreću suprotno od smisla tih momenata.

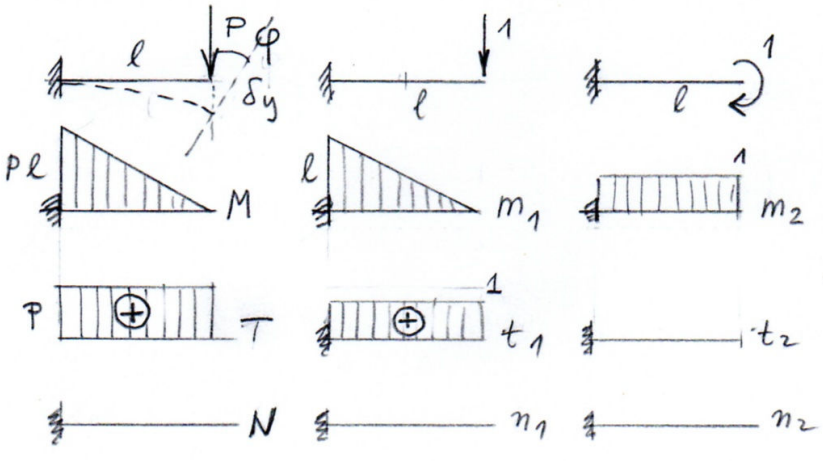
Za odredjivanje promjene udaljenosti dviju točaka s osi ravnog štapnog sistema uvodi se, kao i uprostoru, mjerno opterećenje koje sadrži dvije suprotne jedinične koncentrirane sile koje leže na spojnici promatranih točaka (skica a)). Pozitivna promjena udaljenosti znači promjenu u smislu djelovanja sila mjernog opterećenja, a negativna znači promjenu suprotnu od smisla djelovanja tih sila.



Za mjerno opterećenje sa skice a) pozitivna veličina znači produljenje.

Za odredjivanje apsolutnog zaokreta spojnice dviju točaka uvodi se mjerno opterećenje koje sadrži dvije suprotne sile veličine $1/\ell$ koje djeluju na promatrane točke i okomite su na spojnicu tih točaka. Pri tome je s ℓ označena udaljenost točaka(skica b)).

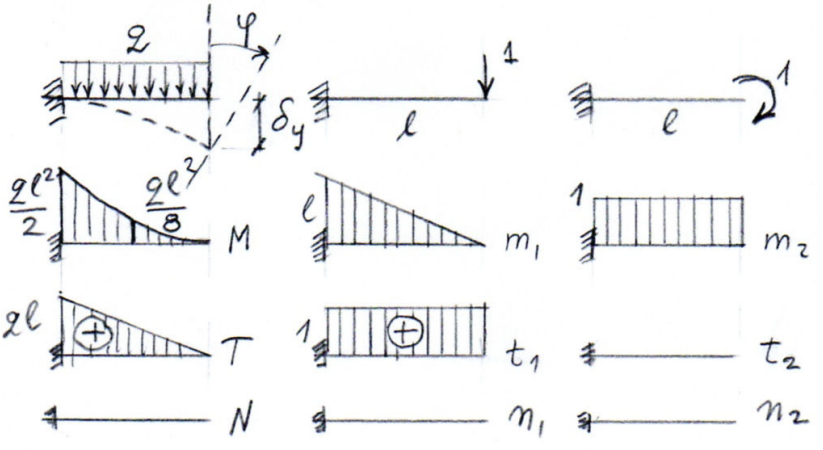
Navesti će se neki osnovni primjeri odredjivanja apsolutnih pomaka i zaokreta ravnih štapnih sistema koji sadrže samo podlogu i jedan štap kojem je os dužina. Zbog preglednosti će se uz svaki slučaj opterećenja prikazati i mjerna opterećenja.



$$\delta_y = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{\alpha P\ell}{GF}$$

$$\varphi = \frac{P\ell}{2EI}$$

$$\delta_x = 0$$

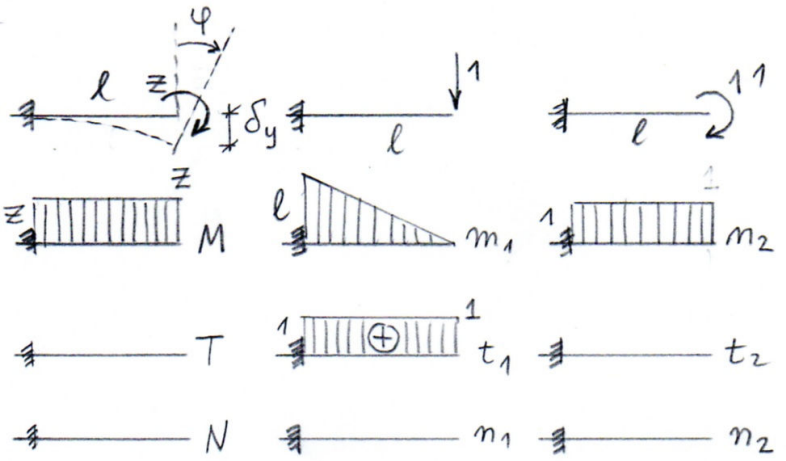


$$\delta_y = \frac{q\ell^4}{8EI} + \frac{\alpha q\ell^2}{2GF}$$

$$\varphi = \frac{q\ell^3}{6EI}$$

$$\delta_x = 0$$

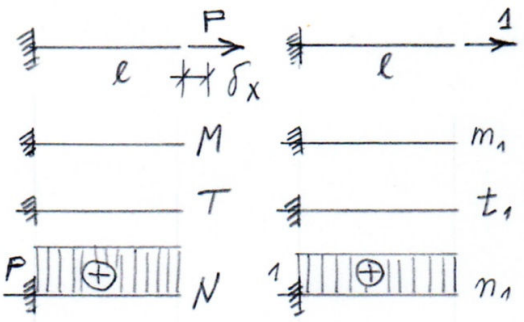
HWPK-85-252



$$\delta_y = \frac{Z\ell}{2EI}$$

$$\varphi = \frac{Z\ell}{EI}$$

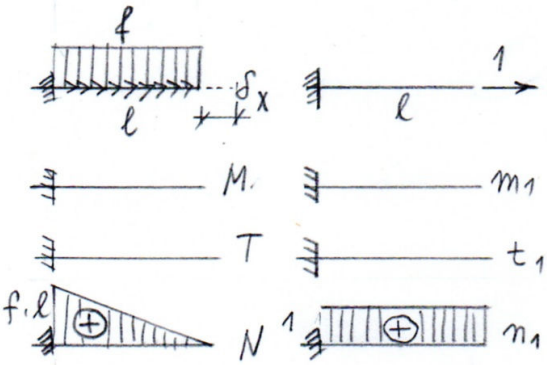
$$\delta_x = 0$$



$$\delta_x = \frac{P\ell}{EF}$$

$$\delta_y = 0$$

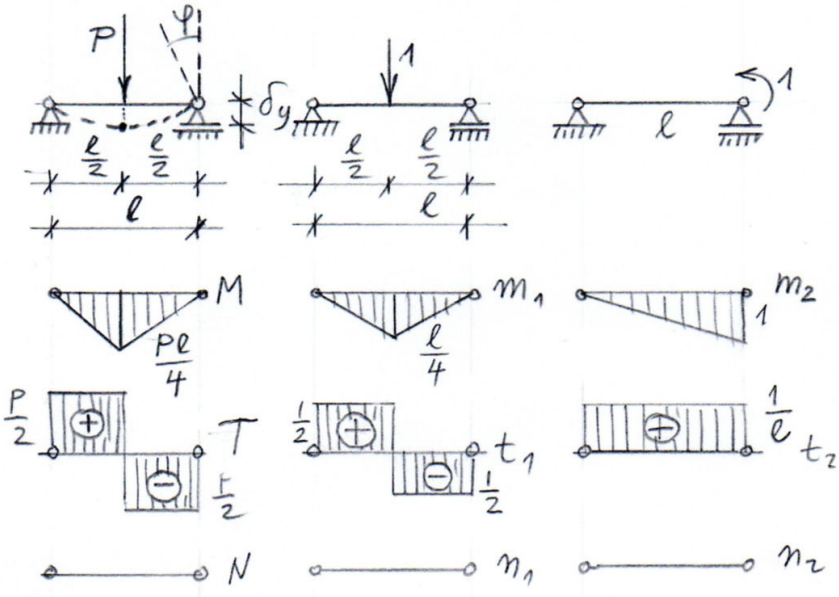
$$\varphi = 0$$



$$\delta_x = \frac{f\ell^2}{2EF}$$

$$\delta_y = 0$$

$$\varphi = 0$$

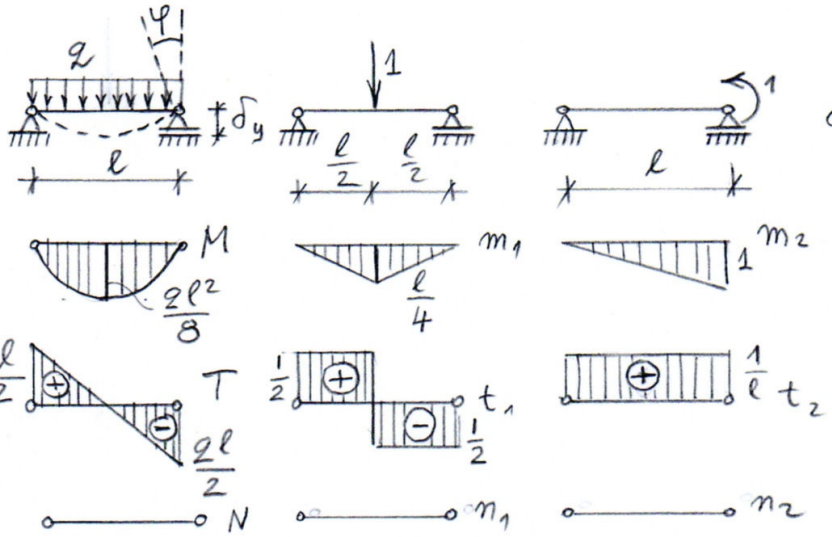


$$\delta_y = \frac{P\ell^3}{48EI} + \frac{\alpha P\ell}{4GF}$$

$$\varphi = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

$$\delta_x = 0$$

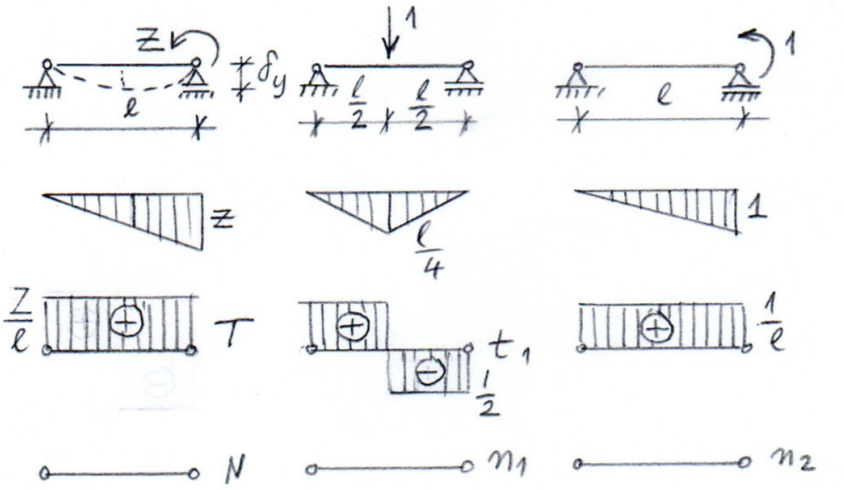
HWPL-85-253



$$\delta_y = \frac{5q\ell^4}{384EI} + \frac{\alpha q\ell^2}{8GF}$$

$$\varphi = \frac{q\ell^3}{24EI}$$

$$\delta_x = 0$$

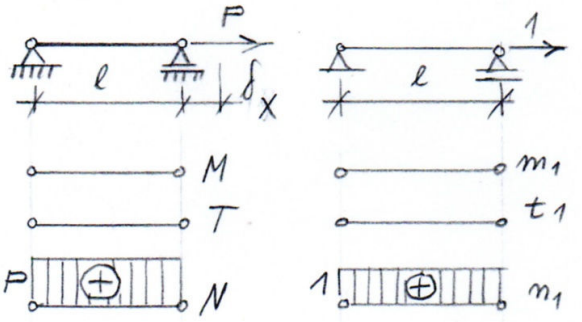


$$\delta_y = \frac{Z\ell^3}{16EI}$$

$$\varphi = \frac{Z\ell^3}{3EI} + \frac{\alpha Z}{\ell GF}$$

$$\delta_x = 0$$

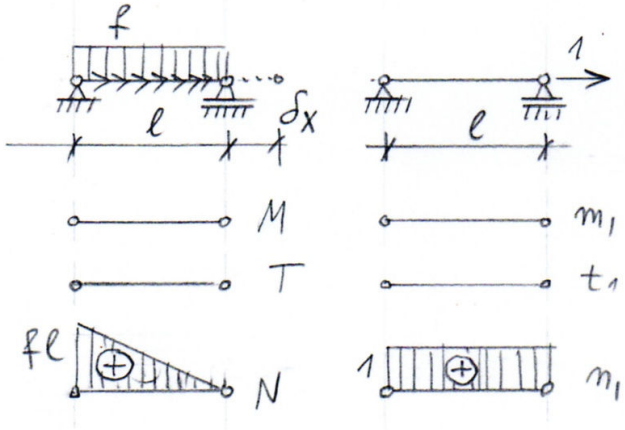
HWPK-85-254



$$\delta_x = \frac{P\ell}{EF}$$

$$\delta_y = 0$$

$$\varphi = 0$$



$$\delta_x = \frac{f\ell^2}{2EF}$$

$$\delta_y = 0$$

$$\varphi = 0$$

Odnosi doprinosa pojedinih reznih sila veličinama pomaka i zaokreta štapnih sistema

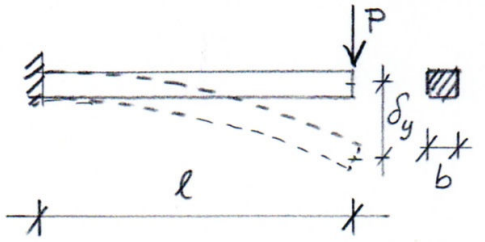
U tehničkim primjenama koriste se proračuni različitih nivoa točnosti. Put do najjednostavnijeg, a ipak dovoljno točnog načina opisivanja zakonitosti je složen. Većina problema tehničke mehanike mogu se riješiti uvodjenjem jedne od dvije suprotne idealizacije; diskretnog modela materije u kojemu su sva svojstva koncentrirana u materijalnim točkama i kontinuuma u kojemu su sva svojstva neprekinuto raspodijeljena na dijelu prostora. Štapnu mehaniku se može shvatiti kao skup približnih postupaka u mehanici kontinuuma , a postoji i interpretacija prema kojoj je to skup točnih rješenja za idealno tanke štapove. Nadalje se unutar štapne mehanike uvode rješenja za infinitezimalne, dakle idealno male pomake, koja se primjenjuju za male, ali dakako konačne pomake. Uvodjenjem iskustvenih korektura mogu se rezultati tih postupaka poboljšati, ali se izmedju rezultata proračuna i podataka dobivenih mjerenjem na izvedenom objektu mogu očekivati odstupanja od nekoliko postotaka. Zbog toga nema smisla sam proračun pomoću izraza za infinitezimalne pomake provoditi sa većom točnosti.

HWPL-85-255

Analizom konkretnih primjera ustanovljava se da postoje slučajevi kod kojih je doprinos nekih reznih sila bitno manji od ostalih, pa je opravdano da se u sličnim slučajevima unaprijed izostave. Ovdje se ne će provesti općenita razmatranja tog problema, navesti će se samo neki orjentacioni zaključci i prikazati nekoliko jednostavnih primjera.

Odnos doprinosa momenta savijanja i poprečne sile ovisi o omjeru visine poprečnog presjeka i duljine na kojoj poprečna sila ima isti predznak. Visina poprečnog presjeka je najveća mjera poprečnog presjeka u ravnini okomitoj na vektor momenta savijanja.

Kao primjer je odabrana konzola opterećena koncentriranom silom okomitom na os. Izraz za pomak okomit na os je prikazan na str. 252. i glasi:

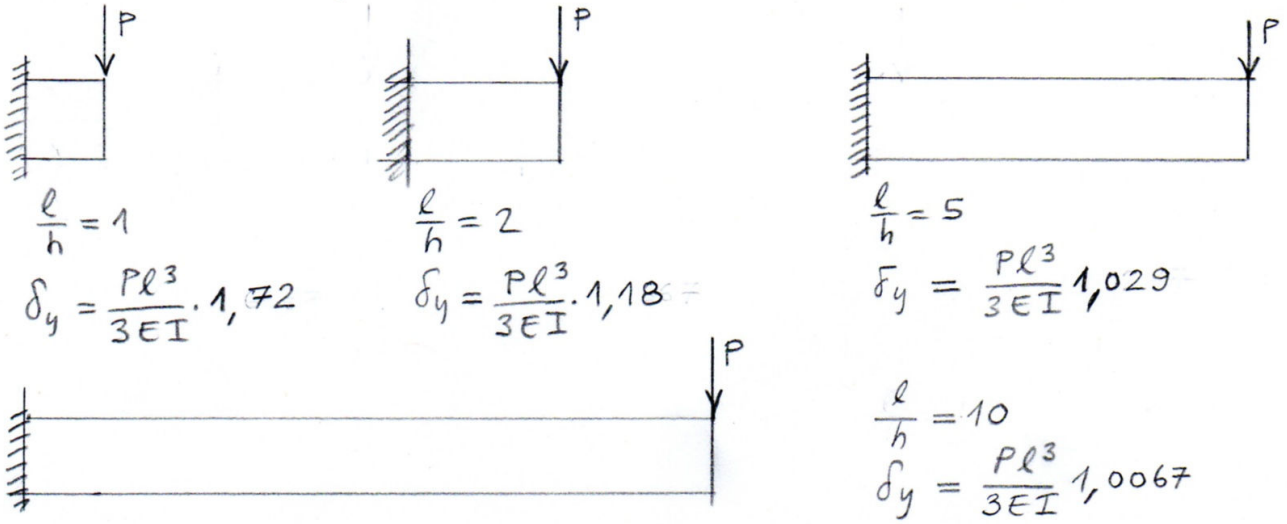


$$\delta_y = P\left(\frac{l^3}{3EI} + \frac{\alpha l}{GF}\right)$$

Iz izraza u zagradi će se izlučiti doprinos savijanja, nadalje će se površina i moment tromosti izraziti pomoću dimenzija pretpostavljenog pravokutnog presjeka. Koeficijent oblika za pravokutni presjek iznosi $\alpha = 1{,}2$. Veza modula posmika G i modula elastičnosti E odredjena je relativno uskim granicama: $E/3 \leq G \leq E/2$ U izraz će se za modul G uvrstiti srednja vrijednost $G = 5E/12$. Dobiti će se:

$$\delta_y = \frac{Pl^3}{3EI}\left(1 + \frac{\alpha \cdot l \cdot 3EI}{GF \cdot l^3}\right) = \frac{Pl^3}{EI}\cdot\left(1 + \frac{1{,}2 \cdot 12\, l \cdot 3 \cdot b \cdot h^3}{5 \cdot b \cdot h \cdot 12 \cdot l^2}\right) = \frac{Pl^3}{3EI}\left[1 + 0{,}72\left(\frac{h}{l}\right)^2\right]$$

Vidljivo je da je odnos doprinosa poprečne sile i momenta savijanja proporcionalan kvadratu omjera visine poprečnog presjeka i duljine odsjeka osi na kojoj poprečna sila ima isti predznak. Prikazati će se nekoliko konkretnih primjera.

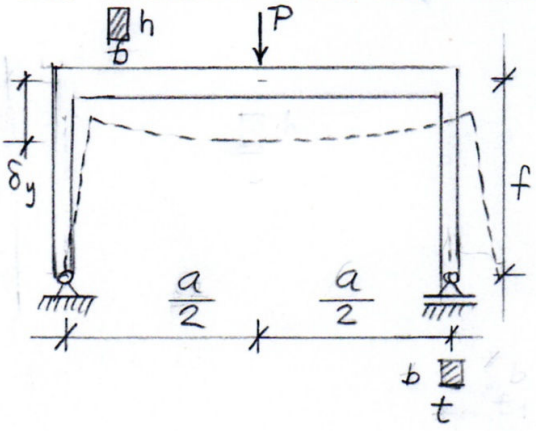


Za konzole pravokutnog poprečnog presjeka opterećene silom na kraju utjecaj poprečne sile na progib može se zanemariti ako je duljina barem pet puta veća od visine.
Kod proste grede se dobiva zahtjev za omjerom 10 : 1 jer poprečna sila ima isti predznak samo na polovini nosača.

Utjecaj oblika poprečnog presjeka je relativno malen, pa se dobiveni rezultati mogu koristiti općenito za sve oblike presjeka, a orjentaciono i za sve štapne sisteme.

Odnos doprinosa momenta savijanja i uzdužne sile je složeniji i ovisi o obliku sistema i načinu opterećenja. Mogući su svi slučajevi od takovih u kojima se može zanemariti utjecaj uzdužne sile do onih u kojima se može zanemariti utjecaj momenta savijanja.

Kao primjer sistema čiji elementi mogu biti takovi da se doprinos uzdužnih sila može zanemariti prema doprinosu momenta savijanja, promatra se prosto spojen pravokutni okvir sa rasponom a, visinom stupa f, te visinom presjeka grede h i visinom presjeka stupa t.
Poprečni pomak točke na presjeku na koji djeluje sila iznosi,



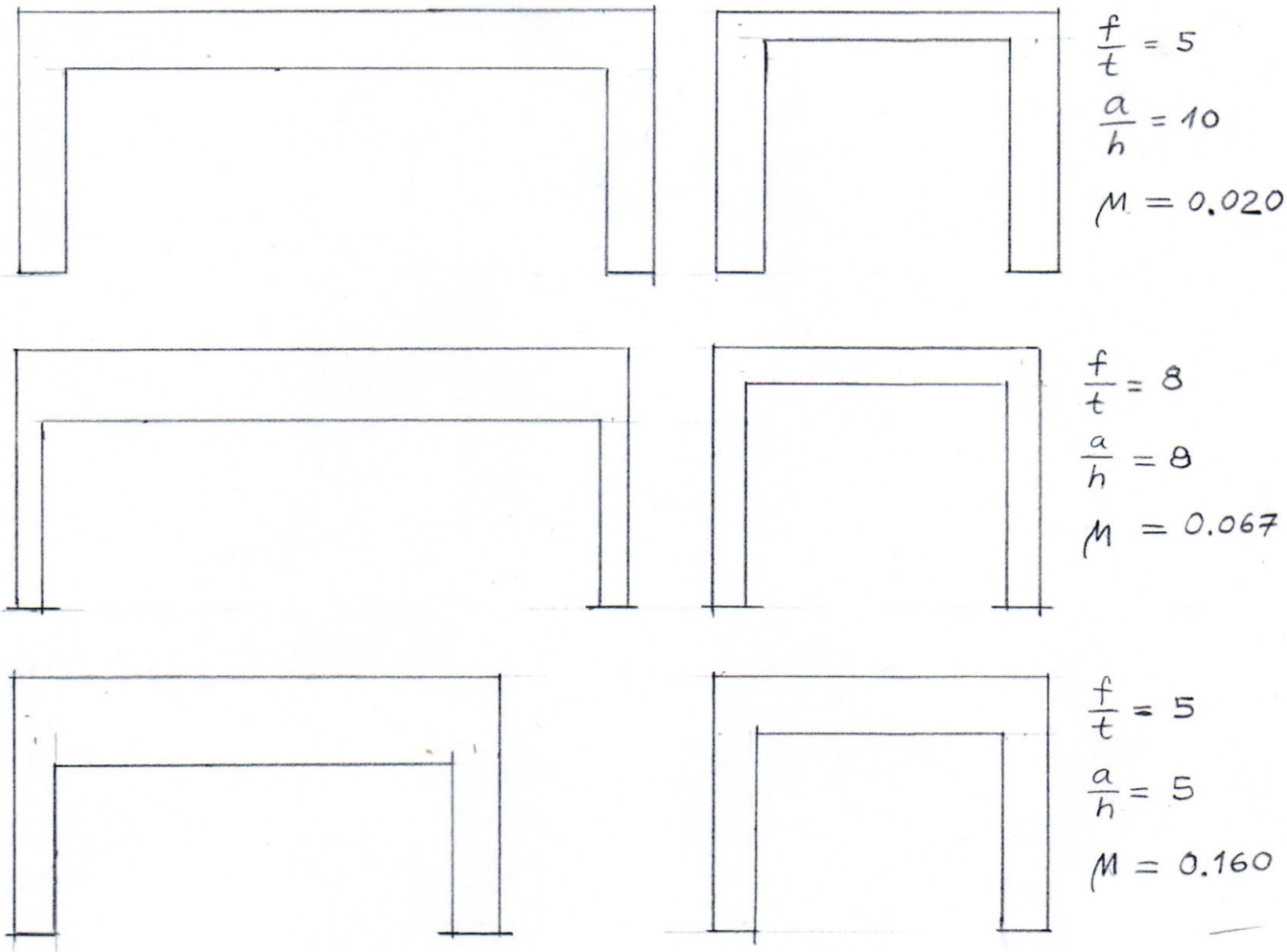
$$\delta_y=\frac{Pa^3}{48EI_q}+\frac{\alpha P\ell}{4GF}+\frac{P\cdot f}{EF_s}$$

Odrediti će se omjer doprinosa uzdužne sile i momenta savijanja:

$$\mu=\frac{P\cdot f\cdot 48\cdot E\cdot b\cdot h^3}{E\cdot b\cdot t\cdot P\cdot a^3\cdot 12}=\frac{4\cdot f\cdot h^3}{t\cdot a^3}$$

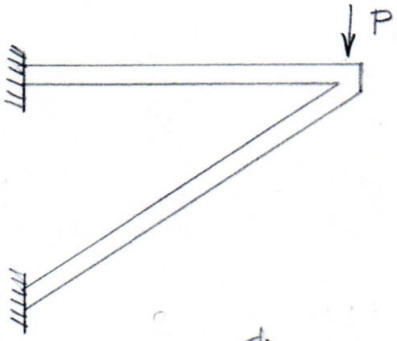
HWPL-85-256

Omjer doprinosa uzdužne sile i momenta savijanja je funkcija vitkosti stupa i grede, pri čemu će se **vitkost ovdje definirati** kao omjer duljine elementa i visine poprečnog presjeka. Može se zaključiti da će okviri različitih proporcija imati istu osjetljivost na doprinos uzdužne sile promatranom pomaku. Navesti će se nekoliko primjera. Okviri pokazani u istom redu imaju isti omjer M

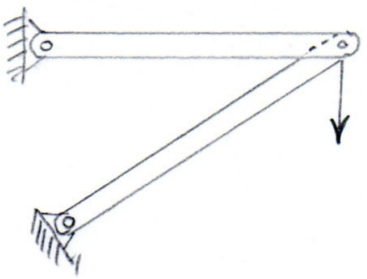


HWPK-85-257

Kod primjera u gornjem retku se bez daljnjega može zanemariti utjecaj uzdužne sile. Primjeri u srednjem retku su granični, a kod primjera u donjem retku se utjecaj uzdužne sile mora uvažiti.



Primjeri sistema kod kojih se utjecaj momenta savijanja može zanemariti prema utjecaju uzdužnih sila pri proračunu pomaka su realne rešetke sa dovoljno vitkim štapovima. Kako se radi o preodredjenim sistemima primjeri će se navesti kasnije.

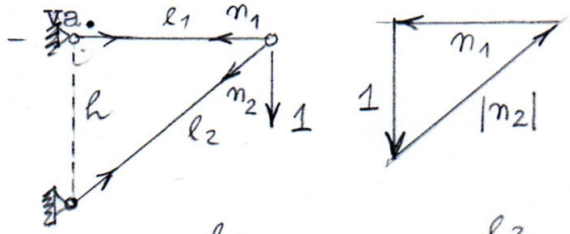


Sistemi kod kojih je moguć prijenos sila potpuno bez savijanja su idealne rešetke opterećene u čvorovima. Kod tih sistema se u izrazima za odredjivanje pomaka pojavljuju samo uzdužne sile.

Ako su štapovi prizmatični i modul elastičnosti konstantan za svaki štap može se integralni izraz prikazati pomoću uzdužnih sila u pojedinim štapovima:

$$a_{i,j} = \int_S \frac{n_i \cdot n_j \, ds}{E \cdot F} = \sum_{k=1}^{b} \frac{n_{ki} \cdot n_{kj} \cdot l_k}{E_k \cdot F_k}$$

pri tome indeks k označava redni broj štapa."b" je ukupni broj štapova.



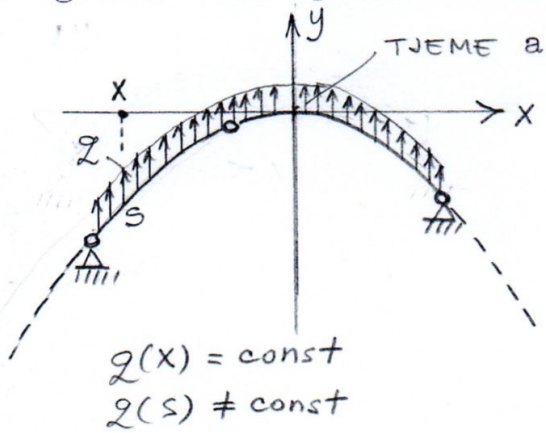
Postupak će se prikazati na jednostavnoj rešetki prikazanoj na skici. Odrediti će se $a_{1,1}$ za mjerno opterećenje koje je prikazano.
Iz uvjeta ravnoteže čvora će se sile odrediti planimetrijski. Iz sličnosti trokuta slijede apsolutni iznosi sila. Izraz za pomak glasi:

$$n_1 = \frac{l_1}{h} \qquad n_2 = -\frac{l_2}{h}$$

$$a_{1,1} = \frac{n_1^2 l_1}{E_1 \cdot F_1} + \frac{n_2^2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{l_1^3}{E_1 F_1 h} + \frac{l_2^3}{E_2 F_2 \cdot h}$$

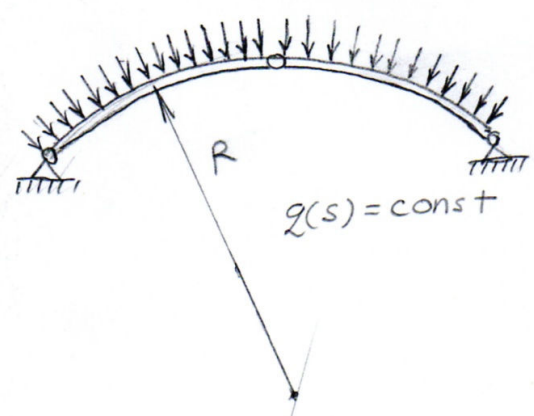
HWPK-85-258

Prijenos poprečnog djelovanja na štapne elemente bez pojave momenata savijanja moguć je samo sa štapnim elementima čije su osi zakrivljene i to samo za specijalno opterećenje koje odgovara obliku osi. Najjednostavniji primjer tog slučaja je trozglobni luk. Opisati će se samo dva jednostavna slučaja:



a) Os luka je parabola drugog stupnja Na luk djeluju distribuirane sile paralelne s normalom u tjemenu parabole. Svakoj točki luka pridružiti će se pomoću paralele s normalom u tjemenu jedna točka na tangenti u tjemenu. Funkcija intenziteta distribuiranih dila prikazati će se kao funkcija položaja na tangenti. Ako je u tom obliku intenzitet konstantan iščezavati će identično momenti savijanja.

Ako se u tom slučaju intenzitet prikaže kao funkcija položaja na luku $q(s)$, onda će u tjemenu biti najveći intenzitet, a s udaljenosti od tjemena će se smanjivati.



b) Os luka je dio kružnice. Ako na takav luk djeluju distribuirane sile okomite na os, a intenzitet izražen kao funkcija položaja na osi je konstantan, iščezavati će identično moment savijanja i poprečna sila.

Lukovi kod kojih su promjene opterećenja tokom korištenja male, mogu se tako oblikovati da momenti savijanja budu minimalni.

Rješavanje linearno elastičnih preodredjenih štapnih sistema za djelovanja koja izazivaju male pomake

Preodredjeni štapni sistem ostaje u stanju ravnoteže za proizvoljno opterećenje, a rezne sile se nemogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. U tim sistemima su moguće rezne sile bez djelovanja opterećenja. Prema tome promatranje opterećenja nije dovoljno za odredjivanje reznih sila; potrebne su informacije o montaži sistema i promjenama neopterećenog oblika pojedinih elemenata, kao što su: promjena temperature i stezanje.

Ovdje će se prikazati uvod u dvije temeljne metode rješavanja preodredjenih štapnih sistema za djelovanja koja izazivaju infinitezimalne pomake, a to su: metoda sila i metoda pomaka. Svaka od te dvije metode daje opće rješenje problema, poznavanje obje metode je korisno jer postoje zadaci kod kojih je jedna od metoda izričito povoljnija.

Metoda sila

HWPK-85-259

Metoda sila se zasniva na zamišljenom prevodjenju zadanog preodredjenog štapnog sistema u odredjeni štapni sistem i to uvodjenjem prekida. Stanje zadanog sistema može se na uvedenom odredjenom sistemu prikazati pomoću djelovanja opterećenja i odgovarajućih parova suprotnih nepoznatih sila i momenata koji djeluju u prekidima. Veličine nepoznatih sila i momenata odredjuju se iz uvjeta iščezavanja relativnih pomaka i zaokreta u uvedenim prekidima.

Iz tog sažetog prikaza je vidljivo da bi točniji naziv metode bio "metoda nepoznatih sila i momenata".

Metodom sila se mogu rješavati opći slučajevi štapnih sistema, dakle oni koji su preodredjeni prema svojstvima u prostoru. Zbog preglednosti će se u prikazu metode koristiti samo primjeri ravnih sistema što ne će pretstavljati principjelno ograničenje. Završno će se prikazati i neki primjeri općih sistema.

Osnovni sistem

Osnovni sistem je zamišljeni odredjeni spojeni sistem koji se pridružuje zadanom preodredjenom sistemu uvodjenjem prekida (diskontinuiteta). Prekidi se mogu uvoditi pomoću jednog ili više načina uvodjenja, a mogući načini su slijedeći:

a) isključenje spoja

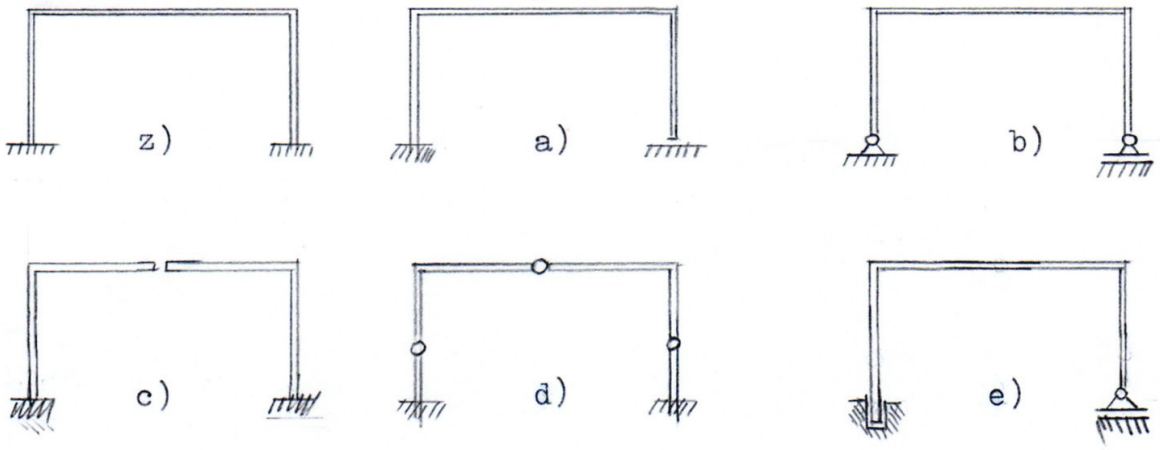
b) zamjena zadanog spoja jednostavnijim spojem

c) uvodjenje potpunog prekida u štap

d) uvodjenje spoja u štap

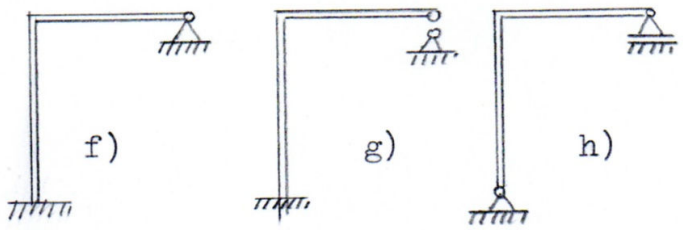
Zadanom preodredjenom štapnom sistemu može se pridružiti mnogo osnovnih sistema. Za provedbu postupka odabire se obično jedan osnovni sistem. Kriteriji za izbor osnovnog sistema mogu se navesti nakon upoznavanja same metode. Za kontrolu dobivenih rezultata obično se uvodi još jedan daljnji osnovni sistem.

Na primjeru jednostavnog ravnog preodredjenog sistema prikazati će se sva četiri načina uvodjenja osnovnog sistema.

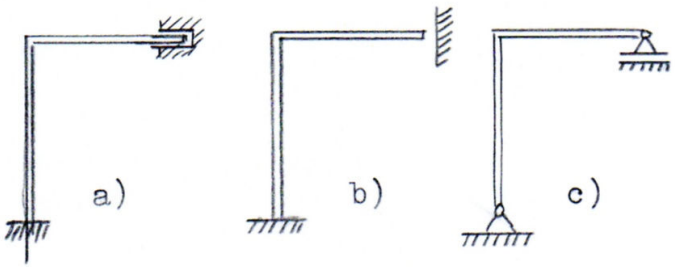


Odabran je obostrano kruto spojen okvir (na skici z)) i pridružena mu je okvirna konzola (a),koja je dobivena isključenjem jednog krutog spoja. Druga mogućnost izbora osnovnog sistema je zamjena jednog krutog spoja nepomičnim zglobom, a drugog pomičnim zglobom, pa se dobiva prosto spojen okvir (b). Treći primjer pridruživanja osnovnog sistema zadanom su dvije konzole spojene s podlogom, a nastale su uvodjenjem potpunog prekida u štap (c). Četvrti primjer je dobiven uključivanjem triju zglobova u štap. Dobiven je ulančen sistem kod kojeg su dva štapna elementa trozglobno spojena s podsistemom koji sadrži podlogu i dvije konzole(d). U prethodna četiri primjera nije korišten klizni spoj. Na skici (e) je prikazana mogućnost zamjene jednog krutog spoja kliznim spojem a drugog krutog spoja pomičnim zglobom.

U prikazanim primjerima navedene su sve mogućnosti zamjene krutog spoja jednostavnijim spojevima. Navesti će se još nekoliko primjera isključivanja ili zamjene drugih spojeva u ravnini. Na skici f) je prikazan zadani preodredjeni sistem. Nepomični zglob se u ovom slučaju može isključiti pa je osnovni sistem konzola (g). Druga mogućnost djelovanja na nepomični zglob pri svadjanju na osnovni sistem je zamjena jednostavnijim spojem, a to može biti samo pomični zglob. Pri tome se kruti spoj mora zamijeniti nepomičnim zglobom (h). Time dakako nisu iscrpljene mogućnosti uvodjenja osnovnog sistema; mogao bi se kruti spoj zamijeniti pomičnim zglobom itd.

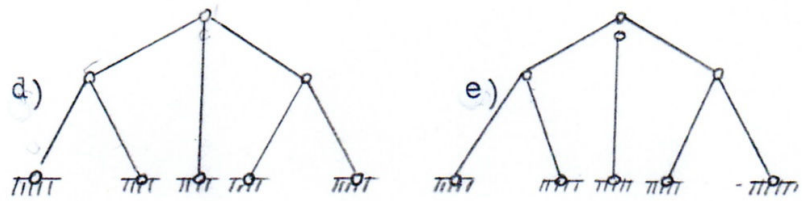


HWPK-85-260

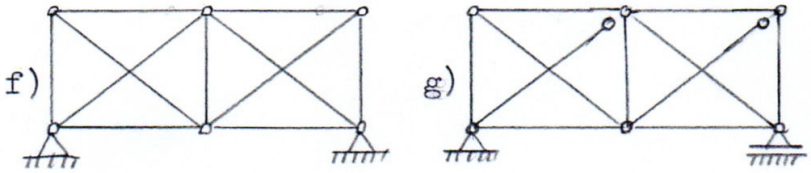


Na skici a) je prikazan zadani preodredjeni sistem, koji sadrži klizni spoj. Mogućnouvodjenja osnovnog sistema djelovanjem na klizni spoj su u ovom slučaju: isključenje pri kojem sistem prelazi u konzolu (b) i druga mogućnost: zamjena kliznog spoja pomičnim zglobom. U drugom slučaju je kruti spoj zamijenjer nepomičnim zglobom pa je dobiven prosti spoj (c).

Preodredjeni sistem se može svesti na odredjeni i isključenjem zglobnog štapa. Kako se deformacija zglobnih štapova uglavnom uzima u obzir, isključeni štap ostaje dio osnovnog sistema.

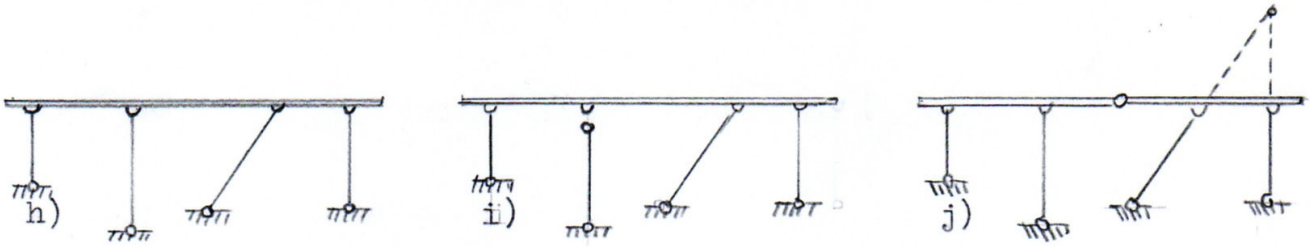


Na skici d) je prikazan preodredjen rešetkast sistem. Osnovni sistem se može pridružiti isključivanjem jednog štapa.



Na skici f) je prikazan sistem koji sadrži rešetkast nosač. Taj sistem se može svesti na osnovni isključivanjem dvaju zglobnih štapova i zamjenom jednog spoja kliznim.(g). Daljnja mogućnost bi bila: isključivanje triju štapova tako da se dobije trozglobni sistem s dva rešetkasta dijela.

Kod sistema koji sadrže štapne elemente i zglobne štapove često

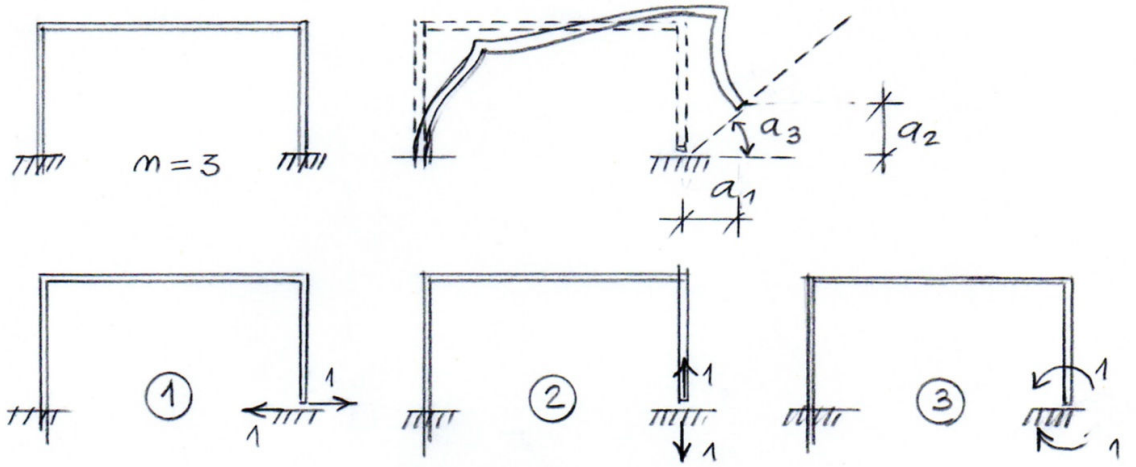


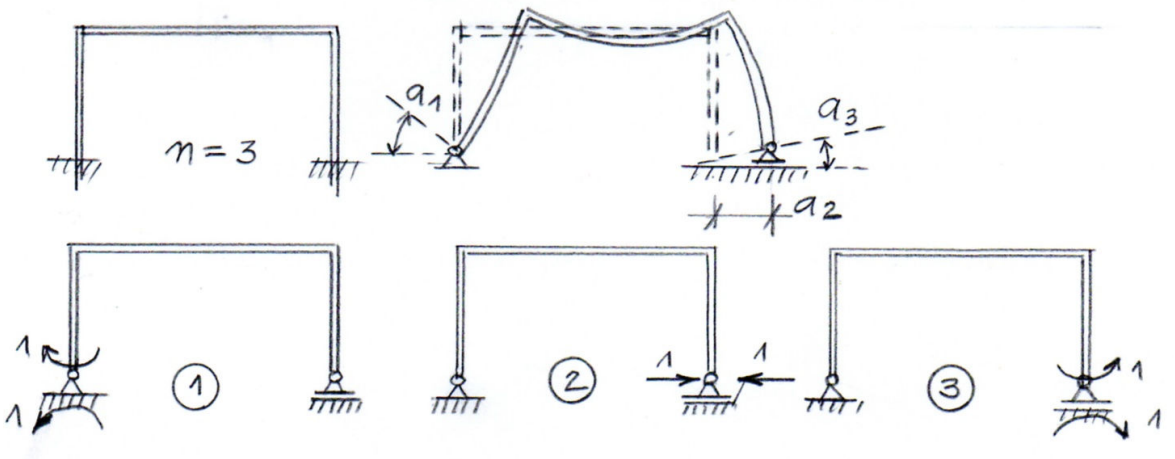
postoji mogućnost da se sistem svede na odredjeni ili isključenjme zglobnih štapova ili djelovanjem na druge spojeve ili štapne elemente. Na skici h) je prikazan preodredjen štapni sistem. U ovom slučaju je najjednostavnije osnovni sistem uvesti isključenjem jednog zglobnog štapa (i). Uključivanje zgloba u štapni element vodi na složeniji osnovni sistem koji spada u sisteme slične tozglobnom spoju.

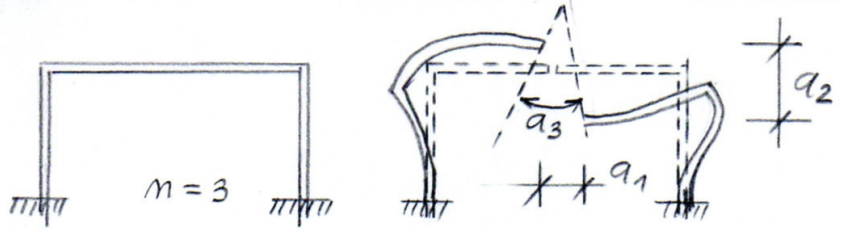
Uvodjenjem prekida u zadani sistem uvedeni su relativni kinematski stupnjevi slobode izmedju rubnih presjeka uz prekide.
Metoda sila se zasniva na uvjetu iščezavanja relativnih pomaka i zaokreta u uvedenim prekidima, pa treba uvesti odgovarajući broj mjernih opterećenja za njihovo odredjivanje.
Ukupni broj (projekcija) uvedenih relativnih pomaka i zaokreta je konstanta zadanog preodredjenog sistema i naziva se stupanj preodredjenosti. Obično se označava s "n". Uobičajena je i formulacija:" sistem je n puta preodredjen". Stupanj prepdredjenosti se može definirati i statički.

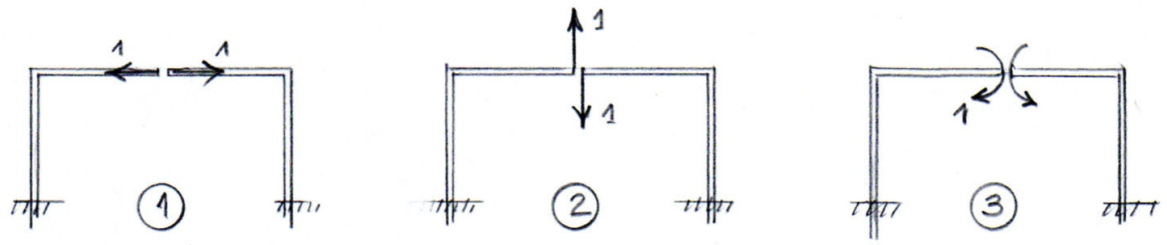
Na primjerima osnovnih sistema prikazati će se deformirana stanja i relativni pomaci i zaokreti koji mogu nastati u uvedenim prekidima. Prikazati će se odgovarajuća mjerna stanja. Projekcije relativnih pomaka i relativni zaokreti označiti će se istim indeksima kao mjerna opterećenja. Uz svaki primjer će se navesti i stupanj preodredjenosti.

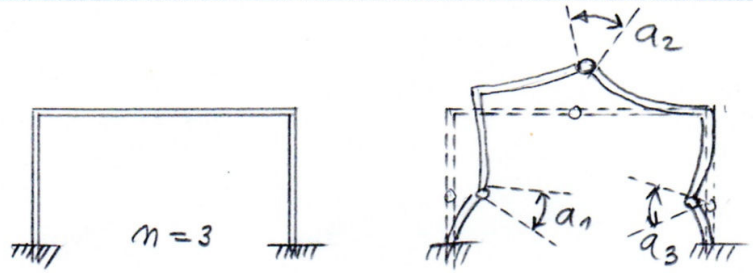
HWPK-85-262

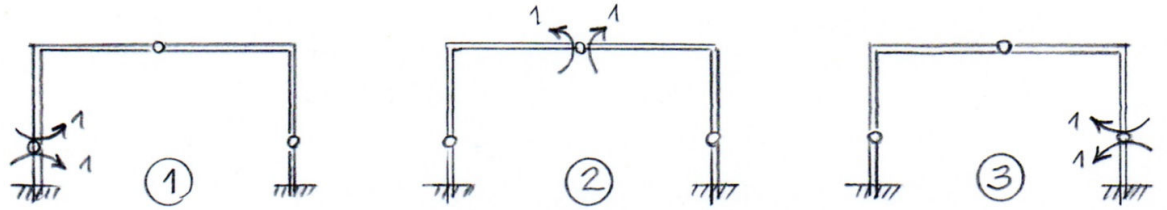


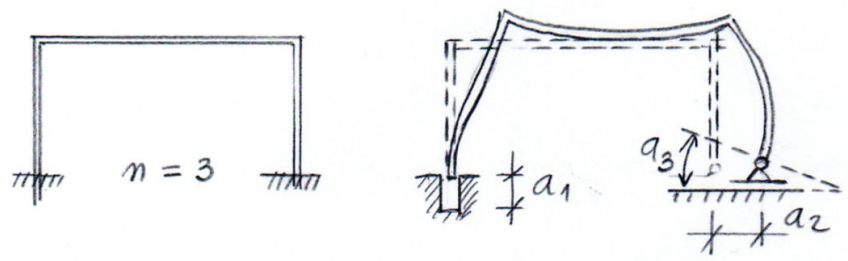


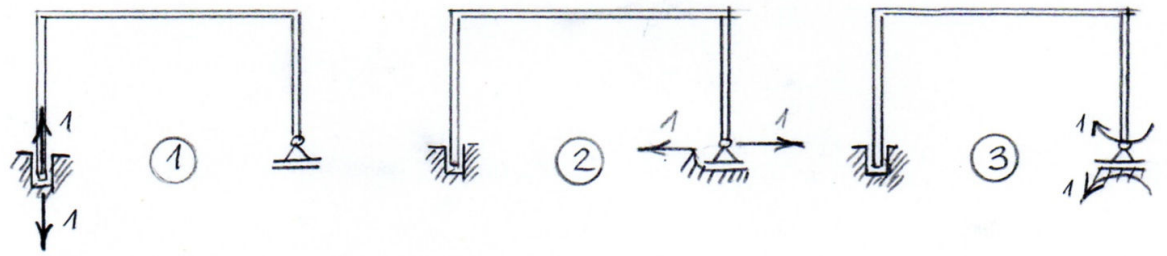


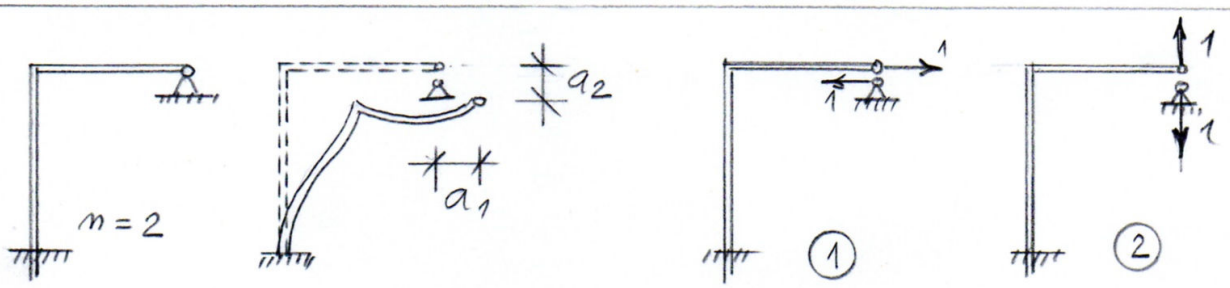

1
1
1
1
1
1
1
2
3

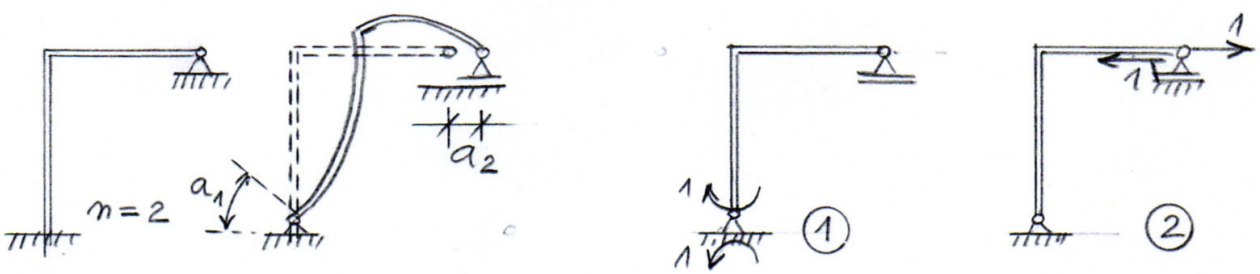

n = 3
a2
a1
a3

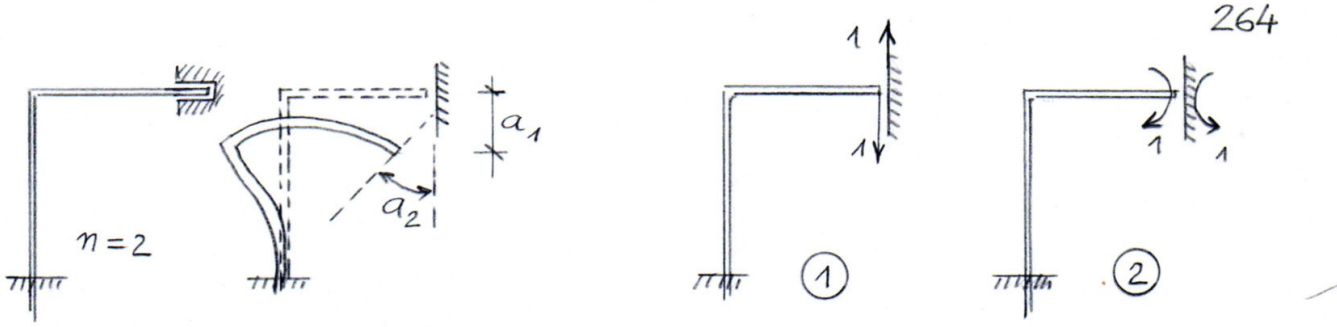

1
1
1
1
1
1
1
1
1
2
3

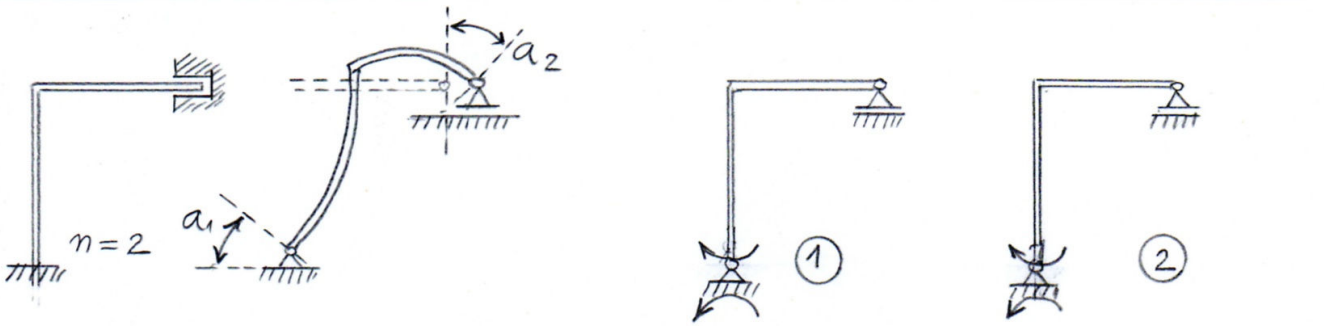

n = 3
a1
a3
a2

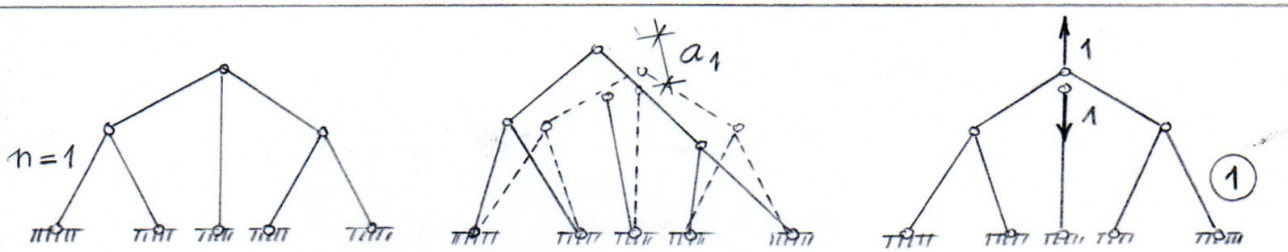

1
1
1
1
1
1
1
1
1
2
3

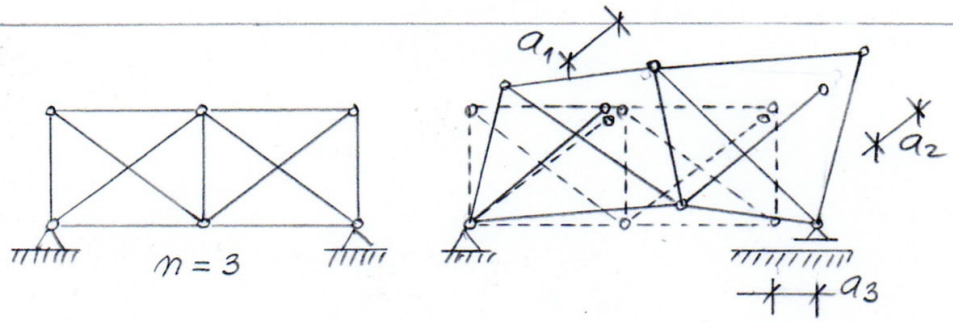

n = 2
a2
a1
1
1
1
1
1
1
2

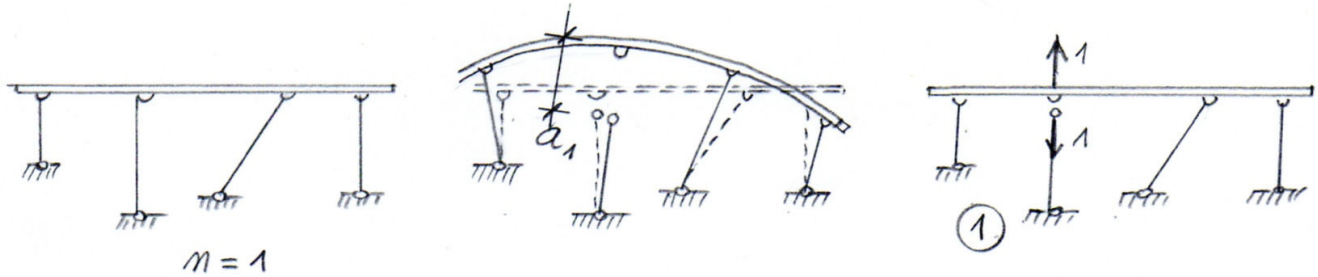

n = 2
a1
a2
1
1
1
1
1
1
2


n = 2
a1
a2
1
1
1
1
1
1
2


n = 2
a1
a2
1
2


n = 1
a1
1
1
1


n = 3
a1
a2
a3
1
1
1
1
1
1
1
1
1
2
3


n = 1
a1
1
1
1

HWPK- 85-264

Prekobrojna djelovanja

Uvodjenjem prekida u zadani sistem isključuju se neke rezne sile i/ili reakcije koje su djelovale u zadanom sistemu. Na osnovnom sistemu se mora prikazati kompletno mehaničko stanje zadanog sistema pa se umjesto isključenih djelovanja uvode prekobrojna djelovanja.

Prekobrojna djelovanja na osnovnom sistemu čine prekobrojne sile i prekobrojni momenti koji u parovima djeluju izmedju rubnih presjeka uvedenih prekida i zamjenjuju odgovarajuće rezne sile ili reakcije koje na tim mjestima djeluju u zadanom preodredjenom sistemu.

Ta djelovanja se nazivaju prekobrojna jer čine višak podataka o silama u sistemu u odnosu na broj podataka koji se mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Ukoliko je sistem sastavljen iz dijelova koji prije montaže nisu bili potpuno uskladjeni ili se temperatura dijelova sistema nejednako mijenjala, pojaviti će se prekobrojna djelovanja i ako opterećenje iščezava.

HWPE-85-265

Umjesto naziva"prekobrojna djelovanja" t.j. "prekobrojne sile i momenti" koriste se još i nazivi:"nepoznate sile i momenti", "oslobodjene sile i momenti" i "hiperstatičke sile i momenti".

Pokazati će se da prekobrojne sile i momenti po hvatištu, pravcu i smjeru upravo odgovaraju jediničnim djelovanjima mjernih opterećenja.

Zbog komplementarnosti statičkih i kinematskih svojstava spoja, spoj ne prenosi komponente sila ili momenata koje odgovaraju mogućim relativnim stupnjevima slobode.

Uvodjenje relativne translacije povlači isključivanje odgovarajuće sile,umjesto koje se uvodi prekobrojna sila. Slijedi, da svaka prekobrojna sila odgovara jednoj uvedenoj relativnoj translaciji po pravcu.

Uvodjenje relativne rotacije povlači isključivanje odgovarajućeg momenta, umjesto kojeg se uvodi prekobrojni moment. Slijedi, da svaki prekobrojni moment odgovara jednoj uvedenoj relativnoj rotaciji oko osi.

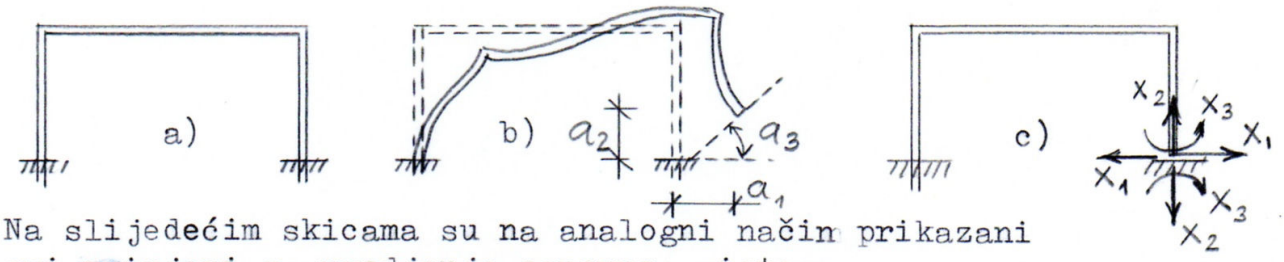
Zbog prikazane veze s mjernim opterećenjima označiti će se veličine prekobrojnih sila i prekobrojnih momenata jednistvenom oznakom X_i, pri čemu će indeks "i" biti jednak rednom broju pripadnog mjernog opterećenja.

Veličine prekobrojnih sila i momenata će se zajednički nazivati prekobrojne veličine. Koriste se još i nazivi: "nepoznate veličine" i "hiperstatičke veličine".

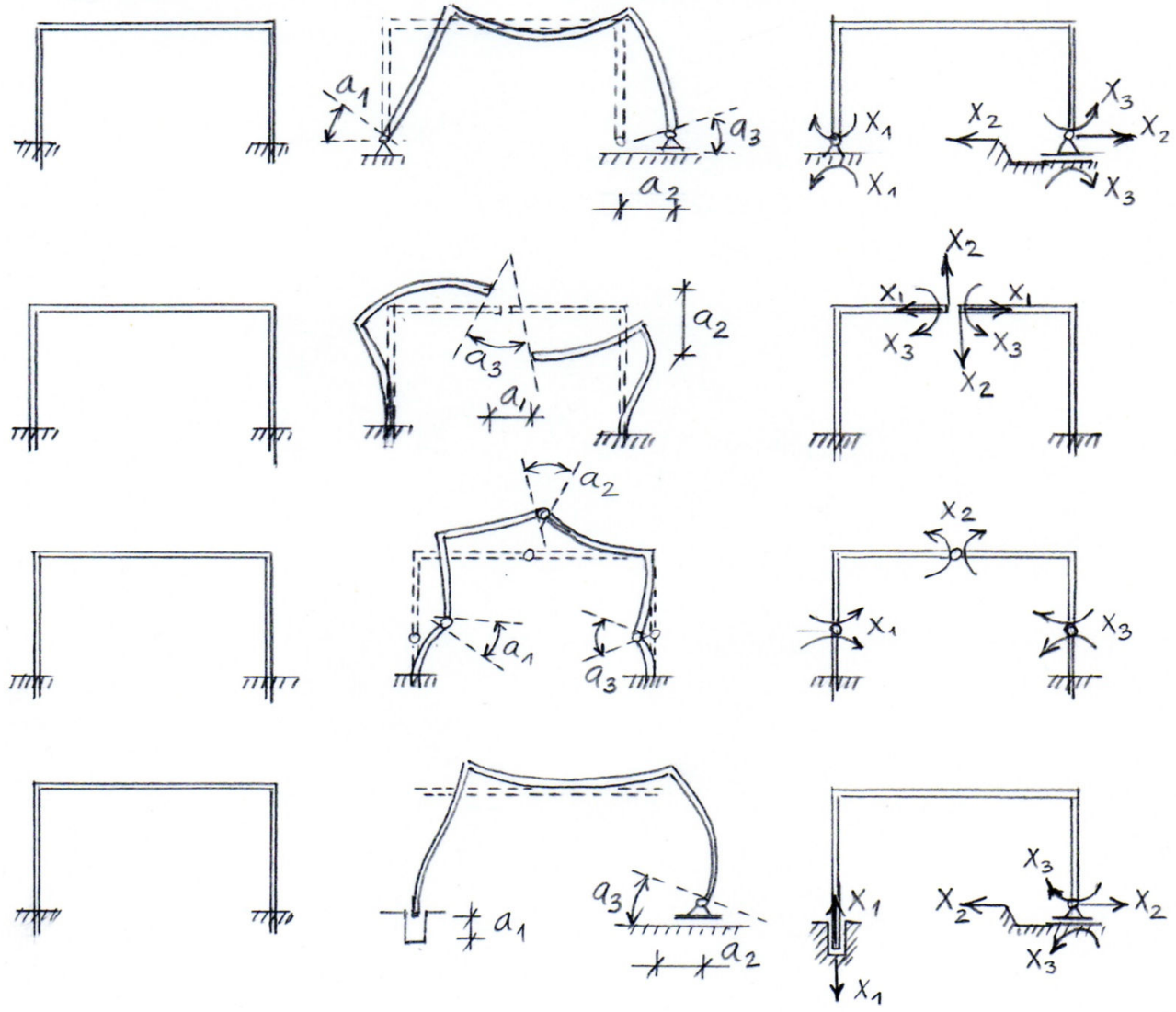
Stupanj preodredjenosti štapnog sistema može se još definirati i kao ukupni broj prekobrojnih veličina u sistemu.

Pri rješavanju preodredjenih štapnih sistema po metodi sila, obavezno će se zadanom sistemu pridružiti skica osnovnog sistema bez opterećenja, ali s ucrtanim prekobrojnim djelovanjima čije su veličine označene s X_1 do X_n. Time je potpuno definiran postupak po metodi sila. Na osnovu toga može se postaviti "n" mjernih opterećenja. Za svako mjerno opterećenje treba osnovni sistem zasebno riješiti. To je provedivo pomoću dosada uvedenih postupaka, jer je osnovni sistem odredjen štapni sistem. Ukoliko se rješenje zadanog preodredjenog štapnog sistema traži za više zasebnih vanjskih opterećenja, mora se za svako od tih opterećenja zasebno riješiti i osnovni sistem.

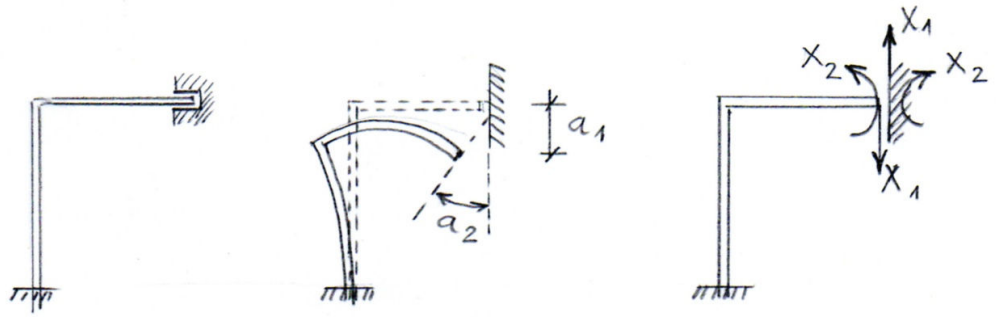
Na skici a) je ponovo prikazan okvir s dva kruta spoja, a uz to je ponovo prikazan deformiran osnovni sistem s označenim uvedenim relativnim stupnjevima slobode. Skica c) je standardni prikaz osnovnog sistema s ucrtanim prekobrojnim djelovanjima.

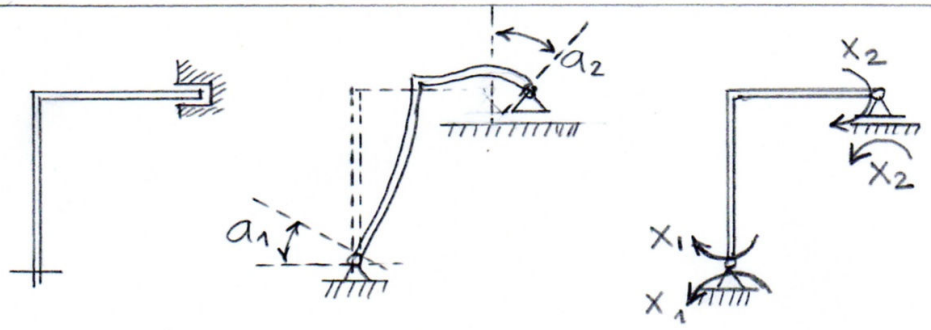


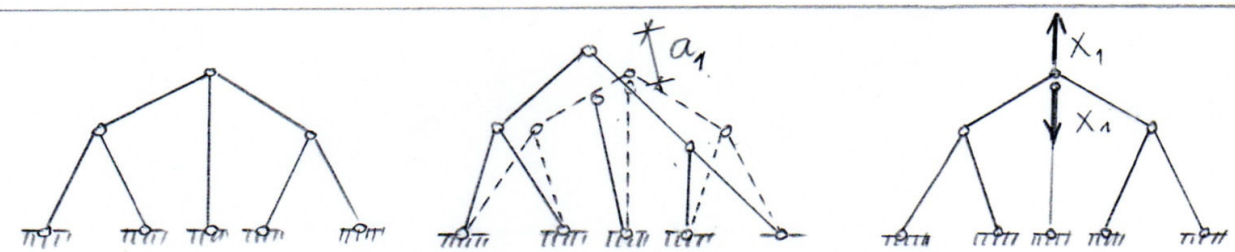
Na slijedećim skicama su na analogni način prikazani svi primjeri za uvodjenje osnovnog sistema.

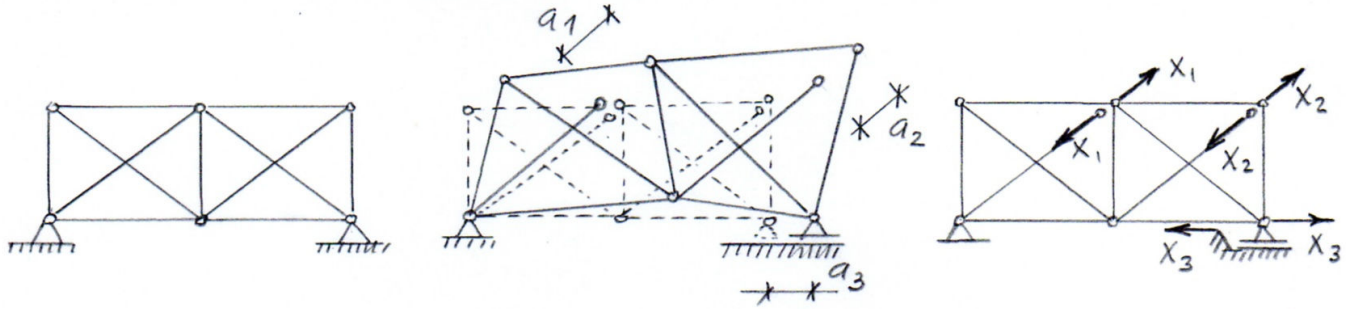


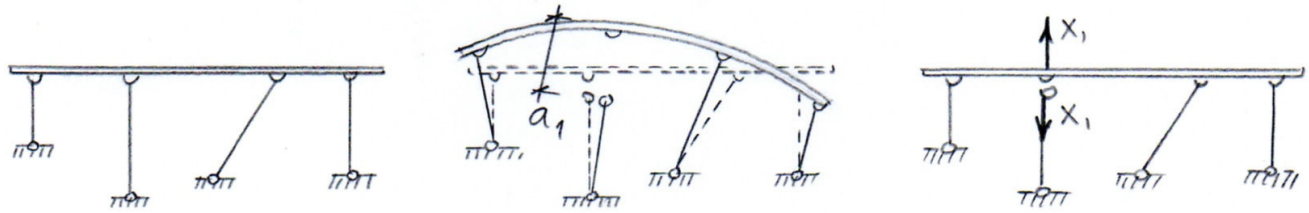
HWPK-85-266

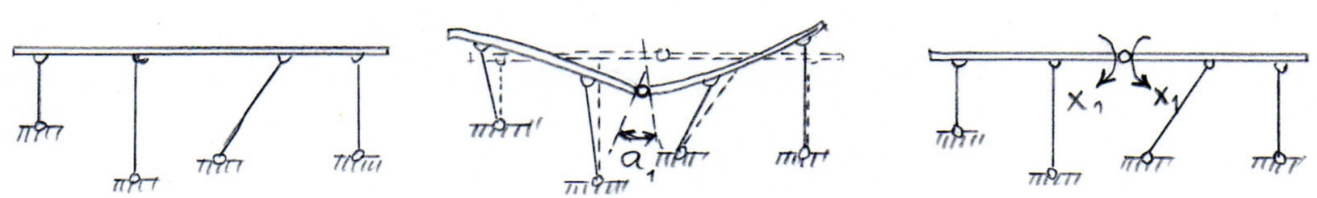

a1
a2
X1
X2
X2
X1


a2
a1
X2
X2
X1
X1


a1
X1
X1


a1
a2
a3
X1
X2
X1
X2
X3
X3


a1
X1
X1


a1
X1
X1

HWPK- 85-267

U tehnici je uobičajeno da se umjesto "uveden je par suprotnih prekobrojnih sila veličine X_i" skraćeno kaže: "uvedena je prekobrojna sila X_i", pa će se takav način opisivanja i ovdje koristiti. Analogno će dakako vrijediti i za prekobrojne momente.

Jednadžbe kontinuiteta

Osnovni sistem će se nalaziti u istom stanju kao i zadani preodredjeni sistem, ako uz djelovanje opterećenja i prekobrojna djelovanja iščeznu svi relativni pomaci i zaokreti omogućeni uvodjenjem prekida.

Za odredjivanje relativnih pomaka i zaokreta treba osnovni sistem riješiti za djelovanje opterećenja i sva prekobrojna djelovanja. Kako prekobrojne veličine nisu poznate, rješenje će sadržavati opće izraze s prekobrojnim veličinama X_i. Zbog linearnosti može se svaka veličina dobivena rješavanjem izraziti kao zbroj doprinosa opterećenja i doprinosa svake prekobrojne veličine, pa će vrijediti opći izraz:

$$\phi = \phi_v + \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_n$$

pri čemu je ϕ neka veličina dobivena rješavanjem; reakcija ili rezna sila ili pomak ili zaokret.

ϕ_v je doprinos opterećenja promatranoj veličini

ϕ_i su doprinosi prekobrojnih djelovanja istoj promatranoj veličini.

HWPK-85-268

Zbog linearnosti može se nadalje doprinos svakog prekobrojnog djelovanja prikazati kao doprinos odgovarajućeg jediničnog djelovanja i pripadne prekobrojne veličine:

$$\phi_i = \varphi_i \cdot X_i$$

Pri zasebnom rješavanju osnovnog sistema za jedninično djelovanje s rednim brojem "i" dobiti će se kao promatrana veličina upravo φ_i.

Prema tome se svaka promatrana veličina ϕ dobivena rješavanjem osnovnog sistema za sva djelovanja, može izraziti u obliku:

$$\phi = \phi_v + \varphi_1 \cdot X_1 + \varphi_2 \cdot X_2 + \ldots + \varphi_n \cdot X_n$$

Gornji opći izraz će očito vrijediti i za projekcije relativnih pomaka i projekcije relativnih zaokreta omogućenih uvodjenjem prekida, pa se opći izraz za te veličine može napisati:

$$a_i = a_{iv} + a_{i1} \cdot X_1 + a_{i2} \cdot X_2 + \ldots + a_{in} \cdot X_n$$

Pri tome je a_{iv} projekcija ukupnog relativnog pomaka ili zaokreta uslijed djelovanja opterećenja, a odredjena i-tim mjernim opterećenjem. Koristiti će se i ovakav opis: a_{iv} je pomak ili zaokret na mjestu i usmjeru X_i uslijed djelovanja zadanog vanjskog opterećenja.

Veličina a_{i1} je projekcija ukupnog relativnog pomaka ili zaokreta uslijed djelovanja prekobrojne sile ili momenta X_1, a odredjena i-tim mjernim opterećenjem. Koristiti će se i ovakav opis: a_{i1} je pomak ili zaokret na mjestu i usmjeru X_i uslijed djelovanja $X_1 = 1$.

Svi ostali članovi se odnose na odgovarajuću "i-tu" projekciju relativnog pomaka ili zaokreta izazvanu djelovanjima X_2 do X_n.

Analogni izrazi se mogu postaviti za svaku projekciju relativnih pomaka ili zaokreta omogućenih uvodjenjem prekida, pa će ukupni broj takovih izraza biti jednak stupnju preodredjenosti označenom s "n". Pomoću tih izraza se može algebarski izraziti zahtjev za iščezavanjem relativnih pomaka i zaokreta koji su omogućeni uvodjenjem prekida t.j. $a_i = 0$ za svaki i od 1 do n. Dobiva se slijedeći sistem jednadžbi:

$$a_{1v} + a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + \ldots + a_{1n} X_n = 0$$

$$a_{2v} + a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + \ldots + a_{2n} \cdot X_n = 0$$

$$a_{nv} + a_{n1} \cdot X_1 + a_{n2} \cdot X_2 + \ldots + a_{nn} \cdot X_n = 0$$

Sistem se kraće može prikazati u obliku:

$$\left[a_{iv} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j = \phi \right] \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n$$

Dobiveni sistem jednadžbi naziva se "sistem jednadžbi neprekinutosti" ili "sistem jednadžbi kontinuiteta", a kraće se naziva samo-"jednadžbe kontinuiteta".
Jednadžbe kontinuiteta se obično zapisuju u obliku kod kojeg se negativni apsolutni članovi nalaze na desnoj strani znaka jednakosti, pa se zbog toga i nazivaju "članovi desne strane".

Poznato je da će prema Maxwell-Bettijevom stavku vrijediti simetrija članova uz nepoznanice t.j. $a_{j,i} = a_{i,j}$, pa se jednadžbe kontinuiteta mogu zapisati u obliku:

$$a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + \ldots + a_{1n} \cdot X_n = - a_{1v}$$

$$a_{12} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + \ldots + a_{2n} \cdot X_n = - a_{2v}$$

$$a_{1n} \cdot X_2 + a_{2n} X_2 + \ldots + a_{nn} X_n = - a_{nv}$$

Jednadžbe kontinuiteta su algebarska formulacija zahtjeva za iščezavanjem svih projekcija ukupnih relativnih pomaka i ukupnih relativnih zaokreta omogućenih uvodjenjem prekida u zadani preodredjeni štapni sistem.

Kraći oblik zapisa jednadžbi kontinuiteta kod kojih je uvažena relacija $a_{ij} = a_{ji}$ sadrži dva izraza; jedan za prvu jednadžbu i drugi kojim su opisane sve preostale jednadžbe:

HWPE-85-269

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot X_j = -a_{1v}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ji} \cdot X_j + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} \cdot X_j = -a_{iv} \right] \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n$$

Za postavljanje jednadžbi kontinuiteta treba zadani sistem riješiti n puta za sva mjerna opterećenja zasebno, a osim toga i za djelovanje vanjskog opterećenja.

Reakcije i rezne sile izazvane mjernim opterećenjem označavati će se malim slovima i indeksom rednog broja mjernog opterećenja. Oznake za rezne sile će biti m_i, t_i, n_i.

Reakcije i rezne sile izazvane vanjskim opterećenjem označavati će se velikim slovima i indeksom V. Ako se sistem rješava za više zasebnih vanjskih djelovanja uvesti će se odgovarajuće oznake. U prvom slučaju će oznake za rezne sile biti M_v, T_v, N_v

Opći izraz za članove uz prekobrojne veličine, koji se još nazivaju i članovi lijeve strane, glasi:

$$a_{ij} = \int_s \frac{m_i \cdot m_j \, ds}{EI} + \int_s \frac{\alpha \, t_i \cdot t_j \, ds}{GF} + \int_s \frac{n_i \cdot n_j \, ds}{EF}$$

Opći izraz za apsolutne članove, koji se uzeti s negativnim predznakom nazivaju članovi desne strane, glasi:

$$a_{iv} = \int_s \frac{m_i M_v \, ds}{EI} + \int_s \frac{\alpha \, t_i \cdot T_v \, ds}{GF} + \int_s \frac{n_i \cdot N_v \, ds}{EF}$$

Članovi tipa a_{ii} se nazivaju dijagonalni članovi. Oni su obavezno pozitivni, što je i intuitivno prihvatljivo jer pretstavljaju projekciju pomaka presjeka na os odredjenu silama koje izazivaju pomake. Pod djelovanjem dviju sila koje teže razmicanju presjeci će se dakako razmaknuti. Analogno vrijedi i za zaokrete presjeka na koje djeluju momenti $X_i = 1$.

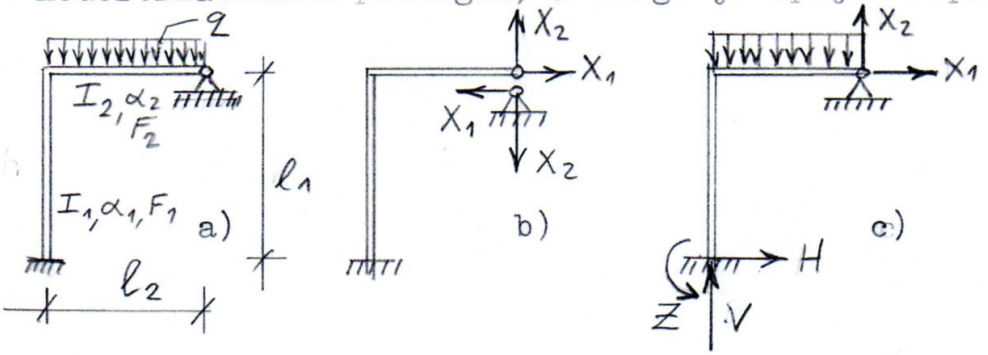
Jednadžbe kontinuiteta pretstavljaju sistem linearnih algebarskih jednadžbi koji mora biti regularan t.j. determinanta sistema mora biti različita od nule. Slijedi da singularnost upozorava na grešku u postupku rješavanja.

Porastom stupnja preodredjenosti determinanta postaje sve manja. Na veličinu determinante utječu i odnosi elastičnih karakteristika pojedinih štapnih elemenata sistema. U dosada prikazanoj, osnovnoj formulaciji metode sila na veličinu determinante utječe i izbor osnovnog sistema.

Dopuna: Za moment savijanja kao funkciju položaja na osi nije definiran predznak. Za umnožak dviju funkcija momenta savijanja definira se predznak na slijedeći način:
Ako su ordinate za obje funkcije na istoj strani štapa, umnožak ja pozitivan, a
ako su ordinate na različitim stranama štapa umnožak je negativan.
Pravilo je neophodno za iskorištavanje integralnog izraza za pomake i zaokrete.

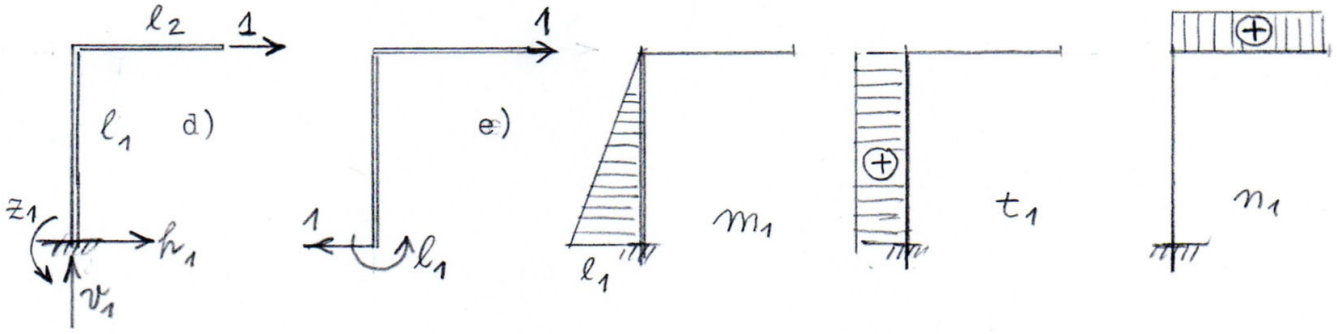
HWPK-85-270

Postavljanje jednadžbi kontinuiteta će se prikazati na jednostavnom primjeru: poluokviru kojemu je jedan kraj kruto spojen s nedeformabilnom podlogom, a drugi je spojen nepomičnim zglobom.



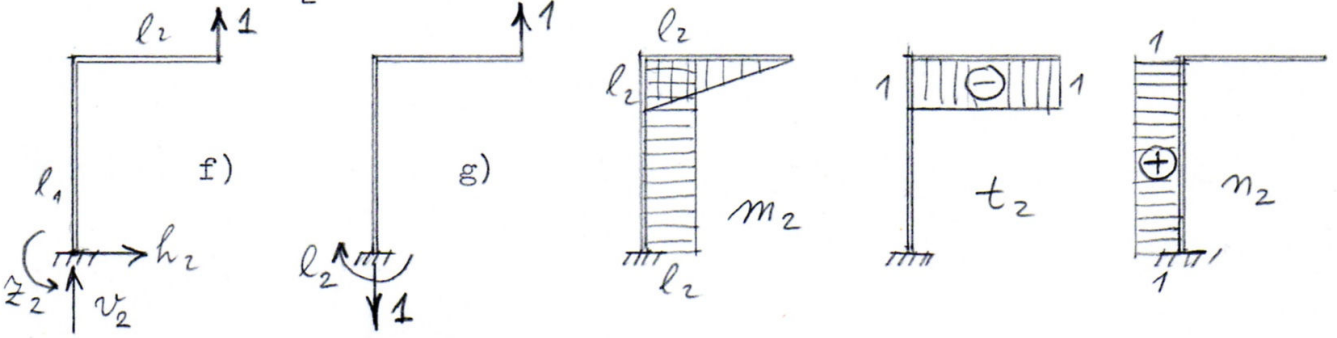
Štapovi su prizmatični: duž osi svakog elementa je poprečni presjek konstantan. Stup je označen indeksom 1, a greda indeksom 2. Svaki element je homogen, ali može biti od različitog materijala. Na skici b) je prikazan osnovni sistem s ucrtanim prekobrojnim djelovanjima. Osnovni sistem je konzola; isključenjem nepomičnog zgloba su omogućene dvije translacije po osima i njima odgovaraju dvije prekobrojne sile, pa je prema tome stupanj preodredjenosti jednak 2.
Na skici c) su uvedene oznake za sile u spojevima zadanog sistema. U nepomičnom zglobu su sile u spojevima zadanog sistema upravo prekobrojne sile.
Sistem treba riješiti zasebno za svako jedinično djelovanje koje odgovara prekobrojnim silama.

Rješenje za $X_1 = 1$.



Radi preglednosti je priložena skica d) na kojoj su uvedene opće oznake za sile u spojevima. Često je dovoljna samo skica na kojoj su ucrtani stvarni smjerovi sila u spojevima i označeni rezultatima. Kako je slučaj elementaran lako je odrediti dijagrame reznih sila koji su označeni sa m_1, t_1, n_1. Vidljivo je da za sile u spojevima vrijedi: $v_1 = 0$, $h_1 = -1$, $z_1 = \ell_1$.

Rješenje za $X_2 = 1$.



HWPK-85-271

Na skici f) su prikazane opće oznake za sile u spojevima. Lako se odredjuje: $v_2 = -1$, $h_2 = 0$, $z_2 = -l_2$ Na skici g) su sile u spojevima prikazane sa stvarnim smjerovima djelovanja, što je pogodno za odredjivanje reznih sila. Dijagrami se u ovom slučaju odredjuju elementarno.

Članovi lijeve strane jednadžbi kontinuiteta

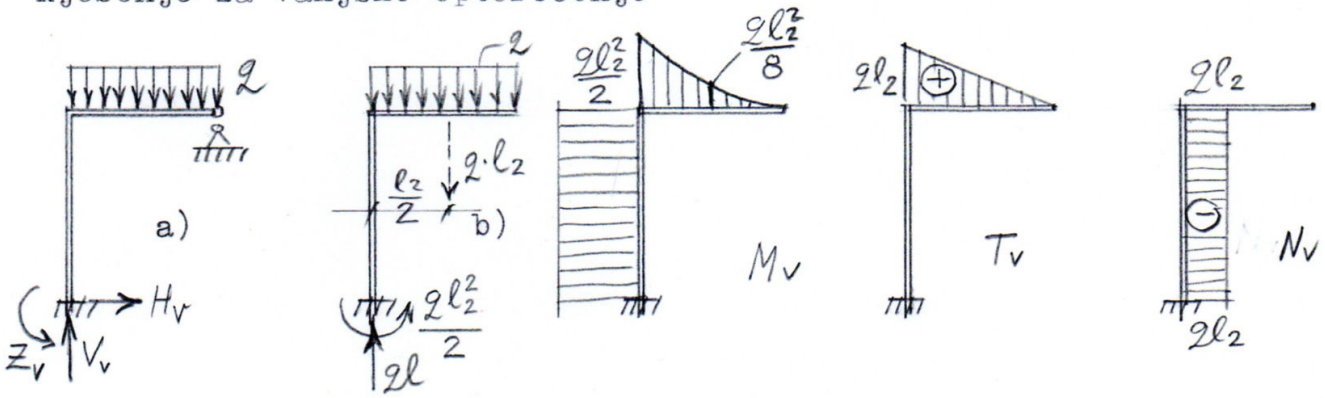
Članovi lijevih strana se odredjuju prema općem izrazu (str.270)

$$a_{11} = \frac{l_1^3}{3E_1I_1} + \frac{\alpha_1 l_1}{G_1F_1} + \frac{l_2}{E_2F_2}$$

$$a_{12} = -\frac{l_1^2 \cdot l_2}{2E_1I_1}$$

$$a_{22} = \frac{l_1 l_2^2}{E_1I_1} + \frac{l_2^3}{3E_2I_2} + \frac{\alpha_2 l_2}{G_2F_2} + \frac{l_1}{E_1F_1}$$

Rješenje za vanjsko opterećenje



Na skici a) je prikazano djelovanje opterećenja: konstantna distribuirana sila koja djeluje okomito na os elementa 2. Ucrtane su i opće oznake za sile u spojevima. Na skici b) je ucrtana i označena rezultanta distribuirane sile i ucrtani su stvarni smjerovi sila u spojevima i njihove veličine izražene pomoću zadanih veličina. Iz uvjeta ravnoteže se odredjuje:

Na preostalim skicama su prikazani dijagrami reznih sila.

Članovi desne strane jednadžbe kontinuiteta

Članovi desne strane jednadžbi kontinuiteta se odredjuju prema općim izrazima (str.270).

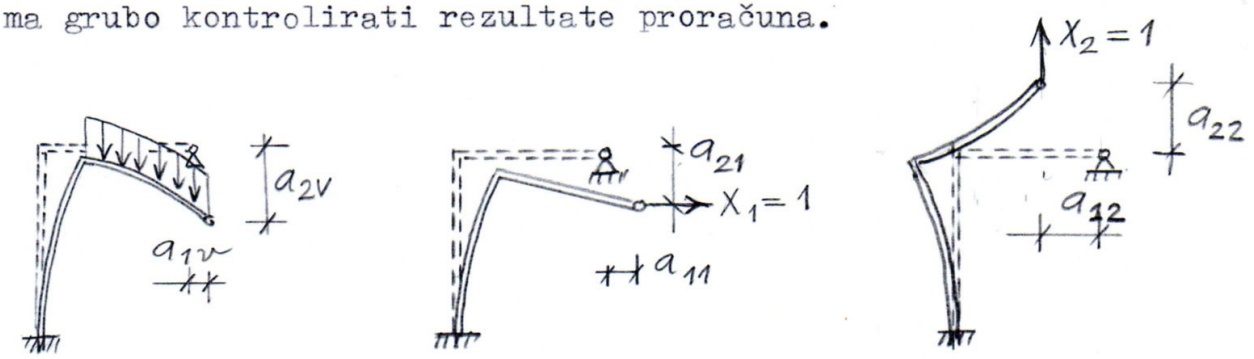
$$a_{1v} = \frac{q l_1^2 l_2^2}{4E_1I_1}$$

$$a_{2v} = -\left[\frac{q l_1 l_2^3}{2E_1I_1} + \frac{q l_2^4}{8E_2I_2} + \frac{\alpha_2 q l_2^2}{2G_2F_2} + \frac{q l_1 l_2}{E_1F_1}\right]$$

Iako se jednadžbe kontinuiteta mogu postavljati formalno prema općim izrazima, korisno je voditi računa o fizikalnom značenju: jednadžba kontinuiteta pretstavlja relativni pomak ili zaokret

HNIPK-85-272

i često je moguće pomoću kvalitativne skice deformiranog sistema grubo kontrolirati rezultate proračuna.



Rješavanje jednadžbi kontinuiteta

Za n=2 i n=3 sistem jednadžbi se može riješiti pomoću determinanti. Za veće stupnjeve preodredjenosti je u većini slučajeva efikasna Gaussova eliminacija. Ako je sistem dobro uvjetovan, t.j. ako je determinanta relativno velika može se primijeniti iterativni postupak. Za ocjenu uvjetovanosti ne izračunava se determinanta nego se promatra odnos dijagonalnih i vandijagonalnih članova. Ako je zbroj kvadrata dijagonalnih članova osjetno veći od zbroja kvadrata svih preostalih članova sistem je dobro uvjetovan.

Odredjivanje konačnog stanja zadanog sistema.

Konačno stanje čini rješenje osnovnog sistema na koji djeluje opterećenje i sva prekobrojna djelovanja s njihovim konkretnim veličinama, a to je ujedno i rješenje zadanog preodredjenog sistema. Treba odrediti reakcije, rezne sile i eventualno pomake. Moguća su dva pristupa:

a) Odredjivanje konačnog stanja superpozicijom

Sve veličine se odredjuju prema općem izrazu (str,268.):

$$\phi = \phi_v + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j X_j$$

Ukoliko su se parcijalna rješenja postavila dosljedno, onda se veličine reakcija, uzdužnih i poprečnih sila dobivaju uvrštavanjem u gornji izraz.

Za momente savijanja nisu ovdje definirani predznaci, pa se pravilo za linearnu kombinaciju treba posebno opisati. Pretpostavlja se da su rezne sile zadane dijagramima.
Množenjem momenta savijanja negativnim skalarom dobiva se moment čije se ordinate nanose na suprotnu stranu od ordinata koje se množe. Ordinate se dobivaju množenjem početnih s apsolutnom veličinom skalara s kojim se množi.
Zbrajanje momenta savijanja čije su ordinate na istoj strani, vrši se tako da se ordinate zbroje i dobivena veličina nanosi na istu stranu.
Zbrajanje momenata savijanja čije su ordinate na različitim stranama vrši se tako da se od veće ordinate odbije manja i rezultat nanese na stranu veće.

HNPK-85-273

Deformaciona kontrola

Rješenje metode sila se zasniva na izrazima za konačne relativne pomake i zaokrete omogućene uvodjenjem prekida u zadani preodredjeni štapni sistem. Opći oblik tih izraza glasi:

$$a_i = a_{iv} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$$

Jednadžbe kontinuiteta pretstavljaju zahtjev da svi takovi relativni pomaci i zaokreti iščeznu.

Nakon odredjivanja konačnog stanja mogu se relativni pomaci i zaokreti izračunati pomoću reznih sila konačnog stanja:

$$a_i = \int_s \frac{m_i \cdot M\,ds}{EI} + \int_s \frac{\alpha t_i \cdot T\,ds}{GF} + \int_s \frac{n_i N\,ds}{EF}$$

Kako se metoda zasniva na iščezavanju svih takovih pomaka, morali bi pomaci izračunati pomoću reznih sila konačnog stanja iščezavati. Na taj način se može kontrolirati da li su članovi jednadžbi kontinuiteta korektno odredjeni i da li su korektno odredjene rezne sile konačnog stanja. Na taj se način ne može odrediti korektnost odredjivanja reznih sila za mjerna opterećenja t.j. za jedninična djelovanja.

Uvesti će se kontrolni postupak koji omogućava i kontrolu korektnosti reznih sila mjernih opterećenja.

Pretpostaviti će se da je zadani preodredjeni sistem ponovo riješen, ali pomoću nekog drugog osnovnog sistema. Konačna stanja dobivena na taj način morala bi dakako biti jednaka konačnim stanjima prvog rješenja.

Ukupni relativni pomaci i zaokreti omogućeni uvodjenjem drugog osnovnog sistema označiti će se sa a_i^D. Rezne sile uslijed mjernih opterećenja t.j. jedninićnih stanja za drugi osnovni sistem označiti će se sa m_i^D, t_i^D, n_i^D. I za drugi osnovni sistem mogu se ukupni relativni pomaci i zaokreti izraziti pomoću reznih sila konačnog stanja:

$$a_i^D = \int_s \frac{m_i^D M\,ds}{EI} + \int_s \frac{\alpha t_i^D \cdot T\,ds}{GF} + \int_s \frac{n_i^D N\,ds}{EF}$$

Svi tako odredjeni ukupni relativni pomaci i zaokreti moraju iščezavati. Na tome se zasniva kontrolni postupak koji se naziva deformaciona kontrola. Nakon rješavanja sistema po metodi sila odabire se novi osnovni sistem. Taj sistem se rješava zasebno samo za jedinična djelovanja. Pomoću dobivenih reznih sila za jedinična djelovanja i reznih sila konačnog stanja iz prvog postupka odredjuju se ukupni relativni pomaci i zaokreti prema gornjim izrazima. Ako su sve tako dobivene veličine zadovoljavajuće bliske nuli, postoji velika vjerojatnost da je zadani preodredjeni sistem korektno riješen.

Kod sistema s velikim stupnjem preodredjenosti odabire se samo nakoliko karakterističnih relativnih pomaka i zaokreta za drugi osnovni sistem i ne odredjuje se svih "n".

HNPK-85-274

Novi osnovni sistem pomoću kojeg se provodi deformaciona kontrola odabire se tako da rezne sile za nekoliko mjernih opterećenja budu različite od nule na što većem dijelu sistema, jer se greške mogu otkriti samo za te dijelove sistema.

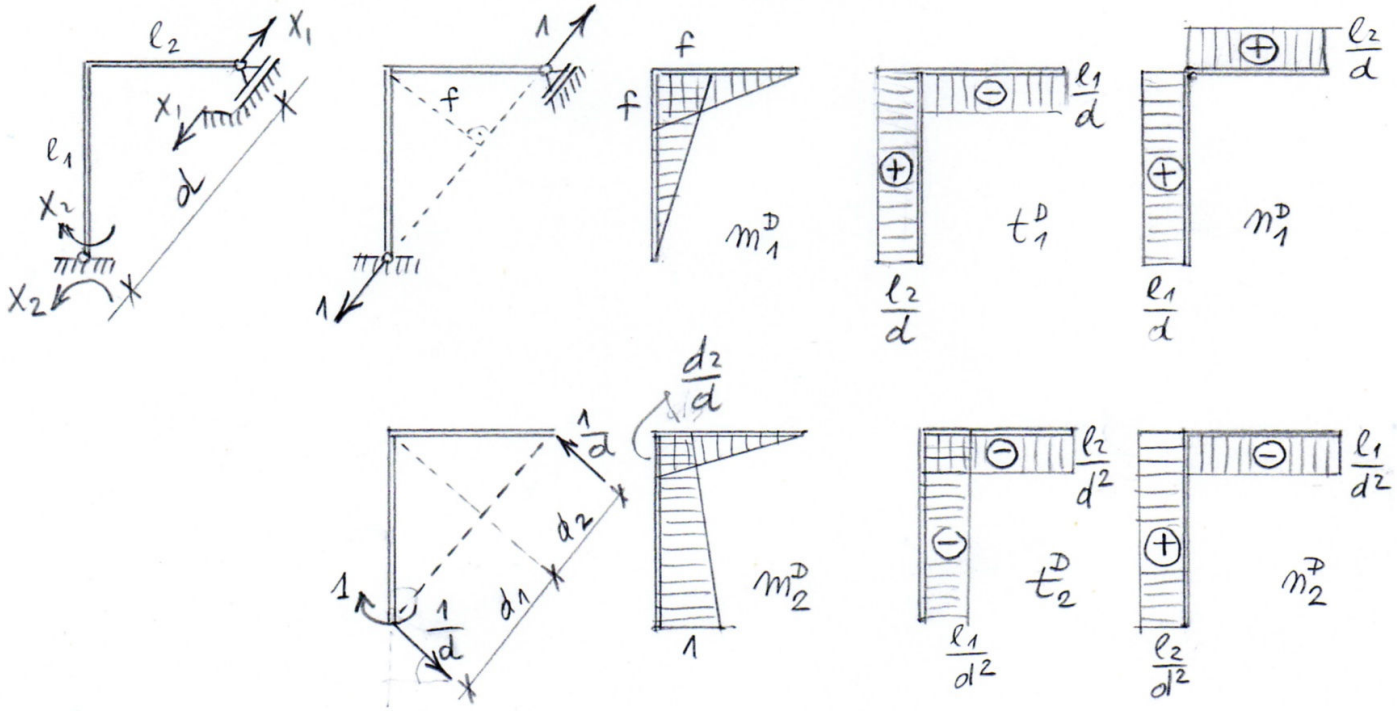
Zaključno se može definirati:
Deformaciona kontrola je postupak za kontrolu rješavanja preodredjenih sistema pomoću ukupnih relativnih pomaka i zaokreta odredjenih na uvedenim prekidima novog osnovnog sistema, koji mora biti različit od sistema odabranog u postupku rješavanja.

Korisno je naglasiti da deformaciona kontrola ne može otkriti greške u postavljanju zadatka, dakle greške u podacima o sistemu i podacima o opterećenju, pa tim podacima treba posvetiti naročitu pažnju.

Isto je tako važno uočiti da se i kontrolni postupak može pogrešno provesti, pa prema tome relativni pomaci i zaokreti bitno različiti od nule ne znače da je samo osnovni postupak pogrešan. Pogreške u kontrolnom postupku su skoro češće jer se taj dio posla može smatrati "suvišnim",

HWDP-85-275

Kao primjer je prikazan novi osnovni sistem uveden za preodredjeni poluokvir prikazan na str.271. Za svamo mjerno opterećenje su prikazna rezultirajuća djelovanja sila u spojevima sa stvarnim smjerovima djelovanja i pripadni dijagrami reznih sila.



Kako se za svako mjerno opterećenje pojavljuju rezne sile različite od nule na cijelom sistemu biti će dovoljno deformacionu kontrolu provesti samo pomoću jednog mjernog opterećenja i to prema izrazu prikazanom na str 274.

Odredjivanje proizvoljnih pomaka na preodredjenom štapnom sistemu.

Nakon odredjivanja konačnog stanja po metodi sila, t.j. općenito nakon rješavanja preodredjenog sistema na bilo koji način, može se pojaviti potreba za odredjivanjem nekih apsolutnih ili relativnih pomaka i/ili zaokreta.

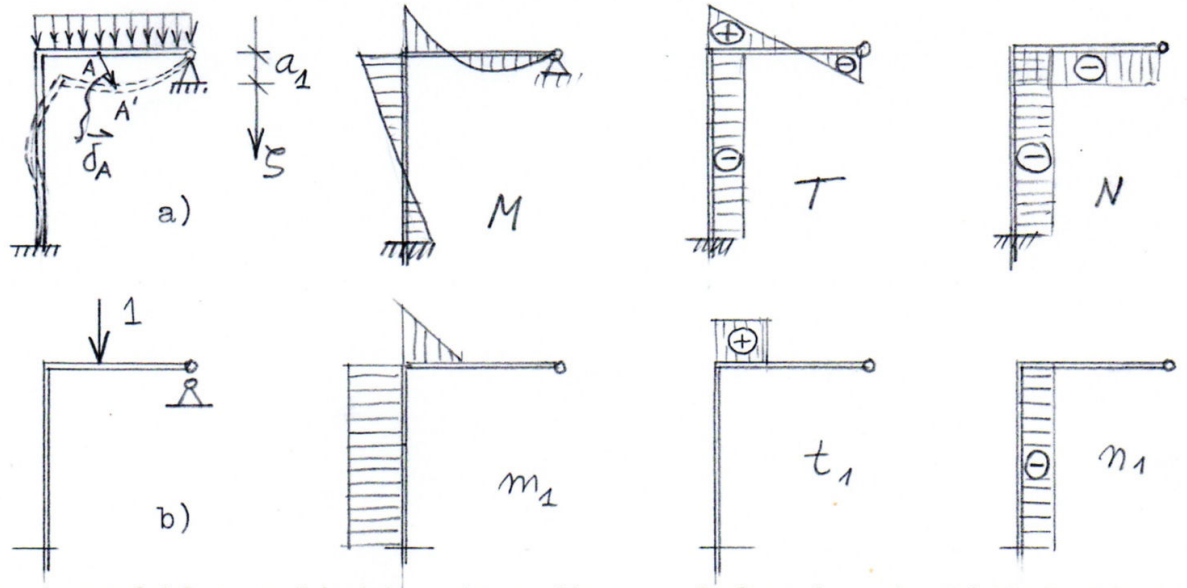
Ako se pomaci i zaokreti odredjuju pomoću mjernih opterećenja i integralnog izraza prikazanog na str.239. može se za djelovanje mjernog opterećenja koristiti bilo koji osnovni sistem.

Objašnjenje tog zaključka je moguće pomoću principa korištenog kod metode sila. Ako se bilo kojem osnovnom sistemu pridruže rezne sile konačnog stanja, znači da u uvedenim prekidima djeluju upravo točne prekobrojne veličine, pa će se osnovni sistem nalaziti u istom mehaničkom stanju kao i zadani sistem i moći će poslužiti za odredjivanje proizvoljnih pomaka i zaokreta.

Iako se takovo objašnjenje čini prirodnim, pogotovo nakon uvodjenja metode sila i deformacione kontrole, postojala je faza u povijesti teorije konstrukcija u kojoj se smatralo da se za odredjivanje proizvoljnih pomaka i zaokreta preodredjenih sistema mora i mjerno opterećenje postaviti na preodredjeni sistem. Kada je mogućnost primjene bilo kojeg osnovnog sistema uočena, ona je i teoretski dokazana i uvedena u teoriju konstrukcija pod nazivom "redukcioni stav".

HWPK-85-276

Kao primjer je odabrano odredjivanje projekcije apsdutnog infinitezimalnog pomaka na preodredjenom poluokviru koji je uveden na str.271. Na skici a) je prikazan poluokvir sa zadanim opterećenjem



a isprekidanom linijom je prikazan deformirani oblik koji je nastao pod djelovanjem tog opterećenja. Na nedeformiranom sistemu je istaknuta točka A. Njen pomaknuti položaj je označen s A'. Točkama A i A'kao početkom i šiljkom odredjen je vektor apsolutnog pomaka točke A. Odrediti će se projekcija tog pomaka na os S. Uz skicu a) su istom redu prikazani dijagrami reznih za taj slu-

čaj; to su rezne sile konačnog stanja po metodi sila M,T,N. Na skici b) je prikazano mjerno opterećenje za odredjivanje potrebne projekcije apsolutnog pomaka: jedinična sila u točki A paralelna s osi ζ i usmjerena kao os ζ. Sila djeluje na osnovni sistem koji je slučajno jednak onome pomoću kojeg se provodio proračun. U istom redu su prikazani i dijagrami reznih sila za mjerno opterećenje. Projekcija apsolutnog pomaka je označena s a_1, a odrediti će se prema izrazu:

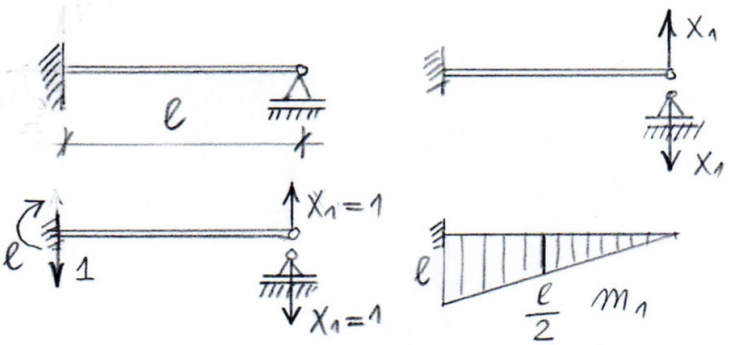
$$a_1 = \int_S \frac{m_1 \cdot M}{EI} ds + \int_S \frac{\alpha t_1 \cdot T}{GF} ds + \int_S \frac{n_1 \cdot N}{EF} ds$$

Primjeri jednostepenih predodredjenih sistema

Prikazati će se nekoliko osnovnih slučajeva za koje je korisno upoznati rješenje općim brojevima.

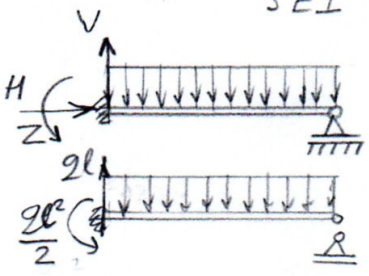
1) Greda spojena kruto na jednom kraju, a pomičnim zglobom na drugom, ili- jednostrano upeta greda.

HWPK- 85-277

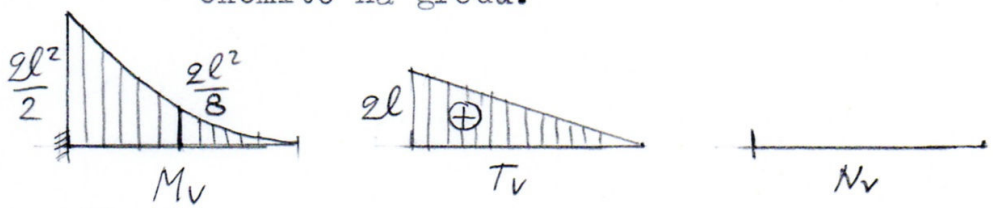


Osnovni sistem je dobiven isključivanjem pomičnog zgloba.

$$a_{11} = \frac{\ell^3}{3EI} + \frac{\alpha \ell}{GF}$$



1) Djelovanje konstantne distribuirane sile okomito na gredu.

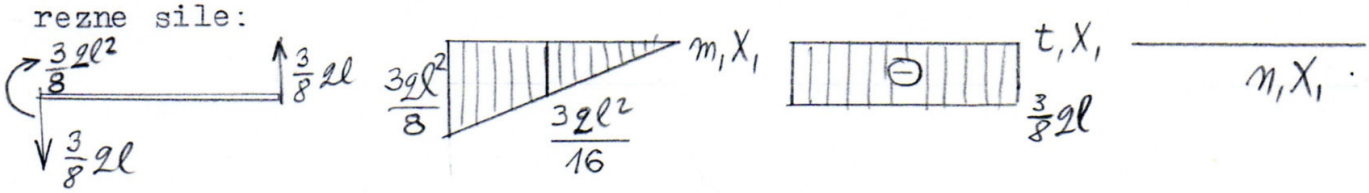


$$a_{1V} = -\frac{2\ell^4}{8EI} - \frac{\alpha 2\ell^2}{2GF} \; ; \quad X_1 = -\frac{a_{1V}}{a_{11}}$$

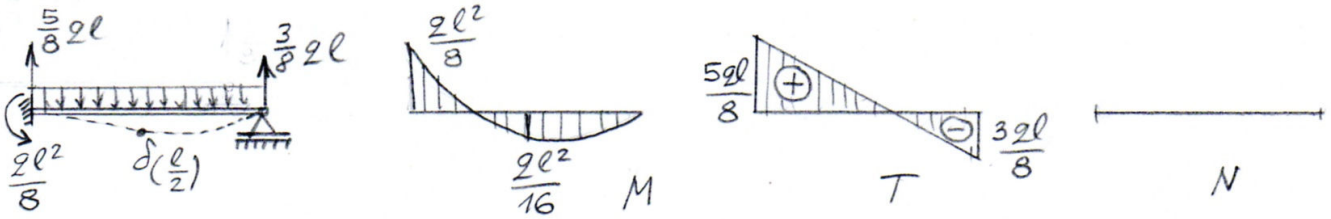
Uz zanemarenje utjecaja poprečnih sila na deformacije, dobiva se:

$$X_1 = -\frac{a^M_{1V}}{a^M_{11}} = +\frac{2\ell^4 \cdot 3EI}{8EI \cdot \ell^3} = \frac{3}{8} 2\ell$$

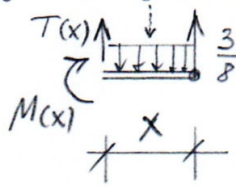
Od djelovanja dobivene veličine X_1 na osnovnom sistemu dobivaju se rezne sile:



Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine, t.j. superpozicijom se dobiva:



Funkcija momenta savijanja ima unutar područja analitički ekstrem, koji se obično označava kao maksimalni moment u polju. Kako ne djeluju distribuirani momenti nalaziti će se ekstrem momenta savijanja na mjestu za koje iščezava poprečna sila:



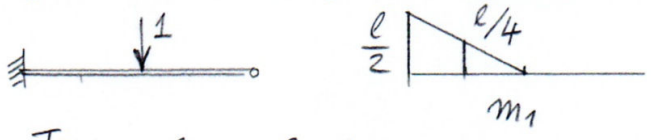
$$T(x) = q \cdot x - \frac{3}{8} q l$$

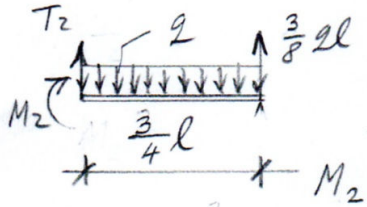
$$0 = q \cdot x - \frac{3}{8} q l \; ; \quad x = \frac{3}{8} l$$

$$\max M = M_{(\frac{3}{8}l)} = \frac{3}{8} q \cdot l \cdot \frac{x}{2} = \frac{9}{128} q l^2$$

Vidljivo je da je maksimalni moment veći od momenta u polovini raspona za 12,5%.

Odrediti će se još i progib u sredini raspona t.j. projekcija pomaka rspolovišta raspona na os okomitu na neopterećeni štap. Mjerno opterećenje će djelovati na osnovni sistem. Uzeti će se u obzir samo doprinos momenata savijanja. U mometnom dijagramu rješenja zadanog sistema nije odredjena vrijednost u prvoj četvrtini raspona potrebna za integraciju.

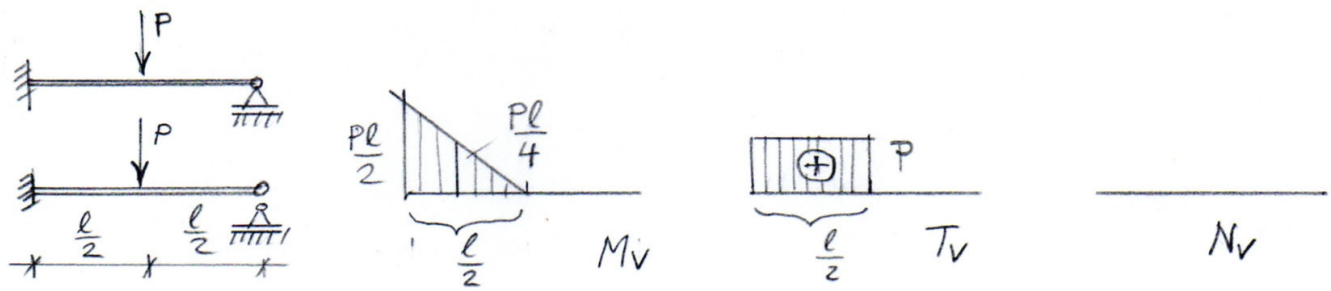




$$M_2 = -\frac{3}{8} l \cdot \frac{3}{4} l \cdot q + \frac{3}{4} l \cdot \frac{3}{8} q l = 0$$

$$\delta_{(\frac{l}{2})} = \frac{l}{2 \cdot 6 \cdot EI} \left(\frac{q l^2}{8} \cdot \frac{l}{2} + 4 \cdot 0 + 0 \right) = \frac{q l^4}{192 EI}$$

1b) Djelovanje koncentrirane sile okomito na os u sredini raspona



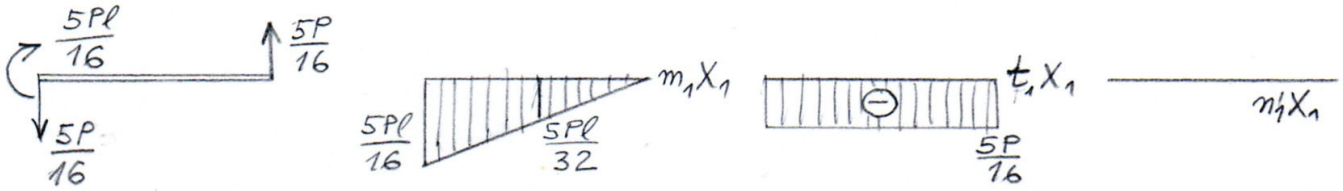
$$a_{1v} = -\frac{l}{6 \cdot 2 \cdot EI} \left(l \cdot \frac{Pl}{2} + 4 \cdot \frac{3l}{4} \cdot \frac{Pl}{4} + 0 \right) - \frac{\alpha l P}{2GF} = -\frac{5 P l^3}{48 EI} - \frac{\alpha P l}{2GF}$$

HWPL-85-278

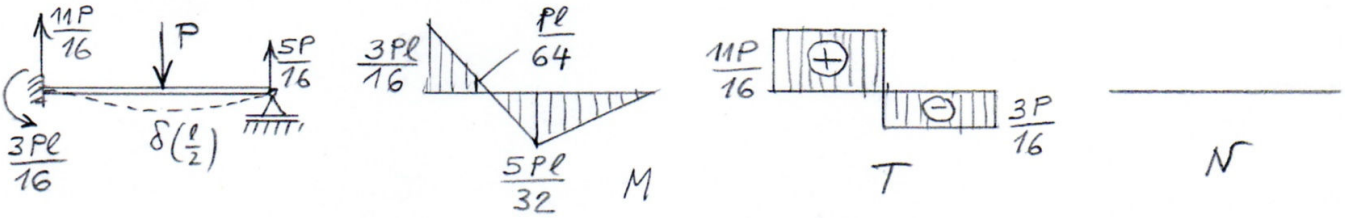
$X_1 = -\frac{a_{1v}}{a_{11}}$. Uz zanemarenje utjecaja momenata savijanja na deformacije dobiva se:

$$X_1 = -\frac{a_{1v}^M}{a_{11}^M} = +\frac{5Pl^3 \cdot 3EI}{48EI \cdot l^3} = \frac{5}{16}P$$

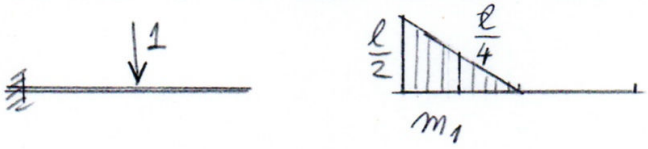
Od djelovanja prekobrojne sile na osnovni sistem dobiva se:



Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine, t.j. superpozicijom se dobiva:

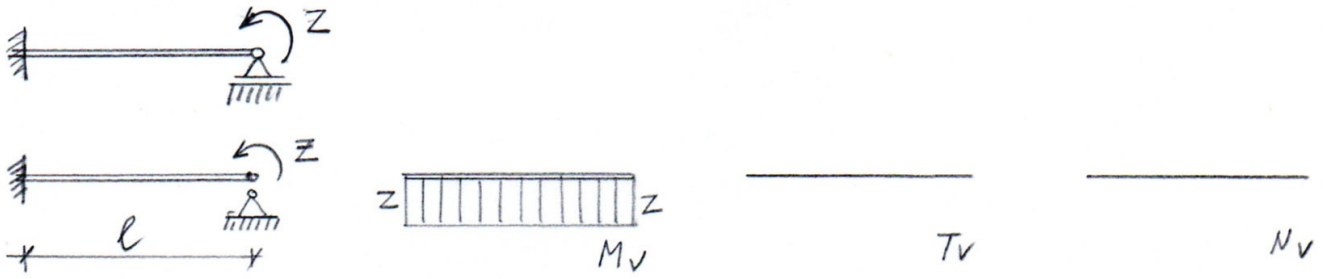


Odrediti će se još i progib u sredini raspona t.j. projekcija pomaka raspolovišta raspona na os okomitu na neopterećeni štap. Pri tome će se samo uzeti u obzir doprinos savijanja.



$$\delta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l}{2 \cdot 6 \cdot EI}\left(\frac{l}{2} \cdot \frac{3Pl}{16} + 4 \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{Pl}{64} + 0\right) = \frac{7Pl^3}{768EI}$$

1c) Djelovanje koncentriranog momenta na presjek uz pomični zglob

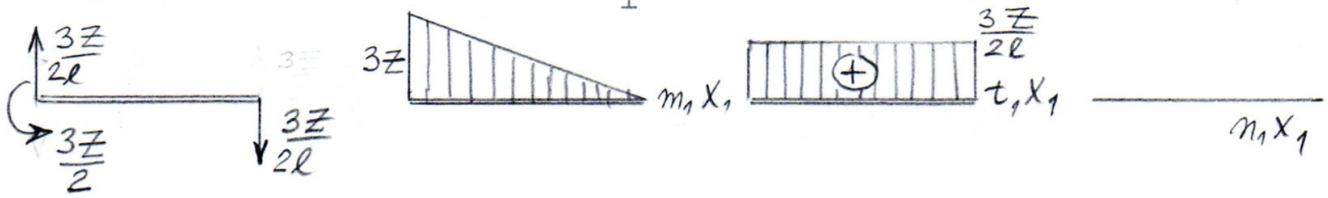


$$a_{1v} = +\frac{Zl^2}{2EI} \qquad X_1 = -\frac{a_{1v}}{a_{11}}$$

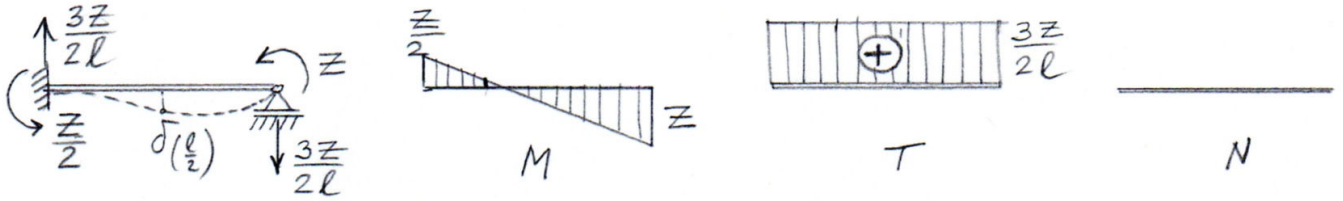
Zadatak će se riješiti uz zanemarenje poprečnih sila na deformacije:

$$X_1 = -\frac{Z \cdot l^2}{2EI} \cdot \frac{3EI}{l^3} = -\frac{3Z}{2l}$$

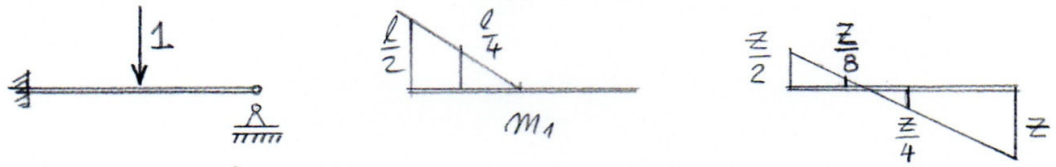
Od djelovanja prekobrojne sile X_1 na osnovni sistem dobiva se:



Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine, t.j. superpozicijom se dobiva:

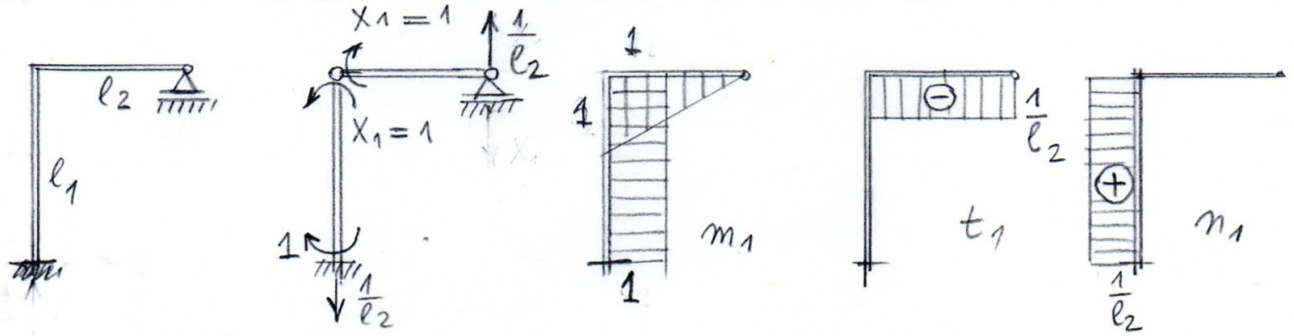


Odrediti će se progib u sredini raspona. Uzeti će se u obzir samo doprinos savijanja. Uz momentni dijagram od mjernog opterećenja prikazati će se i konačni dijagram za zadano vanjsko opterećenje uz naznaku potrebnih ordinata.



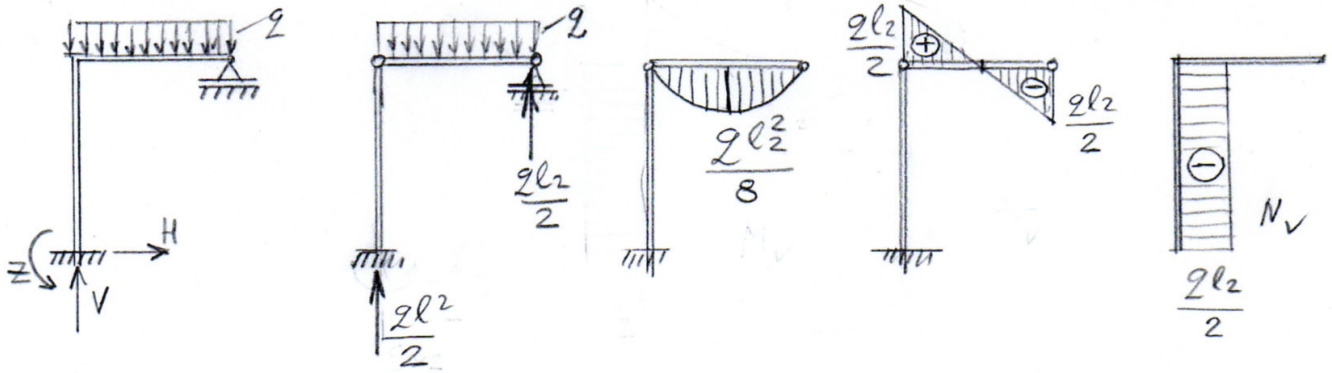
$$\delta_{(\frac{\ell}{2})} = \frac{\ell}{2 \cdot 6 \cdot EI}\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{Z}{2} + 4\cdot\frac{\ell}{4}\cdot\frac{Z}{8} + 0\right) = \frac{Z\ell^2}{32EI}$$

2) Poluokvir spojen krutim spojem i pomičnim zglobom



$$a_{11} = \frac{\ell_1}{E_1 I_1} + \frac{\ell_2}{3E_2 I_2} + \frac{\alpha_2}{G_2 F_2} + \frac{\ell_1}{E_1 F_1 \cdot \ell_2}$$

2a) Djelovanje konstantne distribuirane sile okomite na gredu.



HWPK-85-280

$$a_{1V} = \frac{q l_2^3}{24 E_2 I_2} - \frac{q l_1}{2 E_1 F_1} \; ; \qquad X_1 = - \frac{a_{1V}}{a_{11}}$$

Zadatak će se općim brojevima riješiti samo za specijalni slučaj u kojemu se zanemaruju utjecaji poprečnih i uzdužnih sila na deformacije.

$$X_1 = - \frac{a_{1V}^M}{a_{11}^M} = - \frac{q l_2^3}{24 E_2 I_2 \left(\frac{l_1}{E_1 I_1} + \frac{l_2}{3 E_2 I_2} \right)}$$

Kada bi stup poluokvira bio potpuno nedeformabilan; kaže se još i: neizmjerno krut, onda bi greda bila u istom stanju kao jednostrano upeta greda obradjena kao zadatak 1). Znači da će se moment u spoju stupa i grede, a to je upravo prekobrojna veličina X_1, više približavati vrijednosti $q l_2^2/8$ što će odnos deformabilnosti stupa i grede biti manji. Da se odredi mjera deformabilnosti stupa i grede u ovom slučaju svesti će se izraz za X_1 na oblik $\beta q l_2^2/8$ Zbog toga će se brojnik i izraz u zagradi nazivnika pomnožiti sa

$$\frac{3 E_2 I_2}{l_2}.$$

$$X_1 = - \frac{q l_2^2}{8 \left(\frac{l_1}{E_1 I_1} \cdot \frac{3 E_2 I_2}{l_2} + 1 \right)} = \frac{q l_2^2}{8} \beta$$

Omjeri $E_i I_i / l_i$ uvesti će se kao nove veličine; krutosti pri savijanju ili fleksione krutosti štapnog elementa i označiti će se sa K_i . Uvodi se fleksiona krutost stupa K_1 i fleksiona krutost grede K_2 :

$$K_1 = \frac{E_1 I_1}{l_1} \; ; \qquad K_2 = \frac{E_2 I_2}{l_2}$$

Uvrštavanjem oznake za krutosti dobiva izraz za β pregledan oblik:

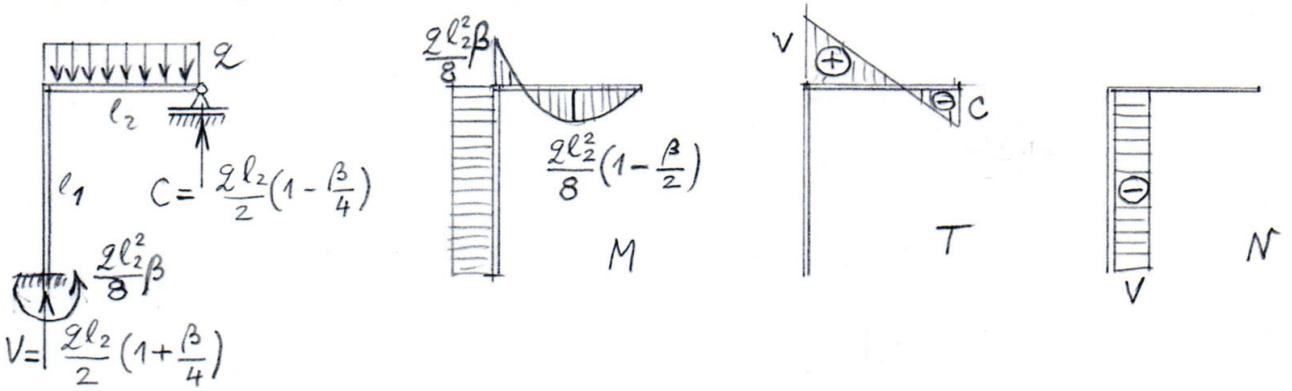
$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{3 K_2}{K_1}}$$

Ako je krutost stupa bitno veća od trostruke krutosti grede faktor β će praktički biti jednak 1. U graničnom slučaju nedeformabilnog t.j. neizmjerno krutog stupa β će biti točno 1. Ako je trostruka krutost grede bitno veća od krutosti stupa X će biti praktički nula. U graničnom slučaju sistem će se ponašati kao osnovni sistem.
Ovakav način povezivanja srodnih zadataka koristan je iz više razloga:

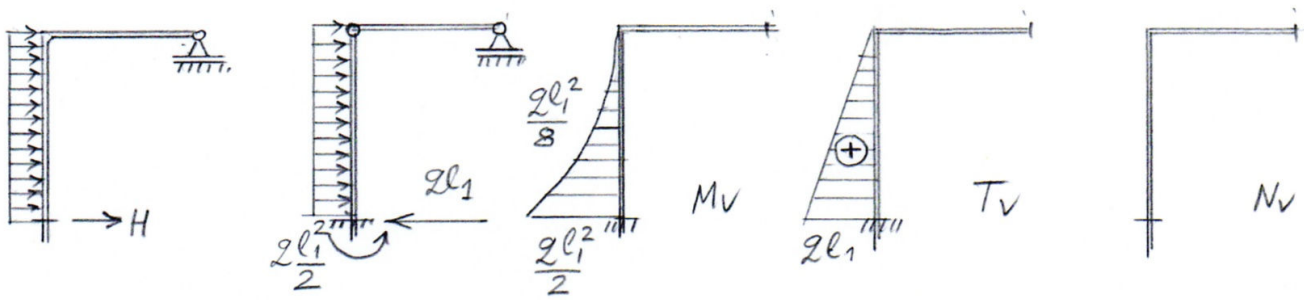
- svadjanje složenijeg slučaja na jednostavniji daje mogućnost kontrole izvoda.
- poznavanje graničnih slučajeva omogućava izbjegavanje grubih grešaka u proračunima.
- slučajevi složenijeg zadatka koji su bliski graničnima mogu se približno poistovjetiti s graničnim slučajima i tako skratiti proračun.

HWPP-85-281

Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine dobiva se rješenje zadanog sistema.



2b) Djelovanje konstantne distribuirane sile okomito na stup

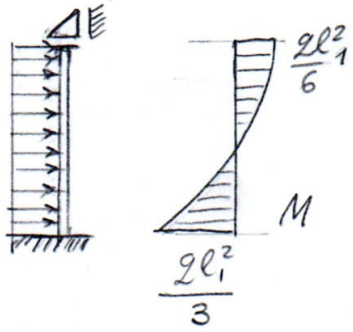


$$a_{1V} = -\frac{ql_1^3}{6E_1I_1}; \qquad X_1 = -\frac{a_{1V}}{a_{11}}$$

Zadatak će se općim brojevima riješiti samo za slučaj u kojemu se zanemaruju doprinosi poprečnih i uzdužnih sila deformacijama.

$$X_1 = -\frac{a_{1V}}{a_{11}^M} = \frac{ql_1^3}{6E_1I_1\left(\frac{l_1}{E_1I_1}+\frac{l_2}{3E_2I_2}\right)} = \frac{ql_1^2}{6}\gamma$$ pri čemu je:

$$\gamma = \frac{1}{1+\frac{K_1}{3K_2}}$$

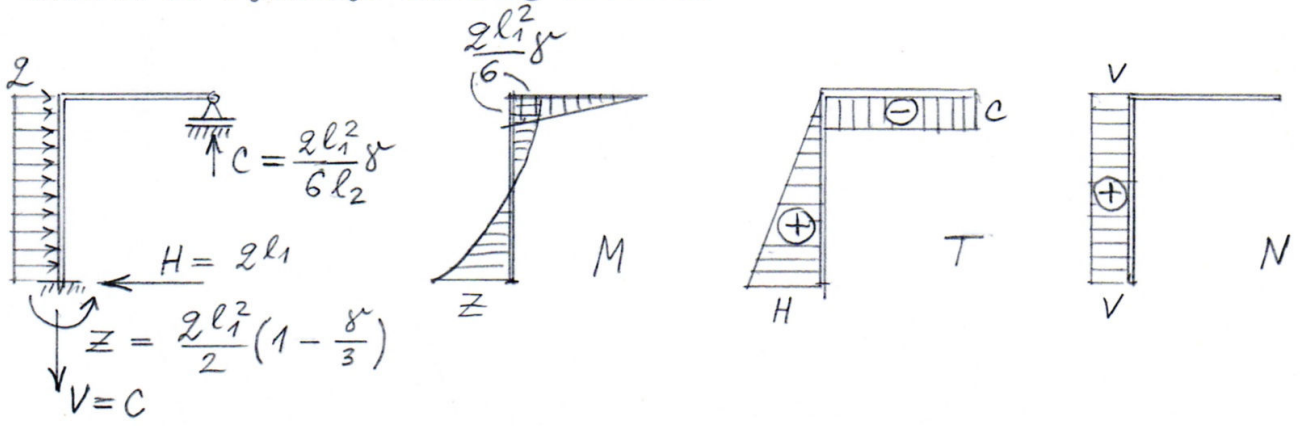


K_1 i K_2 su krutosti pri savijanju štapnih elemenata uvedene na str. 281. Porastom krutosti grede faktor γ će se približavati vrijednosti 1. Smanjivanjem krutosti grede, faktor će se približavati nuli. U tom graničnom slučaju zadani sistem će se ponašati kao osnovni sistem.

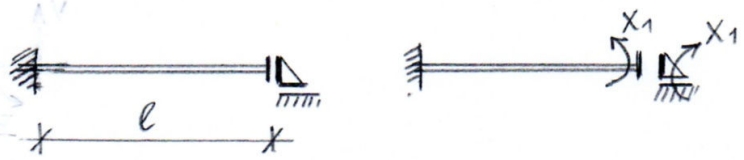
U graničnom slučaju u kojem je greda neizmjerno kruta ona djeluje na stup kao momentni spoj. Na lijevoj skici je prikazano rješenje za štap koji je dolje upet, a gore spojen kliznim spojem. Rješavanje je prikazano na str. 283.

HWPE- 85-282

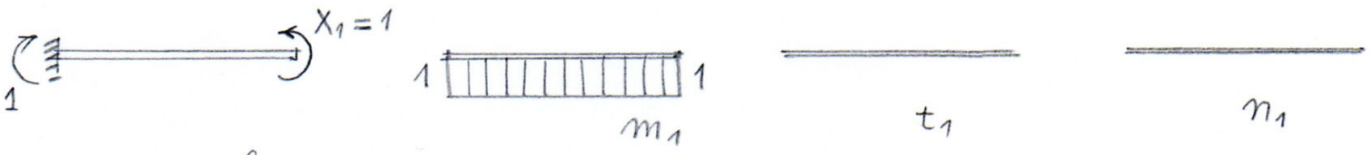
Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine dobiva se rješenje zadanog sistema.



3) Greda spojena na jednom kraju krutim spojem a na drugom momentnim spojem - pomično upeta greda

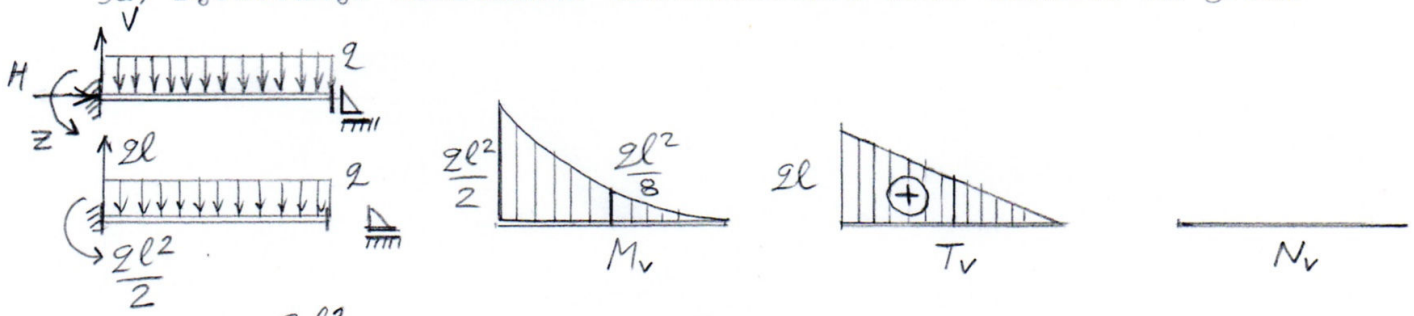


Osnovni sistem je uveden isključivanjem momentnog spoja.



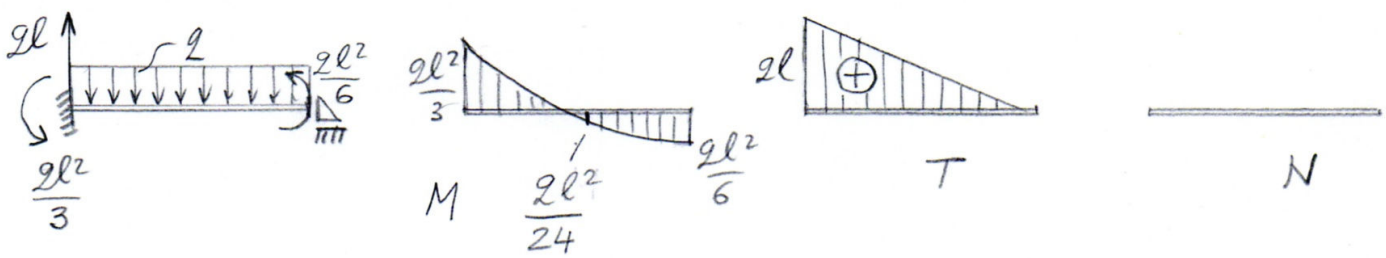
$$a_{11} = \frac{l}{EI}$$

3a) Djelovanje konstantne distribuirane sile okomito na gredu



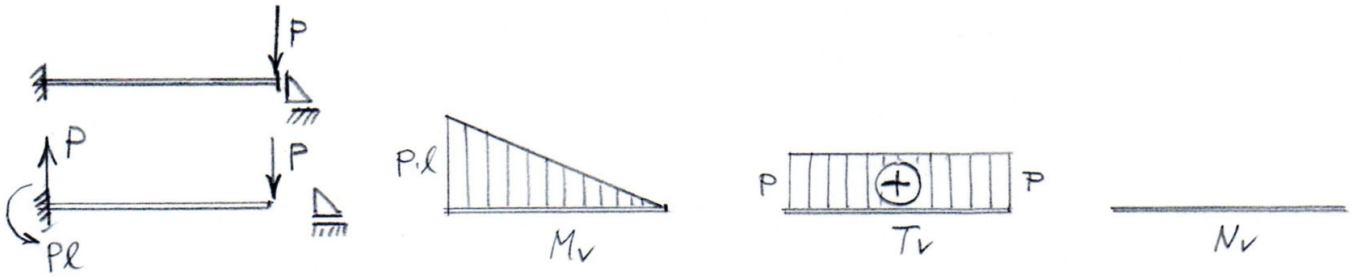
$$a_{1v} = -\frac{q l^3}{6EI}; \qquad X_1 = -\frac{a_{1v}}{a_{11}} = \frac{ql^2}{6}$$

Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojene veličine, dobiva se:



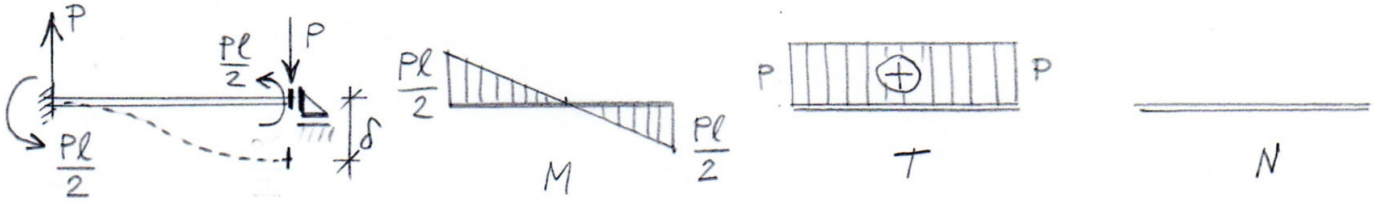
HWPK-85-283

3b) Djelovanje koncentrirane sile okomito na os na presjek uz momentni spoj.



$$a_{1V} = -\frac{Pl^2}{2EI} \; ; \qquad X_1 = -\frac{a_{1V}}{a_{11}} = \frac{Pl}{2}$$

.Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine, dobiva se:

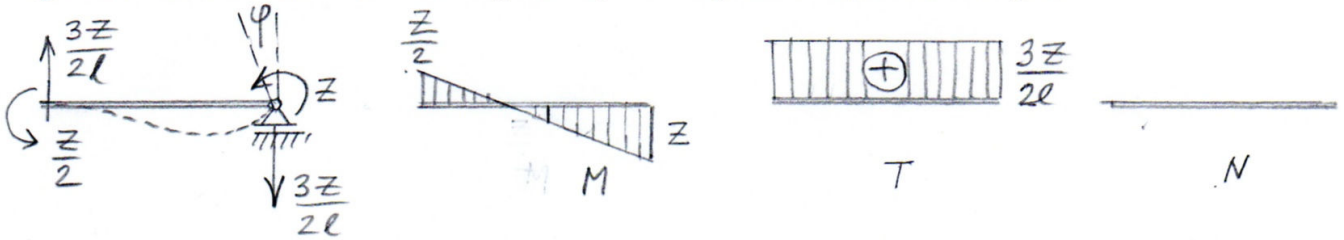


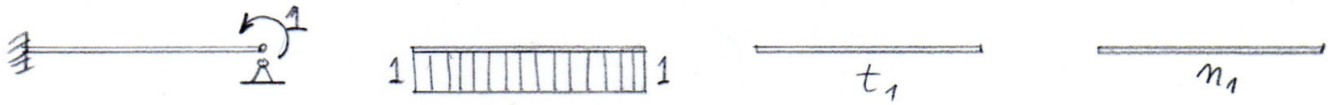
Odrediti će se i progib presjeka na koji djeluje sila. Uzeti će se u obzir samo doprinos savijanja. Mjerno opterećenje će djelovati na osnovnom sistemu.



$$\delta = \frac{l}{6EI} \cdot l \cdot \frac{Pl}{2} = \frac{Pl^3}{12EI}$$

DOPUNA slučaju 1c)
Odredjivanje apsolutnog zakreta poprečnog presjeka uz pomični zglob. Prikazati će se rješenje i mjerno opterećenje.

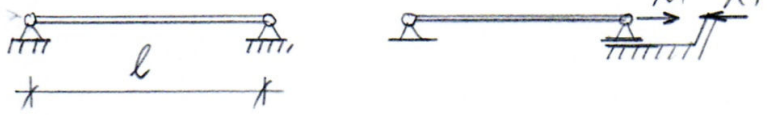




$$\varphi = \frac{l}{2EI}\left(-\frac{Z}{2} + Z\right) = \frac{Zl}{4EI}$$

HWDP - 85-284

4) Dvozglobna greda.

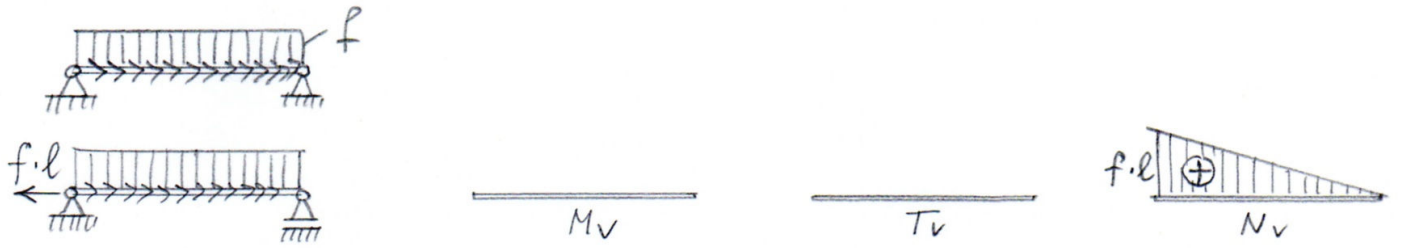


Osnovni sistem je dobiven zamjenom nepomičnog zgloba pomičnim zglobom.



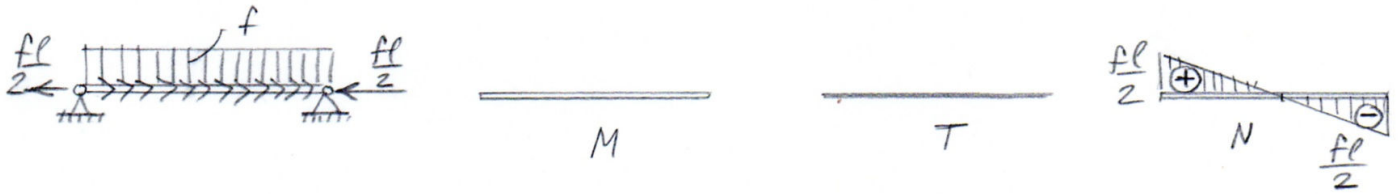
$$a_{11} = \frac{l}{EF}$$

4a) Djelovanje konstantne distribuirane sile duž grede.

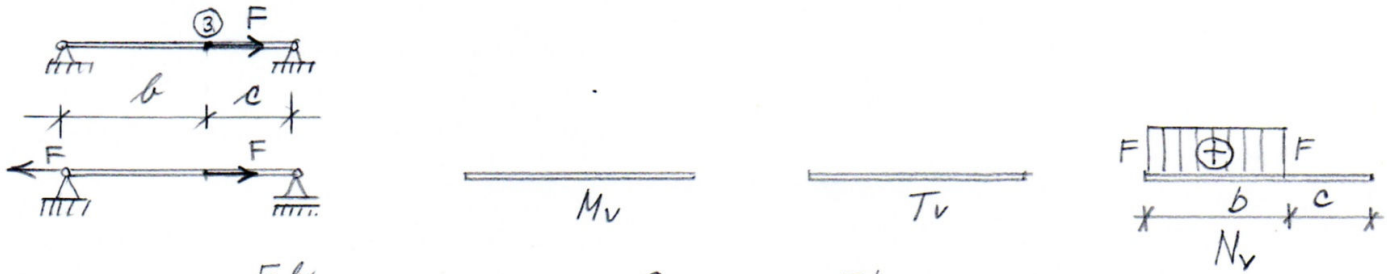


$$a_{1v} = + \frac{f \cdot l^2}{2EF}\,; \qquad X_1 = - \frac{a_{1v}}{a_{11}} = \frac{f \cdot l}{2}$$

Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine dobiva se:

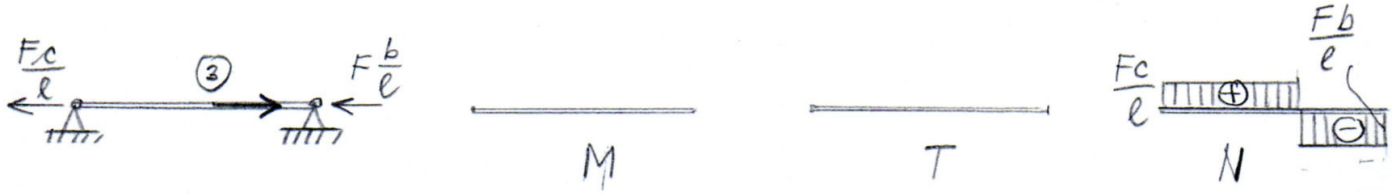


4b) Djelovanje sile duž osi. Hvatište u polju.
Hvatište je označeno s 3.



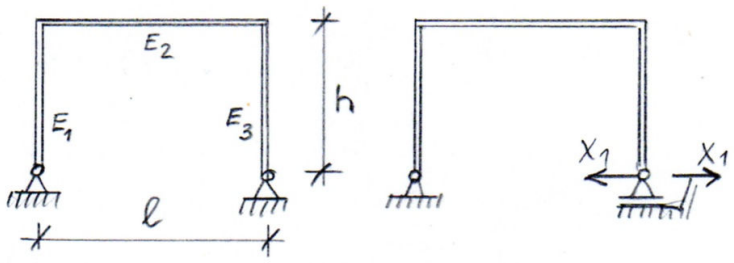
$$a_{1v} = + \frac{Fb}{EF} \qquad X_1 = - \frac{a_{1v}}{a_{11}} = - \frac{Fb}{l}$$

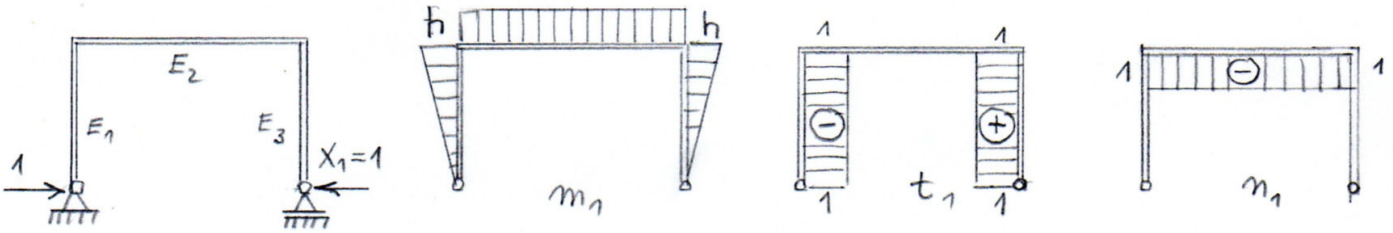
Zbrajenjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine dobiva se:



HWDP- 85- 285

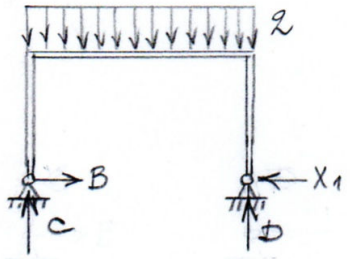
5) Dvozglobni okvir

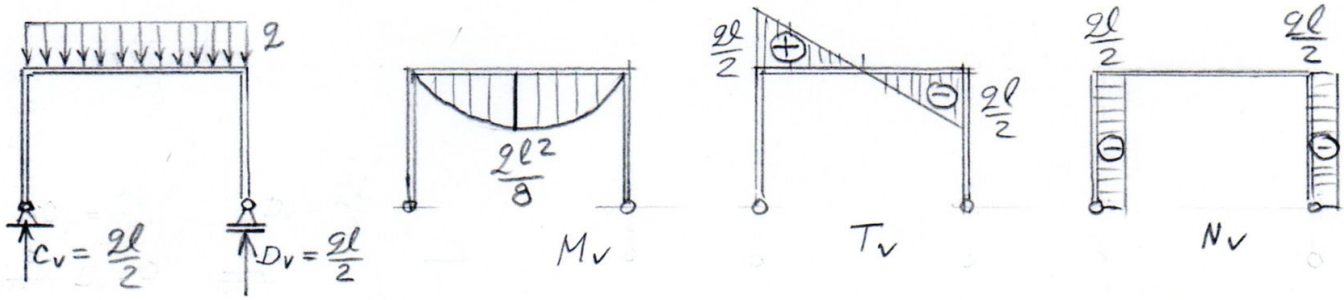




$$a_{11} = \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_3 I_3}\right) + \frac{h^2 l}{E_2 I_2} + h\left(\frac{\alpha_1}{G_1 F_1} + \frac{\alpha_3}{G_3 F_3}\right) + \frac{l}{E_2 F_2}$$

5a) Djelovanje konstantne distribuirane sile okomito na gredu





$$a_{1V} = -\frac{2 l^3 h}{12 E_2 I_2} \qquad X_1 = -\frac{a_{1V}}{a_{11}}$$

Zadatak će se općim brojevima riješiti samo za slučaj u kojemu se zanemaruju doprinosi poprečnih i uzdužnih sila deformacijama.

$$X_1 = -\frac{a^M_{1V}}{a^M_{11}} = \frac{2 l^3}{12 E_2 I_2\left[\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_3 I_3}\right) + \frac{h l}{E_2 I_2}\right]}$$

Nadalje će se promatrati samo specijalni slučaj simetričnog okvira t.j. $E_3 = E_1$, $G_3 = G_1$, $F_3 = F_1$, $I_3 = I_1$, $\alpha_3 = \alpha_1$

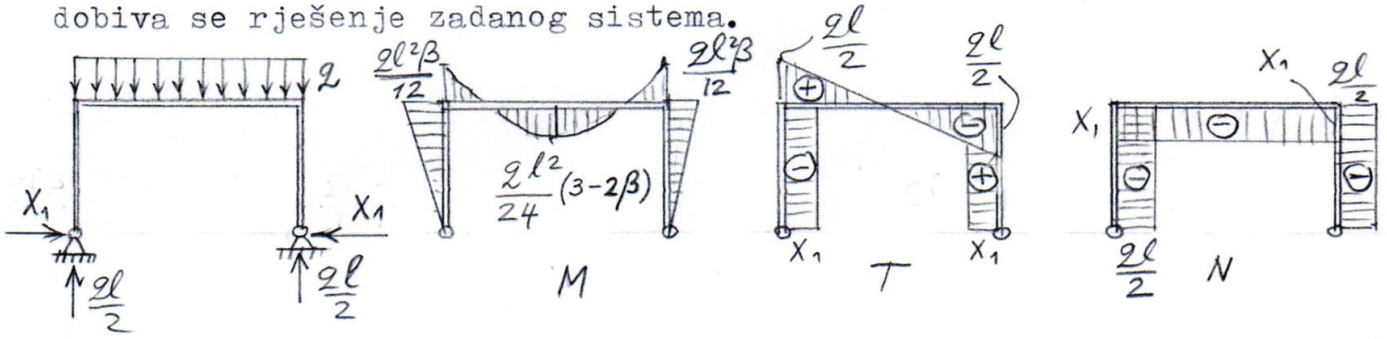
$$X_1 = \frac{q l^2}{12 h} \cdot \frac{1}{\left[\frac{2h \cdot E_2 I_2}{3 l \; E_1 \cdot I_1} + 1\right]} = \frac{q l^2}{12 h} \cdot \beta$$

HWPK-85-286

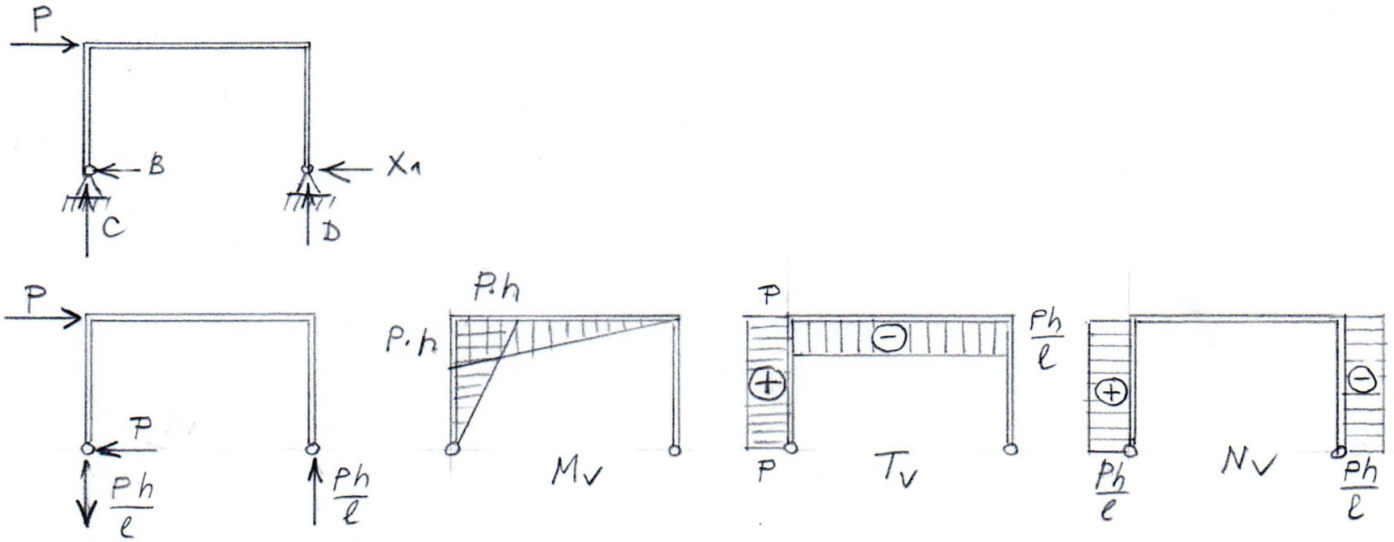
Prekobrojna sila je svedena na izraz u kojemu se pojavljuje bezdimenzionalni koeficijent β koji je funkcija krutosti grede i stupova. $\beta = \frac{1}{\frac{2K_2}{3K_1}+1}$

Povećavanjem omjera krutosti grede i stupa β se približava nuli t.j rješenje se približava stanju osnovnog sistema, Smanjivanjem omjera krutosti grede i stupova β se približava vrijednosti 1. U graničnom slučaju $\beta = 1$, a moment u spoju grede i stupa postaje $ql^2/12$ što je jednako momentu na ležaju obostrano kruto spojene grede (str.300.).

Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine dobiva se rješenje zadanog sistema.



5b) Djelovanje koncentrirane sile paralelne s gredom



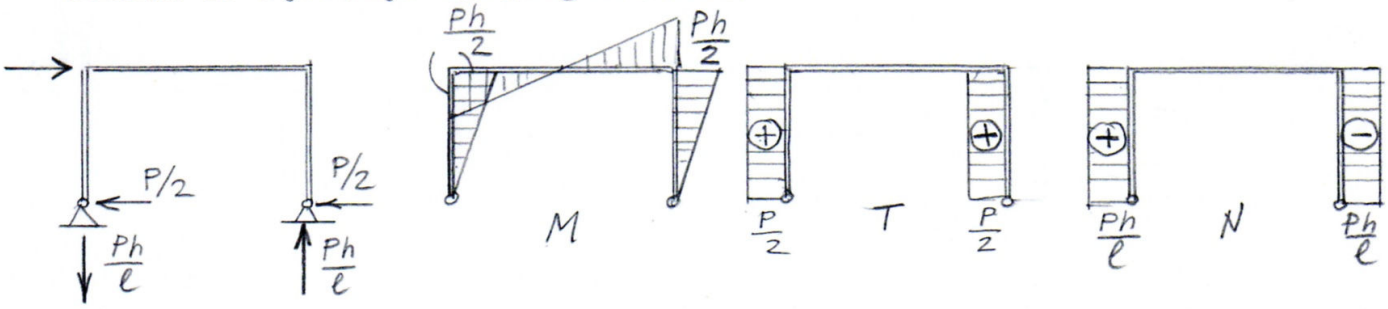
$$a_{1v} = -\frac{Ph^3}{3E_1I_1} - \frac{Ph^2\ell}{2E_2I_2} - \frac{\alpha_1 P_1 h}{G_1F_1} \; ; \qquad X_1 = -\frac{a_{1v}}{a_{11}}$$

Žadatak će se općim brojevima riješiti samo za specijalni slučaj simetričnog okvira uz zanemarenje utjecaja poprečnih i uzdužnih sila na deformacije.

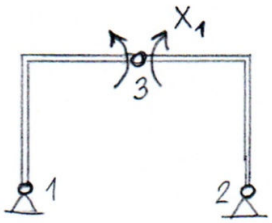
$$X_1 = \frac{Ph^2\left(\frac{h}{3E_1I_1} + \frac{\ell}{2E_2I_2}\right)}{h^2\left(\frac{2h}{3E_1I_1} + \frac{\ell}{E_2I_2}\right)} = \frac{P}{2}$$

HWPK-85-287

Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine dobiva se rješenje zadanog sistema.

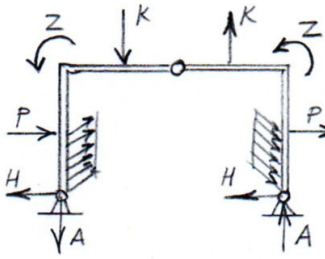


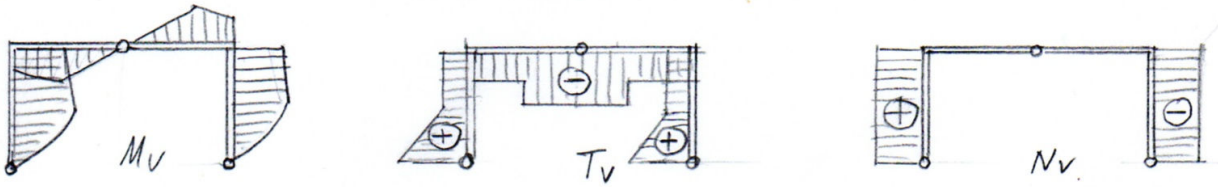
5c) Djelovanje antimetričnog opterećenja na simetrični okvir

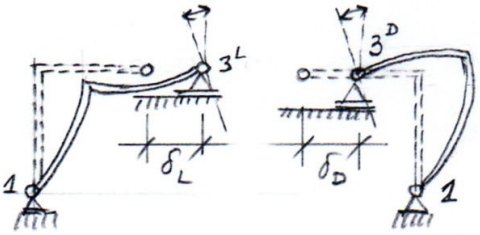


Za prikazivanje djelovanja antimetričnog opterećenja na simterični okvir uvesti će se novi osnovni sistem koji je takodjer simetričan: trozglobni okvir. Rezne sile za taj slučaj mogu se iz reznih sila za osnovni sistem prikazan na str 286 za djelovanje X_1 dobiti množenjem s 1/h. Znači da će moment savijanja i uzdužna sila biti simterični, a poprečna sila će biti antimetrična.

Za proizvoljno antimetrično opterećenje iščezava prekobrojna veličina. Kod antimetričnog opterećenja u simterićnim točkama okvira djeluju sile čije su projekcije na os kroz spojnicu zglobova 1 i 2 jednake, a projekcije na os simterije su suprotne. Koncentrirani momenti koji djeluju u simterićnim točkama su jednaki. Za takovo opterećenje će moment savijanja na osnovnom sistemu biti antimetričan, poprečna sila će biti simterična, a uzdužna antimetrična.







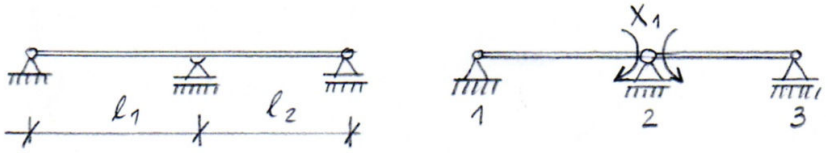
Zbog tih svojstava reznih sila iščezava član desne strane jednadžbe kontinuiteta, a snjim i prekobrojna veličina.

Ponašanje simterićnog dvozglobnog okvira pod antimetričnim opterećenjem može se slikovito prikazati promatranjem dvaju poluokvira dobivenih iz zadanog okvira. Pod djelovanjem antimterićnog opterećenja ležaj 3 će se kod oba polukvira pomaknuti za istu veličinu, a rubni presjek će se zaokrenuti za isti zaokret. Ako se poluokviri postave tako da im se točke 3 poklapaju kontinuitet je očito postignut pa je njihovo mehaničko stanje jednako stanju preodredjenog dvozglobnog okvira.

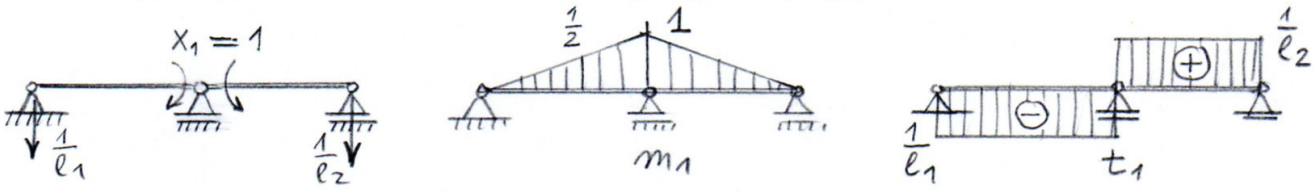
Ovaj zaključak vrijedi za svaki simterični dvozglobni okvir (ili luk) pod djelovanjem antimterićnog opterećenja: zadatak će se riješiti kao odredjeni poluokvir ili poluluk.

HWPK-85-288

6) Kontinuirana greda sa dva polja

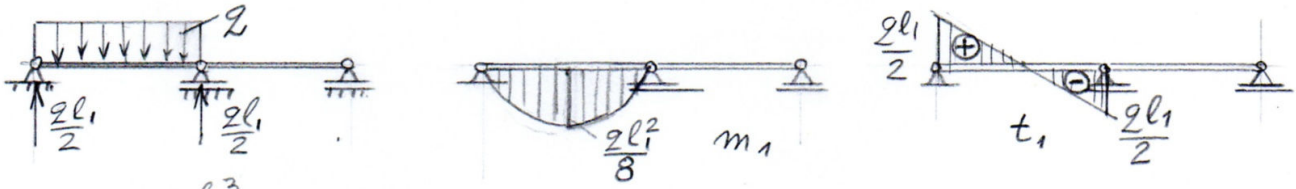


Osnovni sistem je dobiven zamjenom poluzgloba višestrukim zglobom. Dobiven je niz prostih greda. Uvedena je jedna relativna rotacija izmedju presjeka uz uvedeni zglob. Uzdužne sile se u toj gredi mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Na veličinu X_1 utječe samo opterećenje okomito na os i djelovanje momenata, pa je dovoljno da se prikažu samo momenti savijanja i poprečne sile.



$$a_{11} = \frac{1}{3}\left(\frac{l_1}{E_1 I_1} + \frac{l_2}{E_2 I_2}\right) + \frac{\alpha_1}{G_1 F_1} + \frac{\alpha_2}{G_2 F_2}$$

6a) Jedno polje opterećeno konstantnom poprečnom distribuiranom silom.



$$a_{1v} = \frac{q l_1^3}{24 E_1 I_1} \; ; \qquad X_1 = -\frac{a_{1v}}{a_{11}}$$

Ako se zanemari utjecaj poprečnih sila na deformacije, dobiva se:

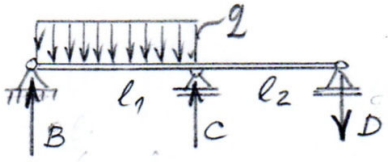
$$X_1 = \frac{q l_1^3}{24 E_1 I_1 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{l_1}{E_1 I_1} + \frac{l_2}{E_2 I_2}\right)} = \frac{q l_1^2}{8\left(1 + \frac{E_1 I_1}{l_1} \cdot \frac{l_2}{E_2 I_2}\right)}$$

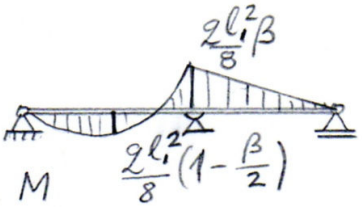
$$X_1 = \frac{q l_1^2}{8}\beta \; ; \qquad \beta = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \; ; \qquad K_i = \frac{E_i I_i}{l_i}$$

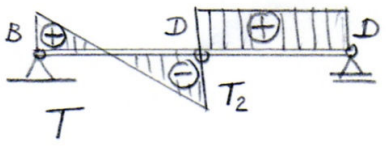
Moment nad ležajem, koji je prekobrojna veličina prikazan je pomoću bezdimenzionalnog koeficijenta β koji je funkcija omjera krutosti dvaju polja. Povećavanjem omjera krutosti opterećnog i neopterećenog polja β se približava nuli t.j. rješenje se približava rješenju osnovnog sistema.
Smanjivanjem omjera krutosti opterećenog i neopterećnog polja β se približava vrijednosti 1. U graničnom slučaju $\beta = 1$, a moment nad ležajem jednak je momentu jednostrano upete grede.

Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojne veličine dobiva se rješenje zadanog sistema.

HWPK- 85-289



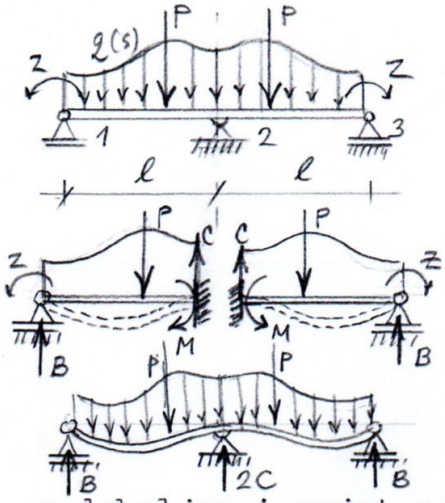




$$B = \frac{q l_1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{4}\right)$$

$$T_2 = \frac{q l_1}{2}\left(1 + \frac{\beta}{4}\right); \qquad D = \frac{q l_1^2}{8 l_2}\beta; \qquad C = D + T_2 = \frac{q l_1}{2}\left[1 + \frac{\beta}{4}\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)\right]$$

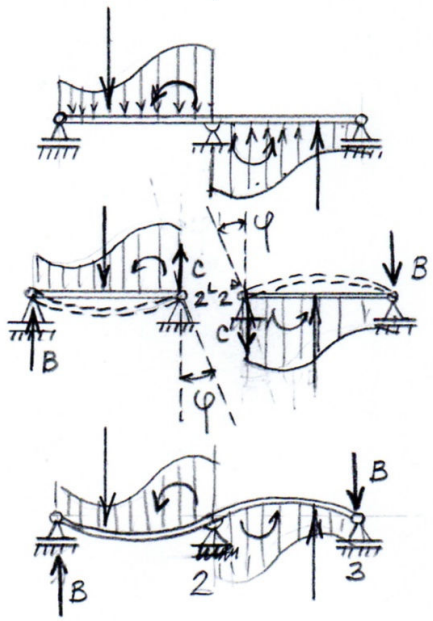
6b) Djelovanje simetričnog opterećenja na simetrični sistem



Pri djelovanju simteričnog opterećenja na simetrični sistem, svako polje će biti u istom mehaničkom stanju kao jednostrano upeta greda, pri čemu će kruti spoj odgovarati srednjem ležaju.

Na skici su prikazane dvije jednostrano upete grede. Momenti u krutom spoju su jednaki po veličini i suprotni po smjeru pa po djelovanju odgovaraju momentu savijanja, pa bi se što se toga tiče dvije jednostrano upete grede mogle "spojiti" u kontinuirani nosač. Osim toga treba biti zadovoljen i uvjet zaokreta. Taj uvjet je očito zadovoljen jer se presjeci uz kruti spoj ne zaokreću, a zbog simetrije se niti presjek nad ležajem simetričnog sistema ne će zaokrenuti.

6c) Djelovanje antimetričnog opterećenja na simetrični sistem



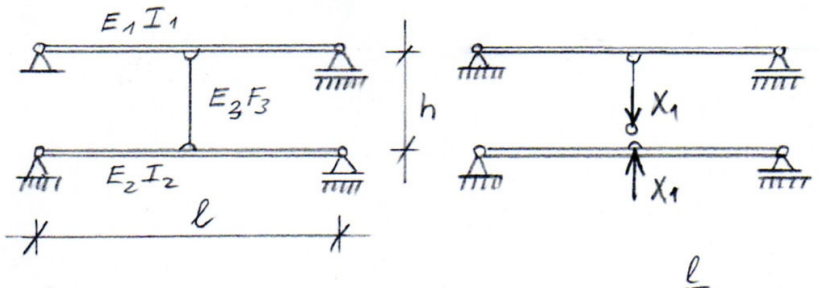
Pri djelovanju antimetričnog (neparnog) opterećenja na simterični sistem, svako polje će se nalaziti u istom mehaničkom stanju kao prosta greda.

Na skici su prikazane dvije proste grede Na presjecima koji će se spojiti ne djeluju momenti, pa će moment nad ležajem ovog kontinuiranog nosača biti nula. Sile u ležajima 2^L i 2^D su suprotne i odgovaraju po djelovanju poprečnoj sili. znači da će se iznad ležaja pojaviti poprečna sila, a u samom srednjem ležaju ovog kontinuiranog nosača će sila iščezavati. Kutevi zaokreta u ležajima 2^L i 2^D su jednaki pa se očito te dvije proste grede mogu "spojiti"u zadani kontinuirani nosač.

Svi zaključci prikazani u 6b) i 6c) vrijede i ako se nepomični zglob nalazi na jednom od krajeva nosača.

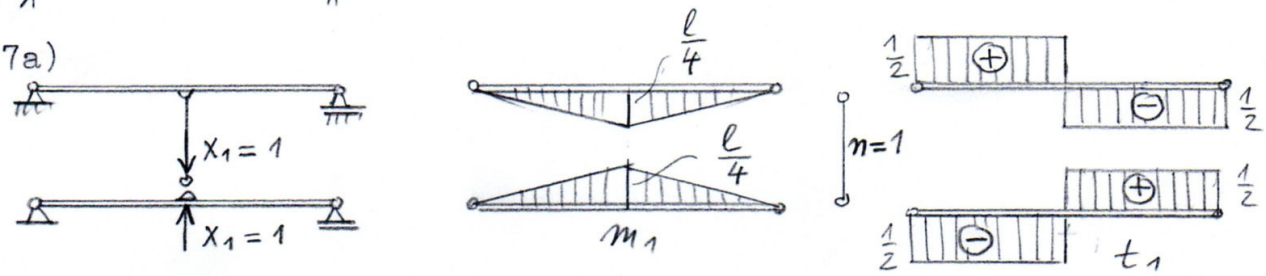
HWPK-85-290

7) Spregnute grede.



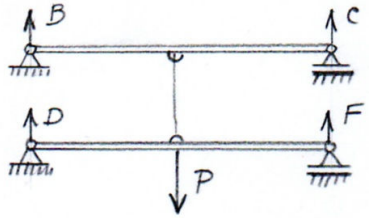
Osnovni sistem je dobiven isključenjem spoja zglobnog štapa s donjom gredom.

7a)

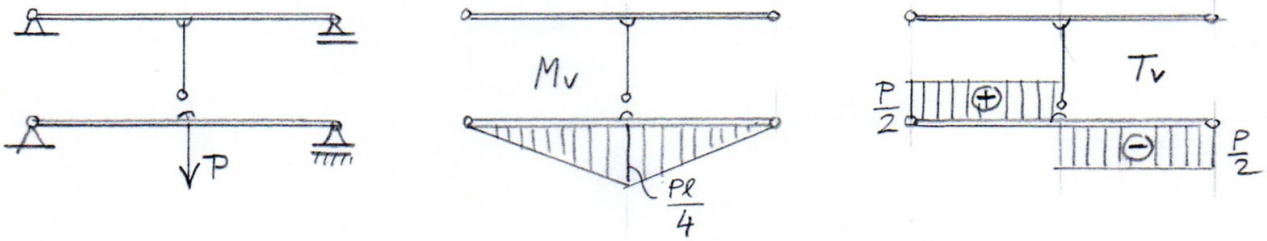


$$a_{11} = \frac{\ell^3}{48}\left(\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2}\right) + \frac{\ell}{4}\left(\frac{\alpha_1}{G_1 F_1} + \frac{\alpha_2}{G_2 F_2}\right) + \frac{h}{E_3 F_3}$$

7a) Djelovanje koncentrirane sile na jednu gredu



Prikazati će se samo jednostavni simetrični slučaj uz najjednostavnije simetrično opterećenje, da se ukaže na osnovne zakonitosti sistema ovog tipa.



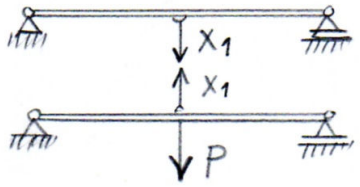
$$a_{1v} = -\frac{P\ell^3}{48 E_2 I_2} - \frac{P\alpha_2 \ell}{G_2 F_2}\,; \qquad X_1 = -\frac{a_{1v}}{a_{11}}$$

U ovom slučaju treba ispitati utjecaj uzdužnih sila u zglobnom štapu, jer postoje praktične situacije u kojima će biti značajan, npr kod sprezanja drvenih ili betonskih greda čeličnim šipkama.

Ukoliko je $h < \ell$, dimenzije zglobnog štapa odgovaraju dimenzijama i materijalu greda, biti će utjecaj uzdužnih sila na veličinu X_1 malen, pa se treći pribrojnik u izrazu za a_{11} može zanemariti. Ako se još zanemari i utjecaj poprečnih sila, dobiva se:

$$X_1 = \frac{P\ell^3}{48 E_2 I_2 \cdot \frac{\ell^3}{48}\left(\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2}\right)} = \frac{P}{E_2 I_2\left(\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2}\right)} = \frac{E_1 I_1 \cdot P}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

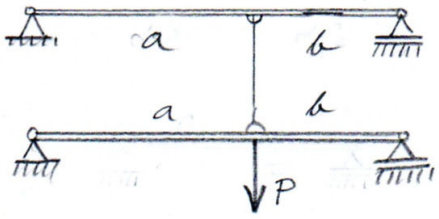
HWPK- 85- 291



Sila X_1 koja djeluje na gornju gredu proporcionalna je omjeru krutosti te grede i zbroja krutosti obaju greda.

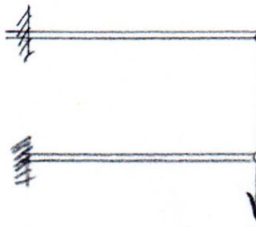
Rezultanta djelovanja na donju gredu iznosi:

$$R = P - X_1 = P\left(1 - \frac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2}\right) = \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} P$$

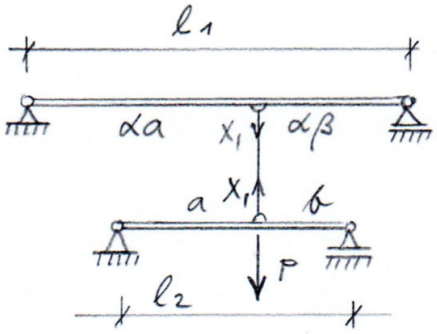


Dobiven je izraz analogan onome za gornju gredu: sila je proporcionalna krutosti te grede i zbroja krutosti obaju greda.

Kaže se da se sila raspodjelila u omjeru udjela krutosti ili kraće-"u omjeru krutosti".



Ta zakonitost vrijedi i za slučajeve kod kojih zglobni štap nije u sredini.
Vrijedi nadalje za niz srodnih slučajeva; jedan jednostavni je prikazan na skici.
Zakonitost je vrlo efikasna za postavljenje grubih procjena o djelovanju sistema.



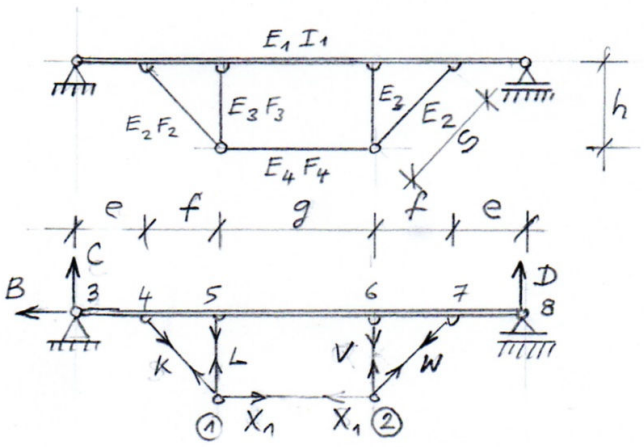
Sila će se dijeliti u omjeru karakteristike greda i u slučaju različitih raspona, ali se sada duljina raspona pojavljuje u analognom izrazu:

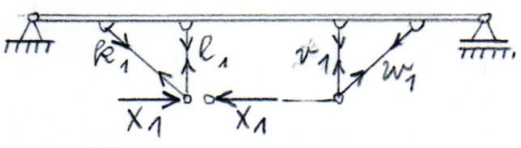
$$X_1 = \frac{k_1 P}{k_1 + k_2} \qquad R = P - X_1 = \frac{k_2 P}{k_1 + k_2}$$

$$k_1 = \frac{E_1 I_1}{l_1^3} \qquad k_2 = \frac{E_2 I_2}{l_2^3}$$

HWPK-85-292

8) Ojačana greda

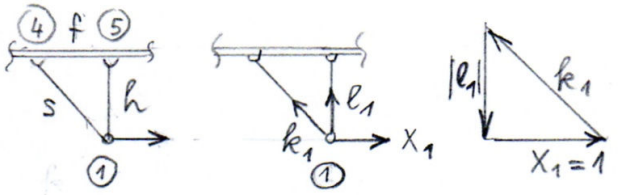




Ojačana greda sadrži jedan štapni element spojen s rešetkom. Kao primjer je odabran simterični sistem sa rešetkom koja sadrži pet zglobnih štapova.

Osnovni sistem će se uvesti isključivanjem srednjag štapa rešetke. Dobiven je ulančeni sistem; na prostu gredu su prosto spojena dva čvora.

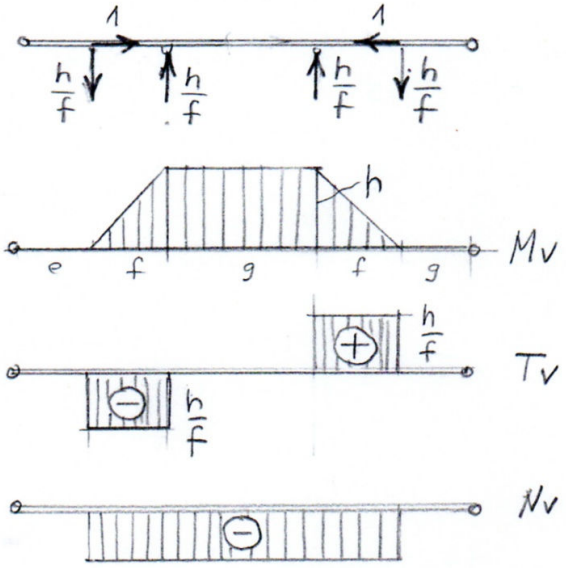
Štapni element s dva čvora čini odredjeni podsistem. Prekobrojna sila veličine X_1 djeluje unutar odredjenog podsistema, pa će sile u spojevima tog podsistema s podlogom iščezavati: $b_1 = 0,\ c_1 = 0,\ d_1 = 0$



Sile u štapovima rešetke odrediti će se iz uvjeta ravnoteže čvorova . Na skici je prikazan čvor 1. Sile koje djeluju na čvor moraju zatvrati poligon sila;u ovom slučaju trokut. Iz sličnosti trokuta sila s trokutom koji na sistemu odredjuju točke 1,4,5, dobivaju se sile u štapovima:

$$\ell_1 = -\frac{h}{f}\,; \qquad k_1 = \frac{s}{f}$$

Zbog simetrije ne treba zasebno promatrati ravnotežu čvora 2, pa slijedi: $v_1 = \ell_1 = -\frac{h}{f}\,; \qquad w_1 = k_1 = \frac{s}{f}$

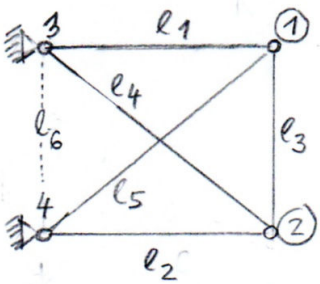


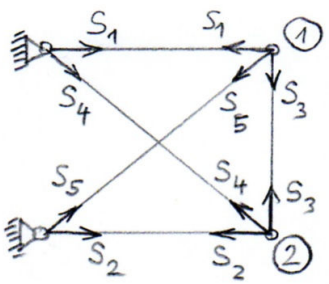
Rezne sile štapnog elementa će se odrediti na osnovni način. Sve sile koje djeluju na element su poznate. Sile u spojevima s podlogom iščezavaju.
Kose sile k_1 i w_1 će se rastaviti na komponete okomito na os i paralelno s osi. Sve sile su ucrtane s stvarnim smjerovima, pa su umjesto oznaka za veličine uvršteni izrazi za te veličine.

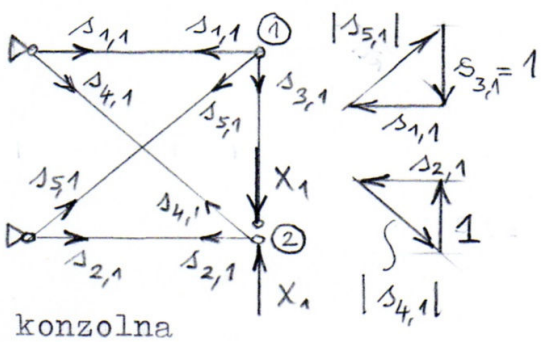
Vidljivo je da je momentni dijagram afina figura samog sistema; sve rezne sile su se mogle odrediti i korištenjem tog svojstva.

$$a_{11} = \frac{h^2}{E_1 I_1}\left(\frac{2f}{3} + g\right) + \frac{2\alpha_1 h}{G_1 F_1} + \frac{2}{f^2}\left(\frac{s^3}{E_2 F_2} + \frac{h^3}{E_3 F_3}\right) + \frac{g}{E_4 F_4}$$

9) Konzolna rešetka







Na lijevoj skici je prikazan jednostavna konzolna rešetka. Primjer će se iskoristiti za skiciranje općeg pristupa rješavanju preodredjenih rešetki i za dobivanje uvida djelovanje za konkretni primjer. Čvorovi će se označiti rednim brojevima. Štapovi će se takodjer označiti rednim brojevima. Duljine štapova će se označiti s ℓ_k. Konačne sile u štapovima će se označiti sa S_k (srednja skica). Zbog toga će se sile od mjernih opterećenja t.j. jediničnih stanja označavati dvoindeksno: prvi indeks redni broj štapa, drugi indeks je redni broj jedniničnog djelovanja. Na desnoj skici je prikazan osnovni sistem dobiven

HWPK-85-293

isključivanjem štapa 3. Iz uvjeta ravnoteže čvora 1 odrediti će se sile u štapovima 1 i 5.

$$s_{1,1} = \frac{l_1}{l_6} \qquad s_{5,1} = -\frac{l_5}{l_6}$$

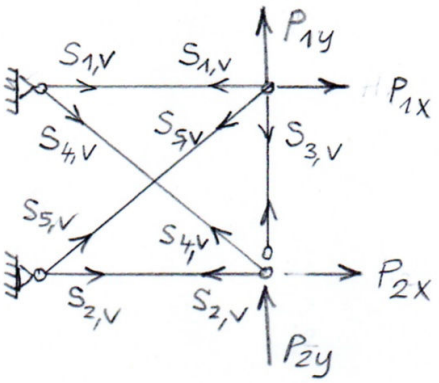
Analogno se odredjuju sile u čvoru 2. Zbog korištenja sličnosti trokuta uvedena je duljina l_6.

$$s_{2,1} = \frac{l_2}{l_6} \qquad s_{4,1} = \frac{l_4}{l_6}$$

Članovi na lijevoj strani jednadžbi kontinuiteta odredjuju se prema općem izrazu:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{b} \frac{s_{k,i} \cdot s_{k,j} \cdot l_k}{E_k \cdot F_k}$$

b je ukupni broj zglobnih štapova rešetke.



Najčešći način zadavanja opterećenja čvorova je onaj pomoću ortogonalnih komponenti. Na skici je prikazan opterećen osnovni sistem. Sile u štapovima su označene sa $S_{k,v}$. Za prikazani slučaj sile u štapovima će biti:

$$S_{1,v} = P_{1x} - \frac{l_1}{l_6} \cdot P_{1y} \qquad S_{4,v} = -\frac{l_4}{l_6} \cdot P_{2y}$$

$$S_{2,v} = P_{2x} + \frac{l_2}{l_6} \cdot P_{2y} \qquad S_{5,v} = \frac{l_5}{l_6} P_{1y}$$

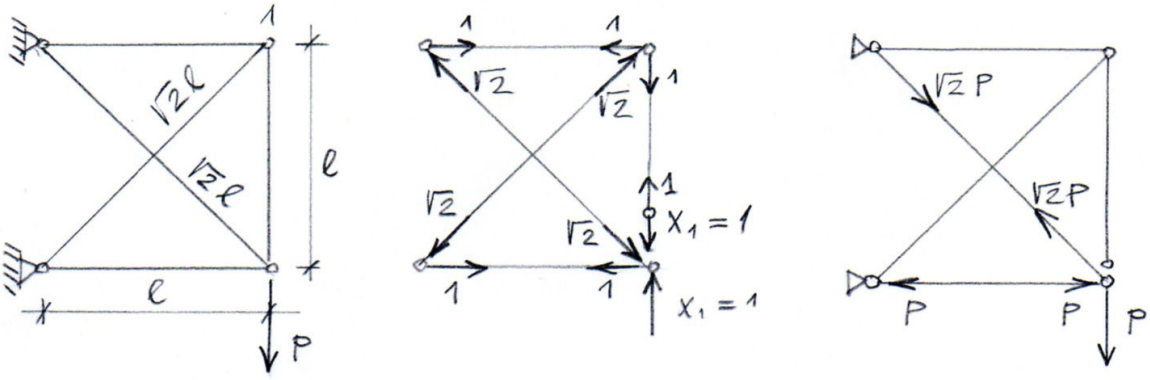
$$S_{3,v} = 0$$

Opći izraz za apsolutne članove glasi:

$$a_{i,v} = \sum_{k=1}^{b} \frac{s_{k,i} \cdot S_{k,v} \cdot l_k}{E_k \cdot F_k}$$

Nakon rješavanja jednadžbi kontinuiteta sile konačnog stanja se odredjuju prema:

$$S_k = S_{k,v} + \sum_{i=1}^{n} s_{k,i} \cdot X_i$$



Prikazani sistem će se riješiti općim brojevima za najjednostavniji slučaj geometrije štapova. Svi štapovi će biti iz istog materijala i površine poprečnih presjeka će biti jednake. Na srednjoj skici je prikazan osnovni sistem i sile od jedniničnog

HWPK-85-294

djelovanja $X_1 = 1$. Na desnoj skici je prikazan osnovni sistem uz djelovanje zadane sile P. Sve sile u sistemu su prikazane u djelovanju na čvorove i to sa stvarnim smjerovima i izrazima za veličine.

$$a_{11} = \frac{\ell}{EF}\left(3 + 4\sqrt{2}\right) \qquad a_{1V} = -\frac{P\ell}{EF}\left(1 + 2\sqrt{2}\right)$$

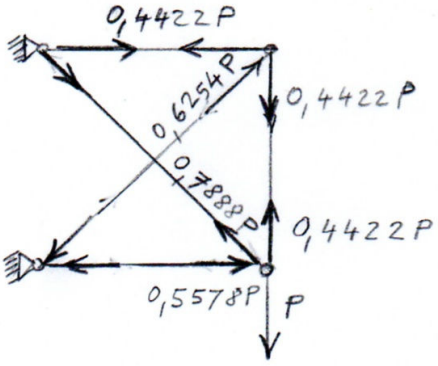
$$X_1 = -\frac{a_{1V}}{a_{11}} = P\frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}} = 0{,}4422\,P$$

Ukupno djelovanje sila P i X_1 na čvor 2 odredjeno je silom

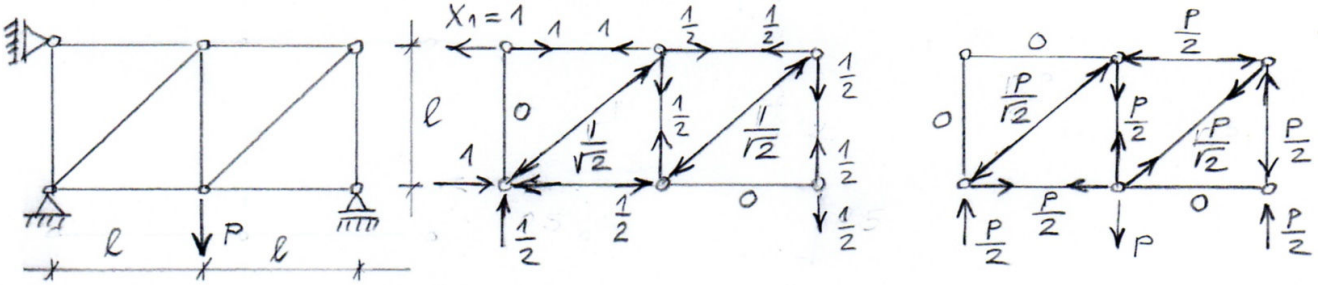
$$R = P - X_1 = 0{,}5578\,P$$

Lako se može zaključiti da bi u slučaju nedeformabilnog štapa 3, koji spaja čvorove vrijedilo: $X_1 = 0{,}5\,P$; $R = 0{,}5$
Preodredjene rešetke s križnim dijagonalama se često približno proračunavaju na taj način, pa su u tom slučaju sile u dijagonalama po apsolutnom iznosu jednake. U konkretnom slučaju bi se uz takovu prepostavku uvela pogreška od 12%.

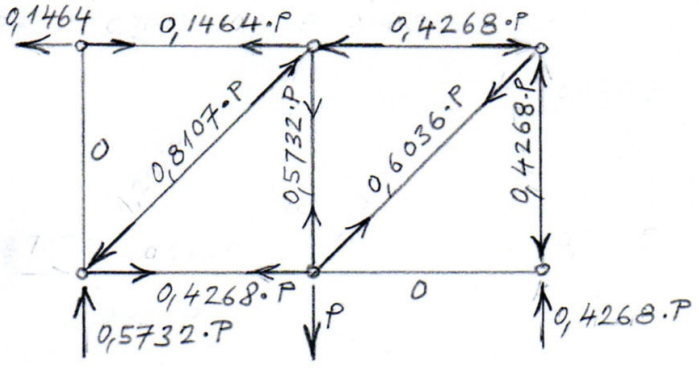
Točne vrijednosti za sile u štapovima za prikazani primjer su:



10) Preodredjeno spojen rešetkast nosač



$$a_{11} = \frac{\ell}{EF}\left(2 + \sqrt{2}\right) \qquad a_{1V} = -\frac{P\ell}{2EF} \qquad X_1 = \frac{P}{2(2+\sqrt{2})} = 0{,}1464\,P$$

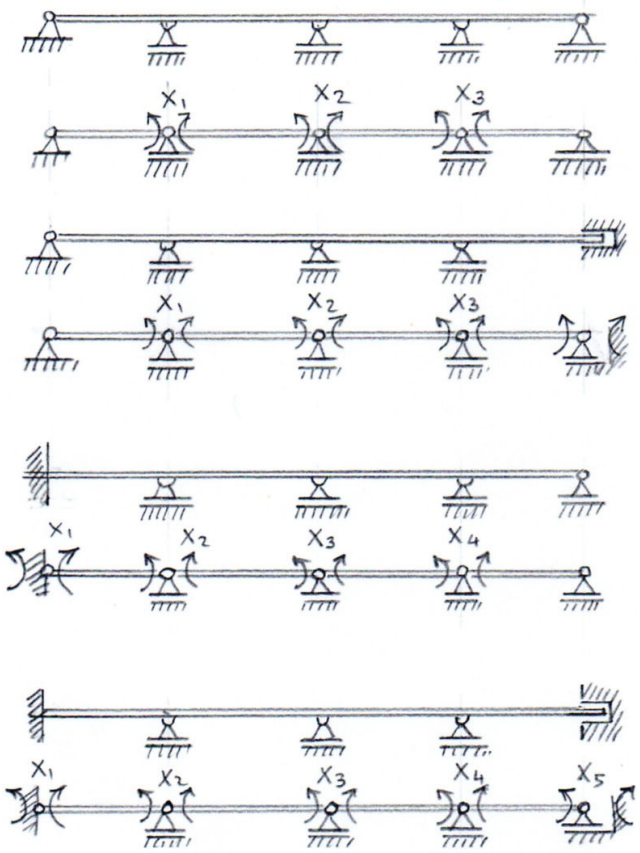


Na lijevoj skici su prikazane konačne veličine sila u štapovima i ležajima t.j. rješenje zadatka.

HWPK-85-295

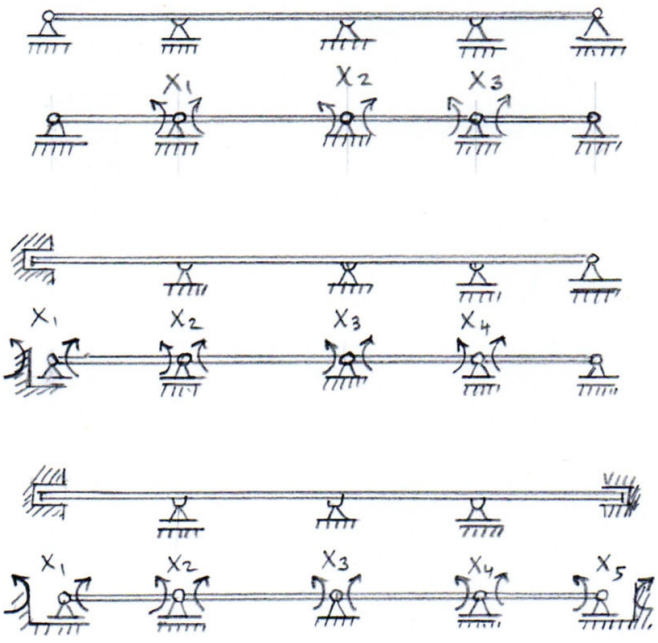
Clapeyronov postupak

Postupak je nazvan prema jednom od autora, a namijenjen je rješavanju ravnih kontinuiranih greda metodom sila. Promatraju se samo kontinuirane grede koje se mogu svesti na odredjeni sistem uvodjenjem prekida koji omogućuju zaokrete. Osnovni sistem se uvodi na takav način, pa su prekobrojna djelovanja samo momenti.



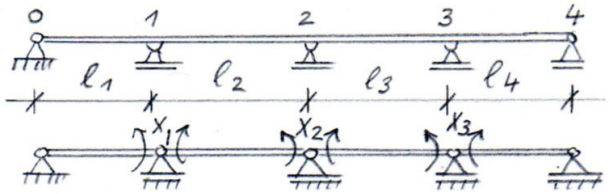
Na skicama su prikazani mogući rasporedi spojeva, podijeljeni u dvije grupe:

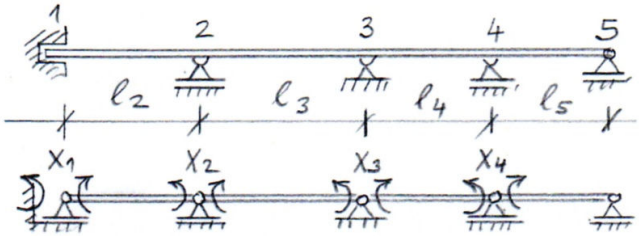
U prvoj grupi se izmedju polja nalaze samo klizni poluzglobovi, kojima je pravac klizanja paralelan s osi grede. Jedan od spojeva na krajevima može biti nepomični zglob ili kruti spoj, a na preostalom kraju može onda biti samo pomični zglob ili klizni spoj. Osnovni sistem se uvodi zamjenom poluzgobova višestrukim pomičnim zglobovima, zamjenom krutog spoja nepomičnim zglobom, te zamjenom kliznog spoja pomičnim zglobom.



U drugoj grupi se izmedju polja nalazi jedan nepomični poluzglob, dok su preostali spojevi izmedju polja pomični poluzglobovi, kojima je pravac klizanja paralelan s osi grede.
Na krajevima se mogu nalaziti pomični zglobovi ili klizni spojevi.
Osnovni sistem se uvodi zamjenom nepomičnog poluzgloba nepomičnim višestrukim zglobom, zamjenom pomičnih poluzglobova pomičnim višestrukim zglobovima, te zamjenom kliznih spojeva pomičnim zglobovima.

HWPK-85-296





Opći izrazi za članove jednadžbi kontinuiteta se najlakše postavljaju ako se način označavanja sistema prilagodi načinu označavanja prekobrojnih momenata.

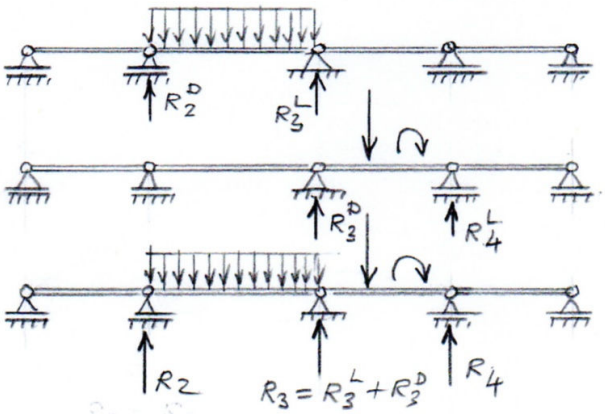
Prekobrojni momenti će se numerirati s lijeva na desno, pa će se istim brojem označiti i spojevi. Ukoliko se na lijevom kraju ne pojavljuje prekobrojni moment taj će spoj dobiti redni broj nula. Ako se na desnom kraju ne pojavljuje prekobrojni moment taj će spoj dobiti redni broj n+1, pri čemu je n stupanj preodredjenosti.

Polja će se numerirati prema desnom spoju. Ukoliko se na lijevom kraju pojavljuje prekobrojni moment dobiti će prvo polje oznaku 2. Na isti način će se označavati i karakteristike materijala i presjeka.

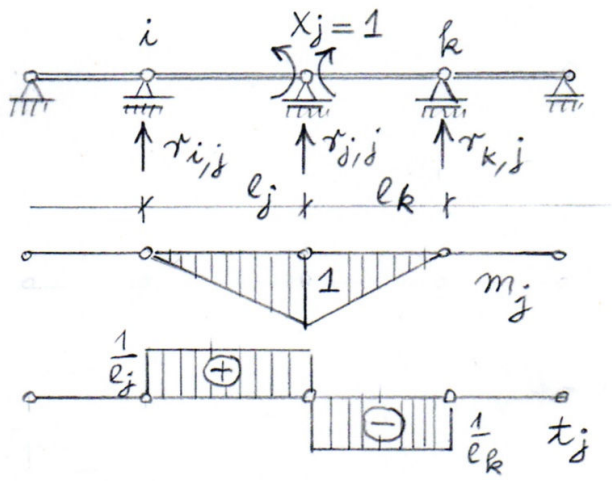
Ako na prikazane kontinuirane grede djeluju samo sile duž osi sistem se može riješiti iz uvjeta ravnoteže. Zbog toga će se sile opterećenja rastaviti na komponente na osi i okomito na os.

Prekobrojni momenti će biti različiti od nule samo ako postoji komponente sila okomite na os i opterećenje momentima.

Uvedeni tip osnovnog sistema se lako rješava. Pokazano je da kod takovih sistema opterećenih samo na jednom polju iščezavaju sile u svim spojevima osim u susjednim, a rezne sile se pojavljuju samo u opterećenom polju. Konačno rješenje se najpreglednije dobiva superpozicijom parcijalnih rješenja koja odgovaraju isključivom opterećenju jednog polja; zbrajaju se rješenja za niz prostih greda.



Opći slučaj djelovanja prekobrojnog momenta pretstavlja djelovanje za spoj izmedju polja. Prekobrojni moment će se označiti s "j", a susjedni ležajevi s "i" i "k". Iz uvjeta iščezavanja momenata na točku "j" za polje "j" odnosno "k" odredjuju se sile u pomičnim zglobovima:



$$r_{i,j} = \frac{1}{l_j}$$

$$r_{k,j} = \frac{1}{l_k}$$

HWPK - 85 - 297

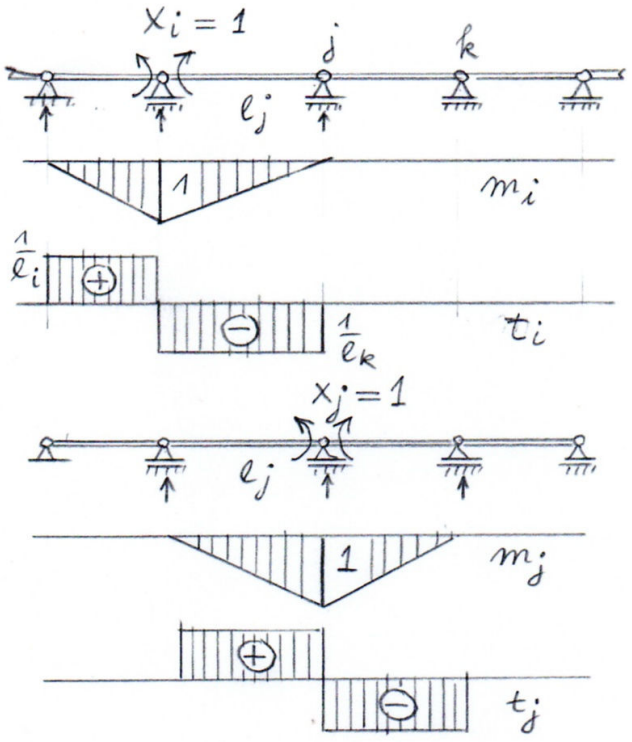
Iz uvjeta iščezavanja zbroja projekcija svih sila na os okomitu na os sistema odredjuje se sila u spoju na koji djeluje prekobrojni moment $X_j = 1$.

$$r_{j,j} = -r_{i,j} - r_{k,j} = -\left(\frac{1}{\ell_j} + \frac{1}{\ell_k}\right)$$

Dijagram momenata savijanja i poprečnih sila je prikazan na str. 297. Na osnovi toga se mogu odrediti dijagonalni članovi jednadžbi kontinuiteta:

$$a_{jj} = \frac{1}{3}\left(\frac{\ell_j}{E_j I_j} + \frac{\ell_k}{E_k I_k}\right) + \frac{\alpha_j}{\ell_j G_j F_j} + \frac{\alpha_k}{\ell_k G_k F_k}$$

Za odredjivanje vandijagonalnih članova promatraju se rješenja za djelovanja jediničnih momenata na dva susjedna zgloba. Prekobrojne veličine su općenito označene s X_i i X_j i te se oznake ovdje neće koristiti za proizvoljni par prekobrojnih djelovanja, nego samo za susjedna.

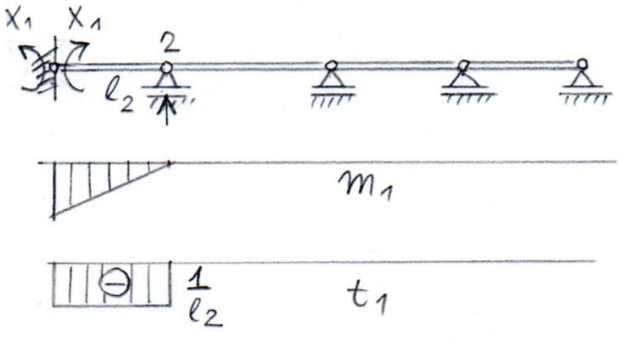


Na poznati način se dobiva vandijagonalni član jednadžbi kontinuiteta:

$$a_{ij} = \frac{\ell_j}{6 E_j I_j} - \frac{\alpha_j}{\ell_j G_j F_j}$$

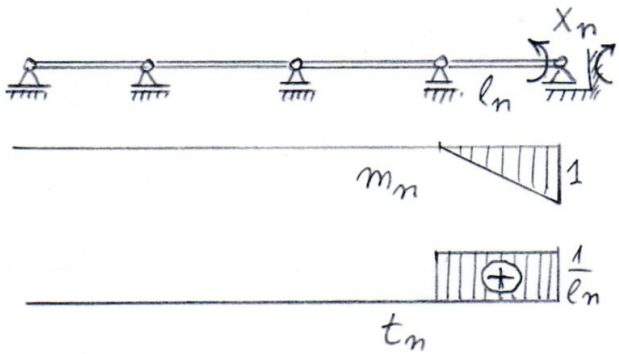
Vandijagonalni članovi za parove prekobrojnih veličina koje nisu susjedne, iščezavaju. To će se ovdje simbolički označiti sa:

$$a_{ik} = 0$$



Za specijalni slučaj u kojem se prekobrojni moment pojavljuje na lijevom kraju, odrediti će se pripadni dijagonalni član prema izrazu:

$$a_{11} = \frac{\ell_2}{3 E_2 I_2} + \frac{\alpha_2}{\ell_2 G_2 F_2}$$



Za specijalni slučaj u kojemu se prekobrojni moment pojavljuje na desnom kraju, odrediti će se pripadni dijagonalni član prema izrazu:

$$a_{nn} = \frac{\ell_n}{3 E_n I_n} + \frac{\alpha_n}{\ell_n G_n F_n}$$

HWPK-85-298

U jednadžbama kontinuiteta su osim članova na glavnoj dijagonali različiti od nule samo susjedni članovi. U prvoj jednadžbi i u zadnjoj su samo dva člana razlčita od nule, a u svim ostalim jednadžbama su po tri člana različita od nule. Takav sistem jednadžbi se naziva trodijagonalni sistem ili sistem tročlanih jednadžbi.

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 = - a_{1v}$$

$$a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 = - a_{2v}$$

$$a_{23} X_2 + a_{33} X_3 + a_{34} X_4 = - a_{3v}$$

$$a_{34} X_3 + a_{44} X_4 = - a_{4v}$$

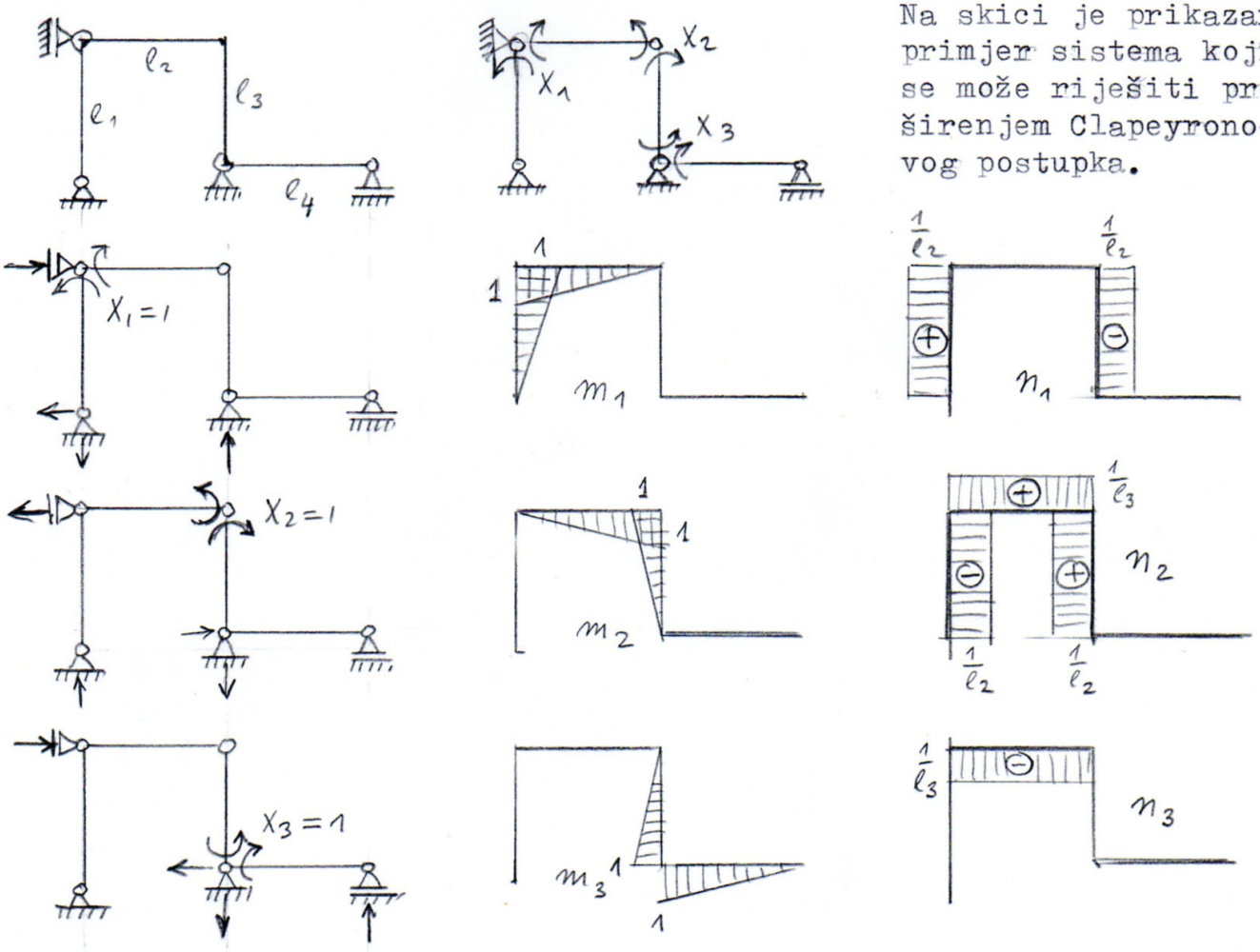
Zbog ovih specifičnosti se Clapeyronov postupak naziva i "rješenje pomoću tromomentnih jednadžbi".
Tročlane jednadžbe se lako rješavaju eliminacijom, a pogodne su i za iterativno rješavanje.

HWPK-85-299

Proširenje Clapeyronovog postupka

Poligonalni štapni sistemi koji u svakom lomu imaju ležaj, a mogu se svseti na odredjeni sistem uvodjenjem prekobrojnih momenata mogu se rješavati proširenjem Clapeyronovog postupka. U tom slučaju se od zasebnog djelovanja jediničnih momenata mogu pojaviti i uzdužne sile pa su samo utoliko članovi uz prekobrojne veličine različiti od onih u osnovnoj formulaciji.

Na skici je prikazan primjer sistema koji se može riješiti proširenjem Clapeyronovog postupka.



Na str. 299 su za odabrani sistem prikazana zasebna djelovanja jediničnih prekobrojnih momenata (to su i mjerna opterećenja) i dijagrami momenata savijanja i uzdužnih sila. Poprečne sile su izostavljane, jer je njihova veza s dijagramima momenata savijanja analogna osnovnoj formulaciji. Izrazi za članove jednadžbi kontinuiteta glase:

$$a_{11} = \frac{1}{3}\left(\frac{l_1}{E_1 I_1} + \frac{l_2}{E_2 I_2}\right) + \frac{\alpha_1}{l_1 G_1 F_1} + \frac{\alpha_2}{l_2 G_2 F_2} + \frac{1}{l_2^2}\left(\frac{l_1}{E_1 F_1} + \frac{l_3}{E_3 F_3}\right)$$

$$a_{12} = \frac{l_2}{6 E_2 I_2} - \frac{\alpha_2}{l_2 G_2 F_2} - \frac{1}{l_2^2}\left(\frac{l_1}{E_1 F_1} + \frac{l_3}{E_3 F_3}\right)$$

$$a_{13} = 0$$

$$a_{22} = \frac{1}{3}\left(\frac{l_2}{E_2 I_2} + \frac{l_3}{E_3 I_3}\right) + \frac{\alpha_2}{l_2 G_2 F_2} + \frac{\alpha_3}{l_3 G_3 F_3} + \frac{1}{l_2^2}\left(\frac{l_1}{E_1 F_1} + \frac{l_3}{E_3 F_3}\right) + \frac{l_2}{l_3^2 E_2 F_2}$$

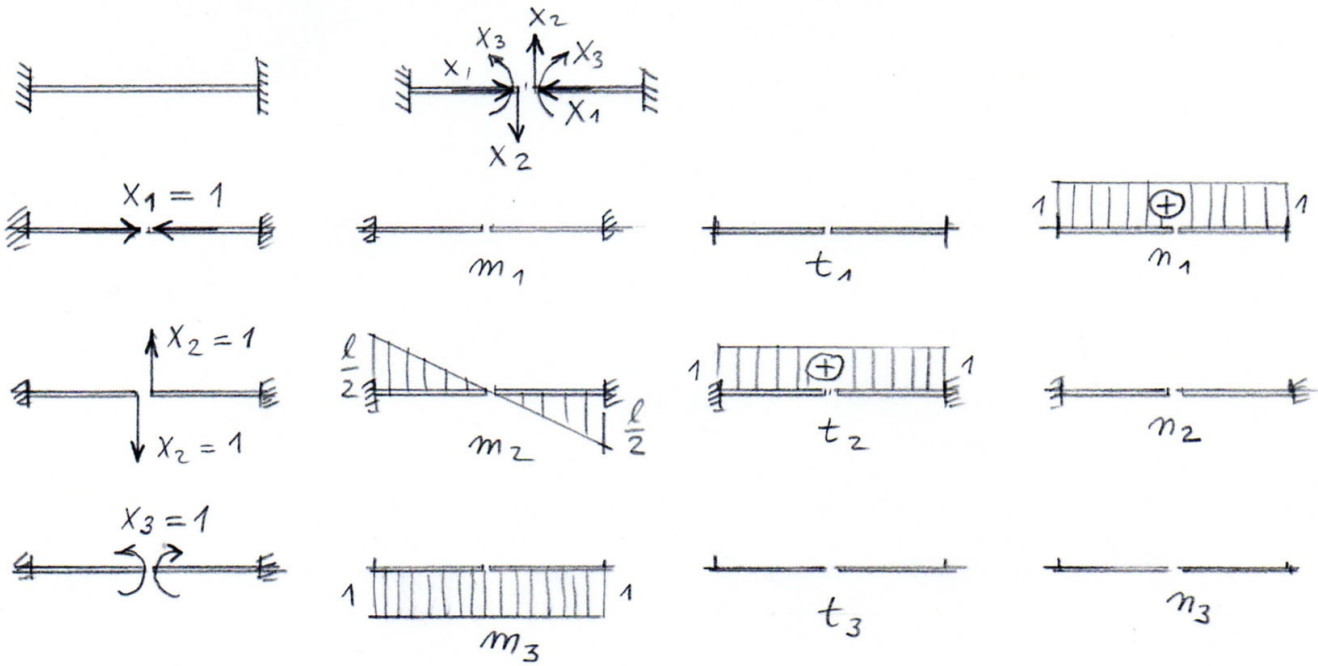
$$a_{23} = \frac{l_3}{6 E_3 I_3} - \frac{\alpha_3}{l_3 E_3 F_3} - \frac{l_2}{l_3^2 E_2 F_2}$$

$$a_{33} = \frac{1}{3}\left(\frac{l_3}{E_3 I_3} + \frac{l_4}{E_4 I_4}\right) + \frac{\alpha_3}{l_3 G_3 F_3} + \frac{\alpha_4}{l_4 G_4 F_4} + \frac{l_2}{l_3^2 E_2 F_2}$$

HWPK - 85 - 300

Osnovni simetrični sistemi

1) Obostrano kruto spojena greda - upeta greda.

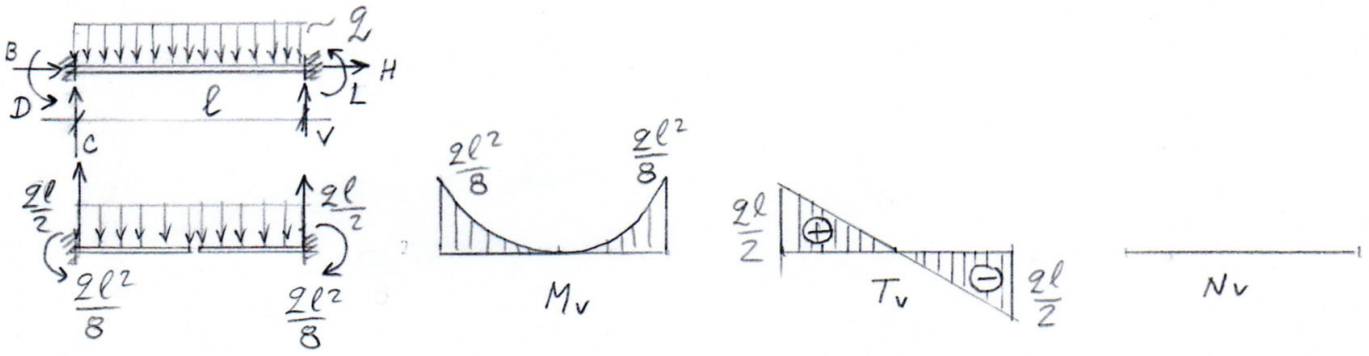


Osnovni sistem je odabran uvodjenjem prekida u osi simetrije. Uz simetričnu raspodjelu karakteristika poprečnih presjeka dobiti će se dijagonalni sistem jednadžbi kontinuiteta. Izrazi za članove će se prikazati samo za priznatični slučaj t.j. kada su EF, GF i EI konstantni duž osi.

$$a_{11} = \frac{\ell}{EF}; \quad a_{12} = 0; \quad a_{13} = 0$$

$$a_{22} = \frac{\ell^3}{12EI} + \frac{\alpha \cdot \ell}{GF}; \quad a_{23} = 0; \quad a_{33} = \frac{\ell}{EI}$$

1a) Djelovanje konstantne distribuirane sile okomito na os



$$a_{1V} = 0; \quad a_{2V} = 0; \quad a_{3V} = -\frac{q\ell^2}{8} \cdot \frac{\ell}{6EI}\left(1 + 4 \cdot 0 + 1\right) = -\frac{q\ell^3}{24EI}$$

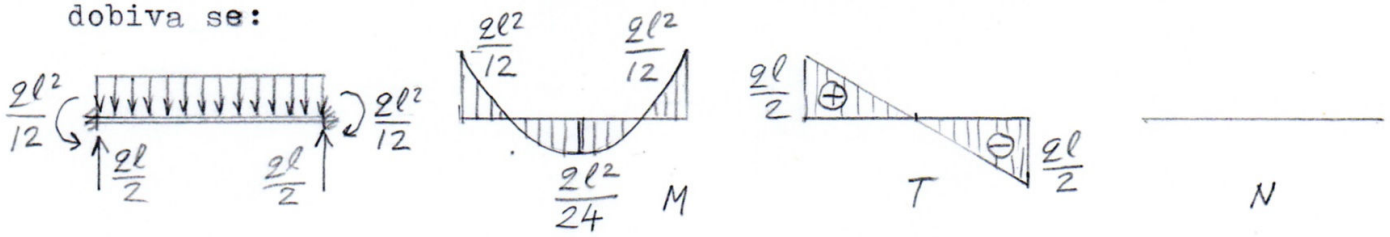
HWPK-85-301

Iako u polju postoji prekid, sve funkcije reznih sila su kontinuirane na tom prekidu t.j. vrijedi isti izraz za oba dijela osnovnog sistema. Ako isto vrijedi i za doprinose opterećenja cijela greda je jedno područje integracije.

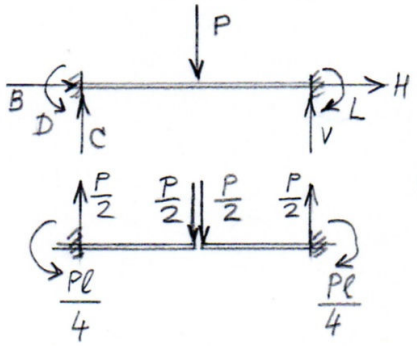
Zbog dijagonalnosti sistema jednadžbi kontinuiteta dobivaju se jednostavni izrazi za prekobrojne veličine:

$$X_1 = -\frac{a_{1V}}{a_{11}} = 0; \quad X_2 = -\frac{a_{2V}}{a_{22}} = 0; \quad X_3 = -\frac{a_{3V}}{a_{33}} = \frac{q\ell^2}{24}$$

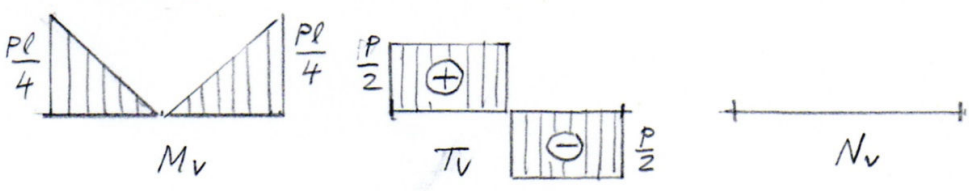
Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojnih veličina, dobiva se:



1b) Djelovanje koncentrirane sile u sredini okomito na gredu



Zbog očuvanja simetrije polovina sile će se pridružiti lijevom, a polovina desnom dijelu osnovnog sistema.

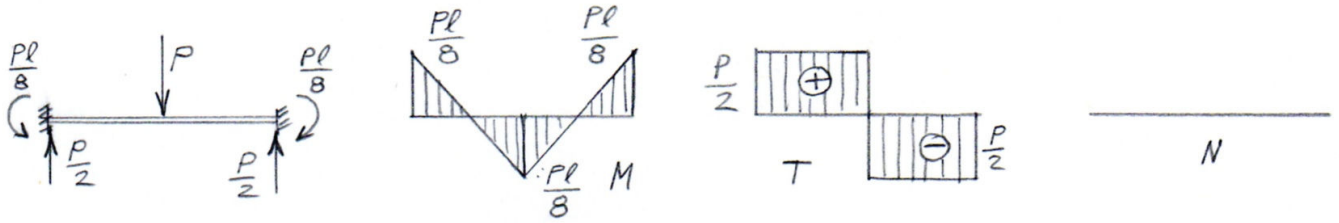


$$a_{1V} = 0; \quad a_{2V} = 0 \quad a_{3V} = -2 \cdot \frac{P\ell}{4} \cdot \frac{\ell}{4EI} = -\frac{P\ell^2}{8EI}$$

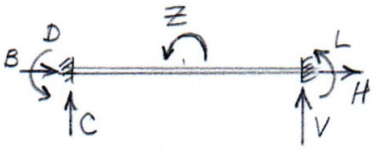
Zbog dijagonalnosti sistema jednadžbi kontinuiteta dobivaju se jednostavni izrazi za prekobrojne veličine:

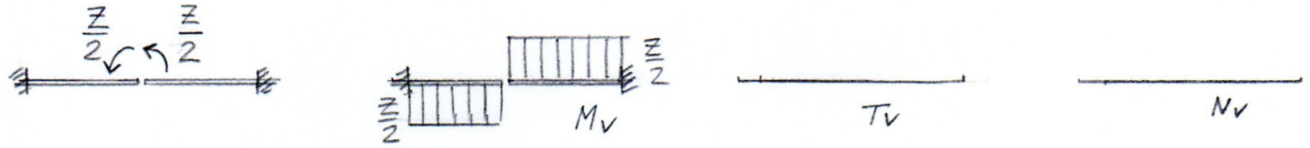
$$X_1 = -\frac{a_{1v}}{a_{11}} = 0; \qquad X_2 = -\frac{a_{2v}}{a_{22}} = 0; \qquad X_3 = -\frac{a_{3v}}{a_{33}} = \frac{P\ell}{8}$$

Zbrajanjem doprinosa opterećenja i prekobrojnih veličina, dobiva se:



1c) Djelovanje koncentriranog momenta u sredini.





$$a_{1v} = 0; \qquad a_{2v} = -2 \cdot \frac{Z \cdot \ell^2}{2 \cdot 8EI} = -\frac{Z\ell^2}{8EI}; \qquad a_{3v} = 0$$

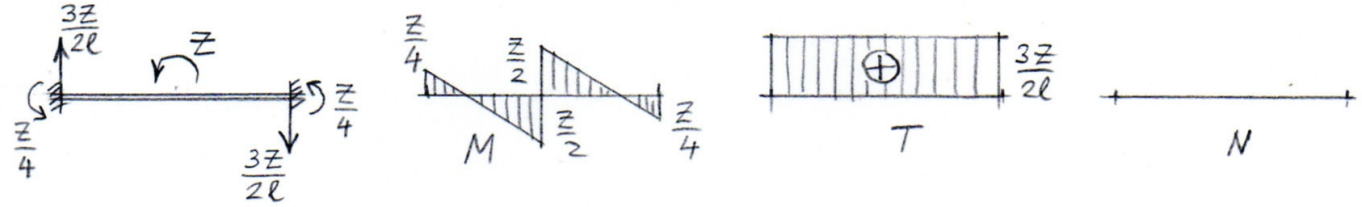
Zbog dijagonalnosti sistema jednadžbi kontinuiteta dobivaju se jednostavni izrazi za prekobrojne veličine.

$$X_1 = -\frac{a_{1v}}{a_{11}} = 0; \qquad X_2 = -\frac{a_{2v}}{a_{22}}; \qquad X_3 = -\frac{a_{3v}}{a_{33}} = 0$$

Ako se zanemare doprinosi poprečnih sila na deformacije dobiva se:

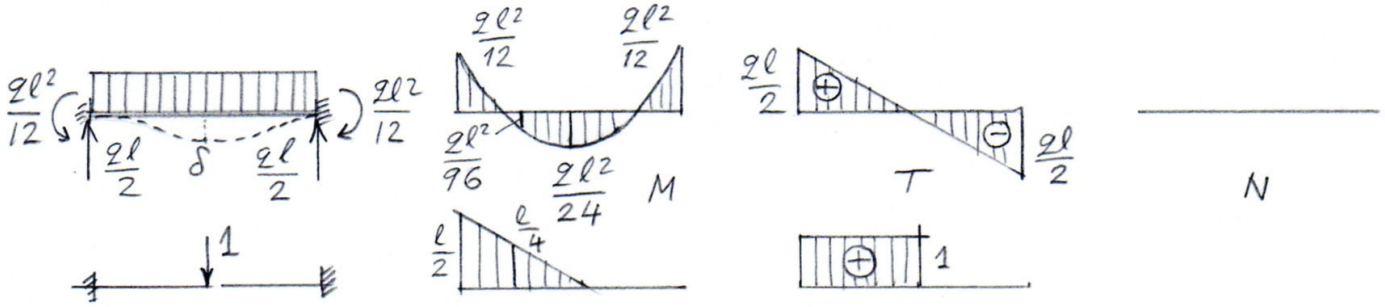
$$X_2 = \frac{Z\ell^2 \cdot 12EI}{8EI \cdot \ell^3} = \frac{3Z}{2\ell}$$

Zbrajanjem doprinosa opterećenja i doprinosa prekobrojnih veličina, dobiva se:

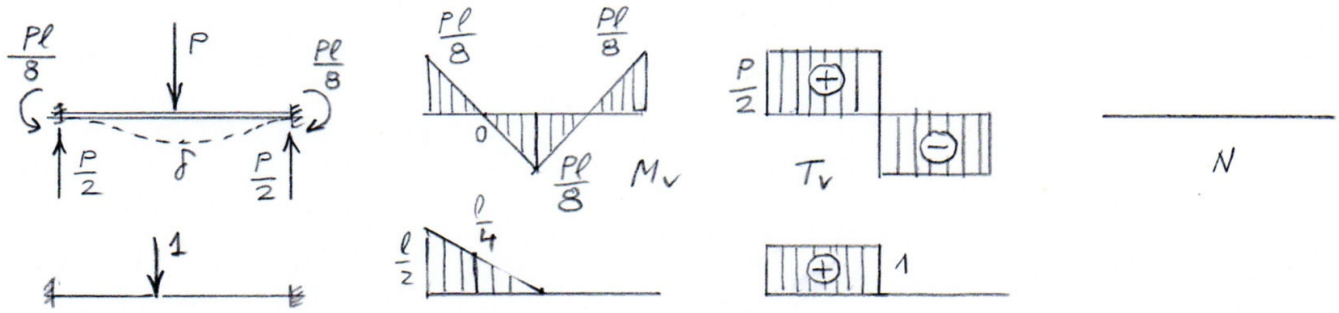


HWPK-85-302

DOPUNA primjerima 1a) i 1b)
Odredjivanje projekcije apsolutnog pomaka sredine grede na os okomitu na gredu.

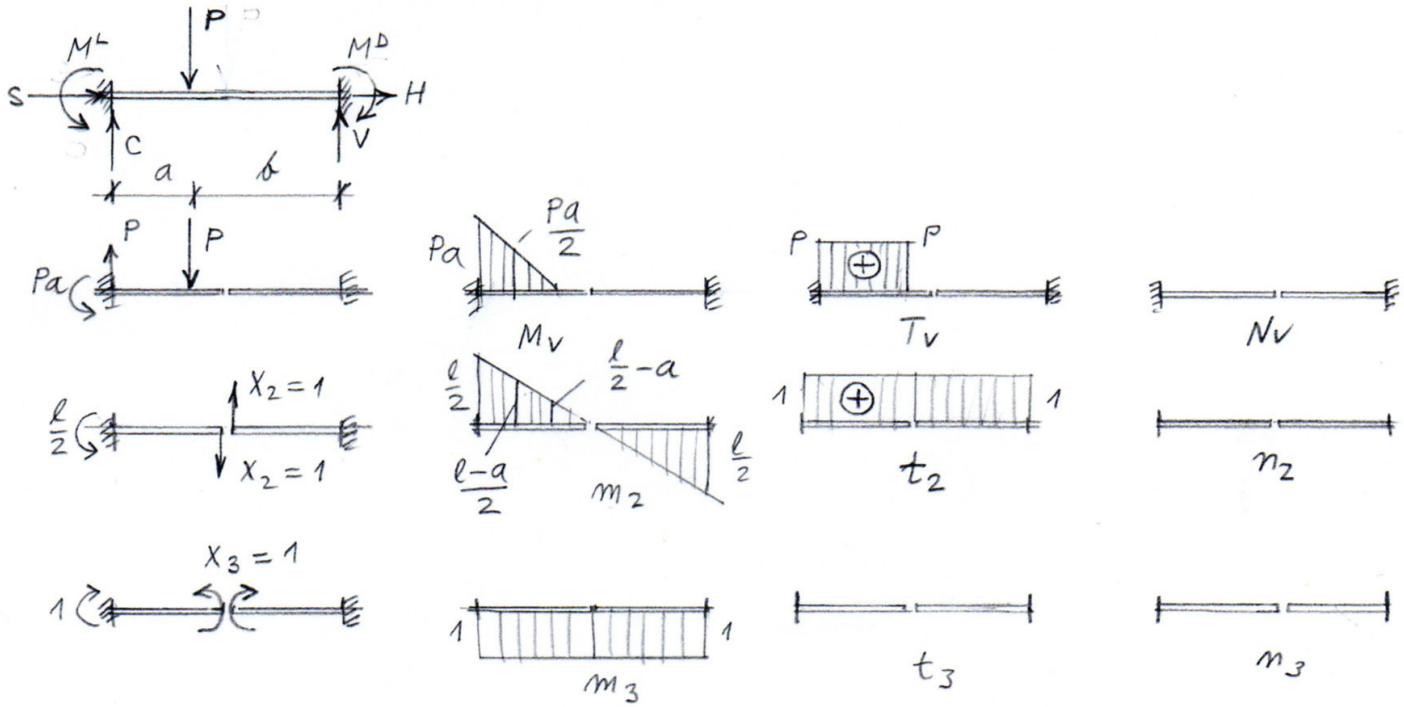


$$\delta = \frac{\ell}{2\cdot 6\cdot EI}\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{q\ell^2}{12} - 4\cdot\frac{\ell}{4}\cdot\frac{q\ell^2}{96}\right) + \frac{\alpha\cdot q\ell^2}{8GF} = \frac{q\ell^4}{384EI} + \frac{\alpha q\ell^2}{8GF}$$



$$\delta = \frac{\ell}{2\cdot 6\,EI}\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{P\ell}{8} + 4\cdot 0\right) + \frac{\alpha P\ell}{4GF} = \frac{P\ell^3}{192\,EI} + \frac{\alpha P\ell}{4GF}$$

1d) Djelovanje koncentrirane sile okomito na os



HWPK-85-303

$$a_{1V} = 0; \qquad a_{2V} = \frac{a}{6EI}\left(\frac{\ell}{2}Pa + 4\cdot\frac{\ell-a}{2}\cdot\frac{Pa}{2}\right) + \frac{\alpha Pa}{GF}$$

$$a_{2V} = \frac{Pa}{6EI}\left(\frac{3a\ell}{2} - a^2\right) + \frac{\alpha Pa}{GF}; \qquad a_{3V} = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

Zbog dijagonalnosti sistema jednadžbi kontinuiteta dobivaju se jednostavni izrazi za prekobrojne veličine:

$$X_1 = -\frac{a_{1V}}{a_{11}} = 0; \qquad X_2 = -\frac{a_{2V}}{a_{22}}; \qquad X_3 = -\frac{a_{3V}}{a_{33}} = \frac{Pa^2}{2\ell}$$

Rješenje u općem obliku će se postaviti samo za specijalni slučaj zanemarivanja utjecaja poprečnih sila na deformacije. U tom slučaju izraz za X_2 glasi:

$$X_2 = -\frac{Pa\cdot 12EI}{6EI\cdot\ell^3}\left(\frac{3a\ell}{2} - a^2\right) = \frac{2Pa}{\ell^3}\left(\frac{3a\ell}{2} - a^2\right)$$

Konačni izrazi u općem obliku će se prikazati samo za momente savijanja, jer se poprečne sile lako odredjuju iz uvjeta ravnoteže. Moment na lijevom ležaju, kao pozitivan uzet vlak gore:

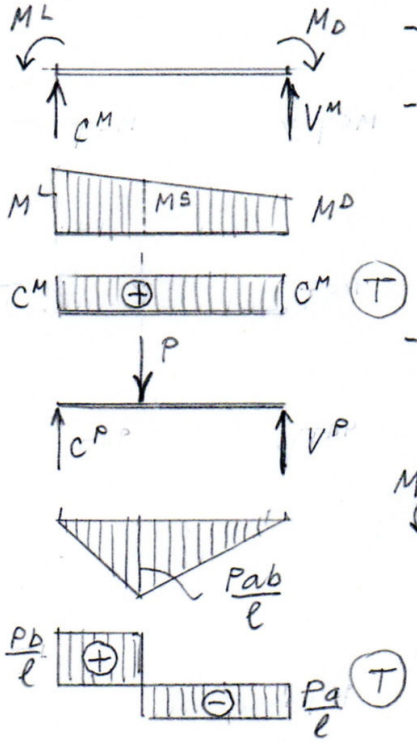
$$M^L = P\cdot a + \frac{\ell}{2}X_2 - X_3 = P\cdot a - \frac{Pa}{\ell^2}\left(\frac{3a\ell}{2} - a^2\right) - \frac{Pa^2}{2\ell}$$

$$M^L = P\cdot a\left(1 - \frac{3a}{2\ell} + \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a}{2\ell}\right) = P\cdot a\cdot\left(1 - \frac{a}{\ell}\right)^2 = \frac{Pab^2}{\ell^2}$$

Zbog simetrije sistema dobiva se izraz za moment na desnom kraju iz izraza za moment na lijevom tako da podaci "a" i "a" zamijene mjesta. Moment na desnom ležaju, kao pozitivan uzet vlak gore:

$$M^D = P\cdot b\cdot\left(1 - \frac{b}{\ell}\right)^2 = \frac{Pa^2b}{\ell^2}$$

Konačno rješenje se sada lako dobiva superpozicijom dvaju stanja:



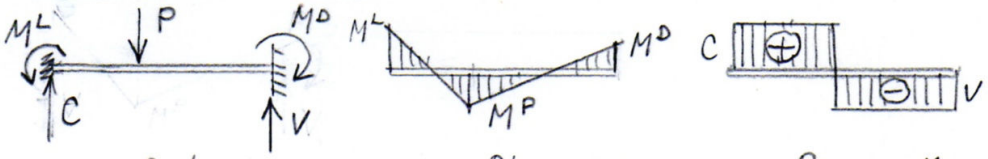
-u prvom stanju djeluju na štap samo dobiveni momenti nad ležajima i okomite sile koje ih uravnotežavaju:

$$C^M = \frac{M^L - M^D}{\ell}, \qquad V^M = -C^M$$

Za to stanje su prikazani dijagrami momenata savijanja i poprečnih sila. Ordinata M^S ispod sile se odredjuje prema: $M^S = \frac{1}{\ell}(M^L\cdot b + M^D\cdot a)$

-u drugom stanju djeluje na štap samo zadana sila i okomite sile koje ju uravnotežavaju.

Konačno se dobiva:



$$M^P = \frac{Pab}{\ell} - M^S; \qquad C = \frac{Pb}{\ell} + C^M; \qquad V = \frac{Pa}{\ell} + V^M$$

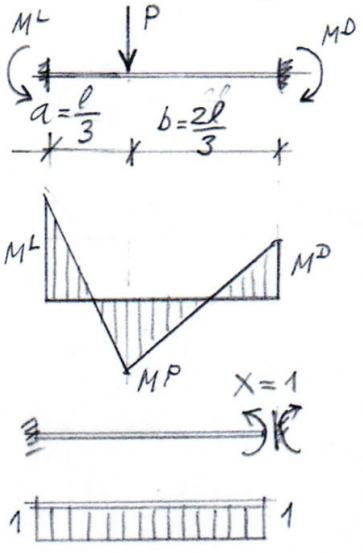
HWPK-85-304

Pogodno je da se osim općeg slučaja izvede i posebni slučaj, pa se izvod općeg može kontrolirati za podatke koji odgovaraju specijalnom slučaju. Na str. 302 prikazan je direktni izvod obostrano upete grede za silu u sredini. Ako se u M^L uvrsti $a = \frac{\ell}{2}$:

$$M^L = P \cdot \frac{\ell}{2}\left(1 - \frac{\ell}{2\ell}\right)^2 = \frac{P\ell}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{P\ell}{8}$$

Na oba načina je dobiven isti izraz.

Konačno stanje se kontrolira deformacionom kontrolom. Najlakše se kontrolira relativni zakret. Iako će se dobiti isti momentni dijagram kao m_3 odabrati će se djelovanje jediničnog momenta na novom osnovnom sistemu. Moment savijanja jediničnog stanja je konstanta = 1. Prema tome mora iščezavati određeni integral



$$\int_s \frac{M\,ds}{EI} = 0$$

Ako je EI konstantan za cijeli štap mora vrijediti:

$$\int M\,ds = 0$$

što se geometrijski može interpretirati: površina momentnog dijagrama na jednoj strani štapa mora biti jednaka površini momentnog dijagrama na drugoj strani štapa. Ta se kontrola može grubo provesti i vizuelno. Opći izraz za kontrolu glasi:

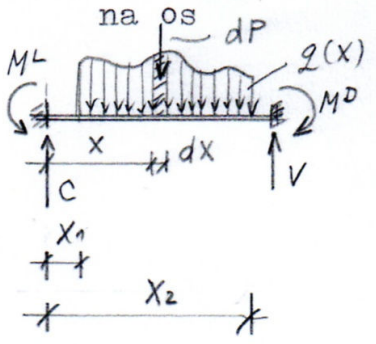
$$(M^L - M^P)\,a + (M^D - M^P)\cdot b = \phi$$

Na skici je prikazan primjer $a = \frac{\ell}{3}$. Prema izrazima za rješenje dobiva se: $M^L = 0{,}14815 \cdot P \cdot \ell$; $M^P = 0{,}09877 \cdot P \cdot \ell$; $M^D = 0{,}07407 \cdot P \cdot \ell$

Uvrštavanjem u kontrolni izraz dobiva se:

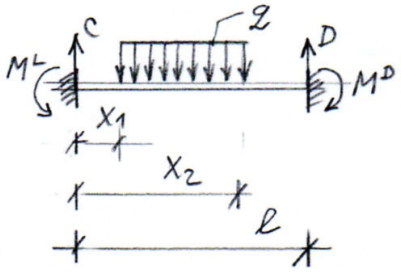
$$(0{,}14815 - 0{,}09877)\cdot 0{,}33333 + (0{,}07407 - 0{,}09877)\cdot 0{,}66667 = -0{,}000007$$

le) Djelovanje proizvoljnog distribuiranog opterećenja okomito na os



Opće rješenje može se dobiti u integralnom obliku. Umjesto sile P uvrstiti će se elementarna sila $dP = q(x)\,dx$. Položaj elementarne sile će se umjesto s "a" označiti s x. Određeni integral preko cijelog opterećenja dati će traženu veličinu. Za moment na lijevom kraju se dobiva:

$$M^L = \int_{x_1}^{x_2} x\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 q(x)\,dx$$



Postaviti će se opći izraz za moment na lijevoj strani za konstantnu distribuiranu silu izmedju x_1 i x_2.

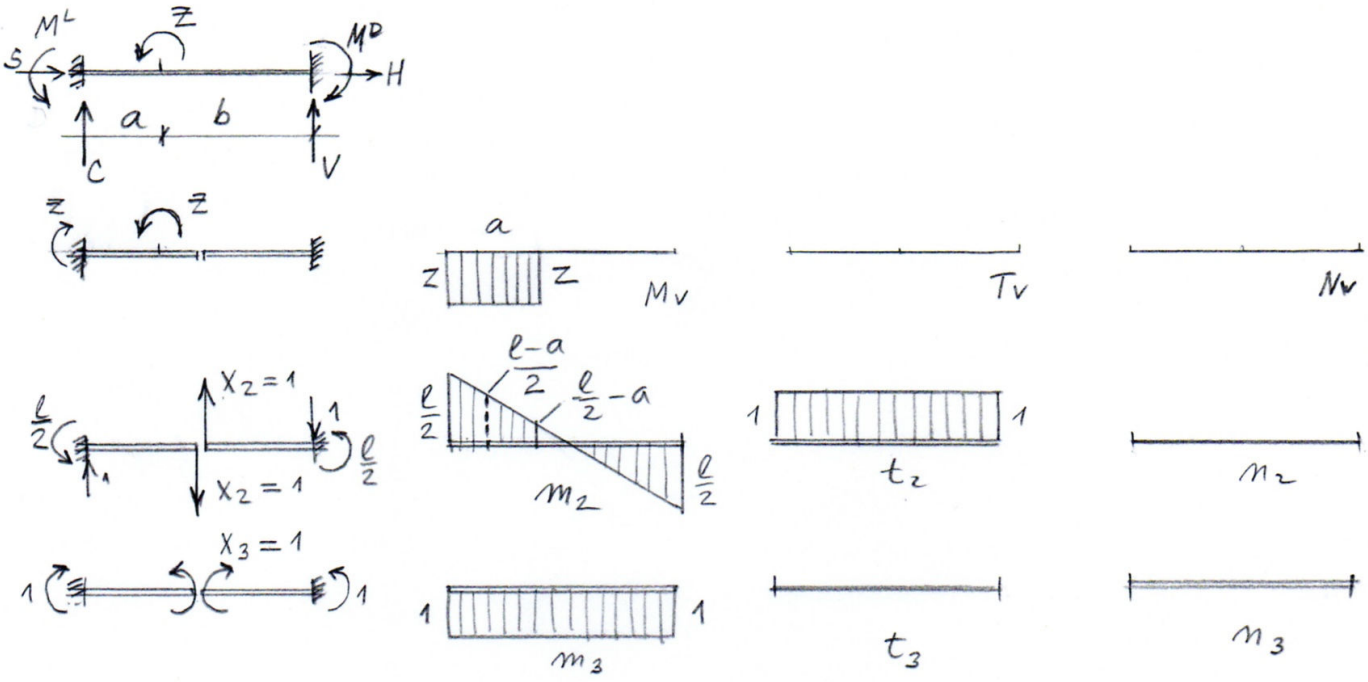
$$M^L = q\left[\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{2(x_2^3 - x_1^3)}{3\ell} + \frac{x_2^4 - x_1^4}{4\ell^2}\right]$$

HWPK-85-305

I ovaj izraz će se kontrolirati pomoću specijalnog slučaja $x_1 = 0, x_2 = \ell$, koji je ranije izveden.

$$M^L = 2\left[\frac{\ell^2}{2} - \frac{2\ell^3}{3\ell} + \frac{\ell^4}{4\ell^2}\right] = \frac{2\ell^2}{12}\left[6 - 8 + 3\right] = \frac{2\ell^2}{12}$$

le) Djelovanje koncentriranog momenta



$$a_{1V} = 0\,; \qquad a_{2V} = -Za \cdot \frac{\ell - a}{2EI}\,; \qquad a_{3V} = \frac{Za}{EI}$$

Zbog dijagonalnosti sistema jednadžbi kontinuiteta dobivaju se jednostavni izrazi za prekobrojne veličine:

$$X_1 = -\frac{a_{1V}}{a_{11}} = 0\,; \qquad X_2 = -\frac{a_{2V}}{a_{22}}\,; \qquad X_3 = -\frac{a_{3V}}{a_{33}} = -\frac{Za}{\ell}$$

Rješenje u općem obliku će se postaviti samo za specijalni slučaj zanemarivanja utjecaja poprečnih sila na deformacije. U tom slučaju izraz za X_2 glasi:

$$X_2 = \frac{Z \cdot a(\ell - a) \cdot 12EI}{2EI \cdot \ell^3} = \frac{6Za(\ell - a)}{\ell^3}$$

Konačni izrazi u općem obliku će se prikazati samo za momente na ležajima, jer se ostali podaci lako odredjuju iz uvjeta ravnoteže. Moment na lijevom ležaju, kao pozitivan je uzet vlak gore:

$$M^L = -Z + \frac{6Za(\ell - a)}{2 \cdot \ell^2} + \frac{Za}{\ell} = Z\left(-1 + \frac{3a\ell}{\ell^2} - \frac{3a^2}{\ell^2} + \frac{a}{\ell}\right)$$

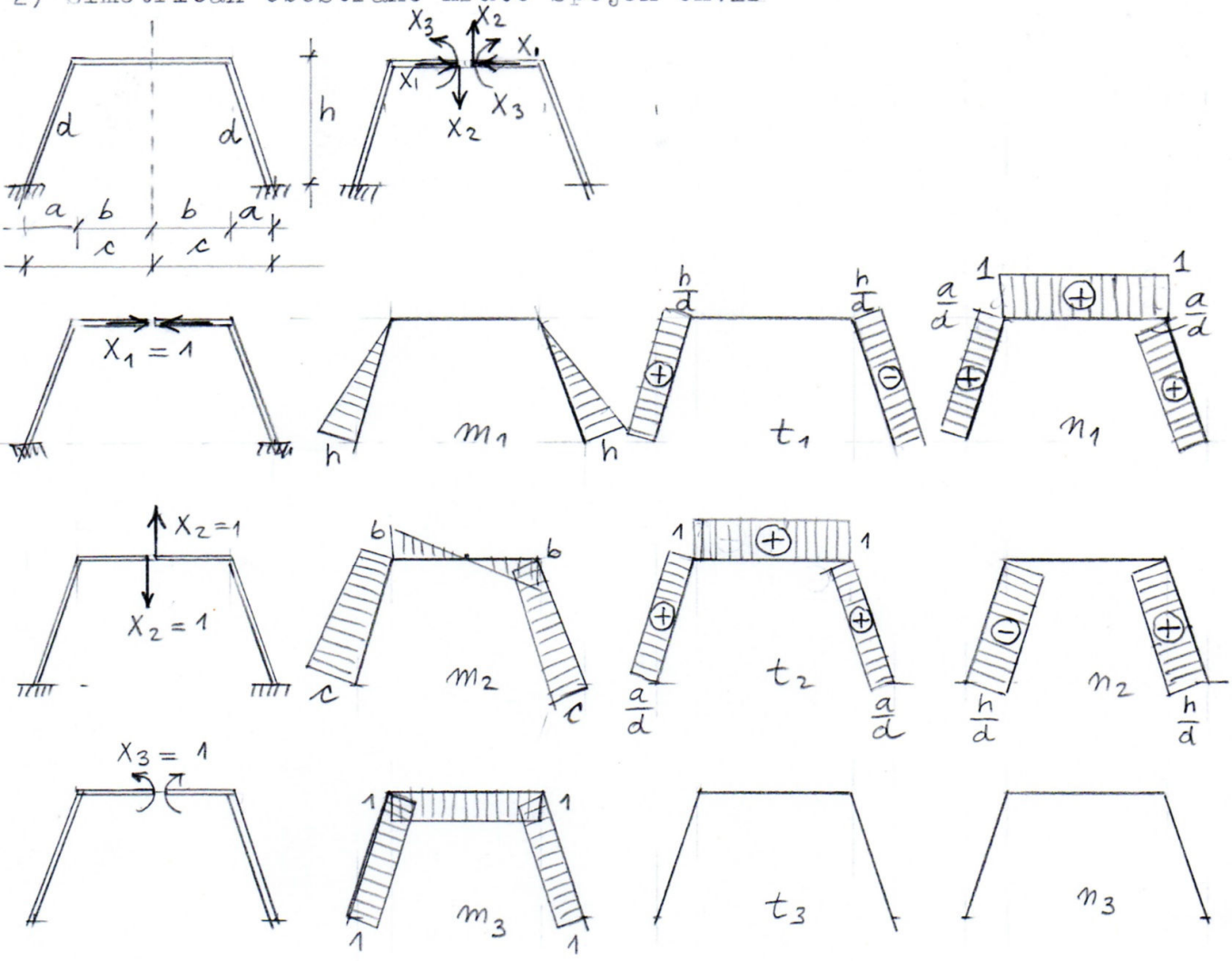
$$M^L = Z\left(-1 + 4\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2}\right) = Z\left(\frac{2a}{b} - 1\right) \cdot \frac{b^2}{\ell^2}\,; \qquad M^D = \left(1 - \frac{2b}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{\ell^2}$$

Izvod će se kontrolirati odredjivanjem momenta za specijalni slučaj $a = \frac{\ell}{2}$.

$$M^L = Z\left(-1 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}\right) = \frac{Z}{4}$$

HWPL-85-306

2) Simetričan obostrano kruto spojen okvir



Osnovni sistem je odabran uvodjenjem prekida u osi simetrije. Uz simetričnu raspodjelu karakteristika poprečnih presjeka vrijediti će $a_{12} = 0$ i $a_{23} = 0$ što znači da se sistem jednadžbi kontinuiteta sastoji od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice i jedne zasebne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Postoji način rješavanja koji vodi na dijagonalni sistem jednadžbi kontinuiteta i biti će prikazan u poglavlju: Proširenje metode sila.
Opći izrazi za članove jednadžbi kontinuiteta za gornji slučaj prikazati će se samo za slučaj u kojem su stupovi i grede prizmatični t.j. kada su EI, GF, EF konstantni duž osi svakog elementa.

Indeks 1 će označavati karakteristike stupova, a indeks 2 karakteristike greda.

$$a_{11} = \frac{2dh^2}{3E_1I_1} + \frac{2\alpha_1 h^2}{dG_1F_1} + \frac{2a^2}{d\cdot E_1F_1} + \frac{2b}{E_2F_2}; \qquad a_{12} = 0$$

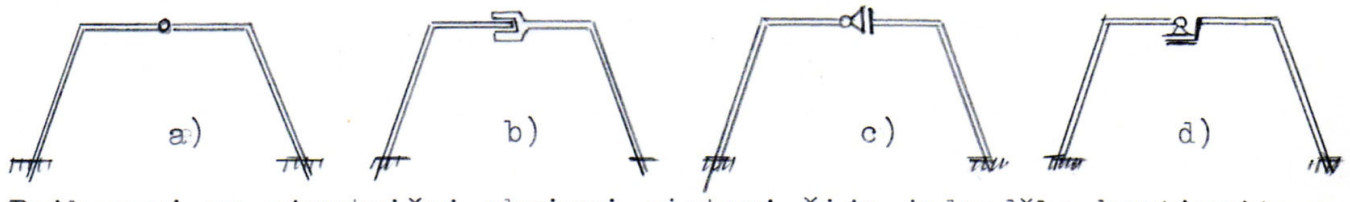
$$a_{13} = -\frac{dh}{E_1I_1};$$

$$a_{22} = \frac{2(b^2+bc+c^2)d}{3E_1I_1} + \frac{2b^3}{3E_2I_2} + \frac{2\alpha_1 a^2}{dG_1F_1} + \frac{2\alpha_2 b}{G_2F_2} + \frac{2h^2}{dE_1F_1}$$

$$a_{23} = 0; \qquad a_{33} = \frac{2d}{E_1I_1} + \frac{2b}{E_2I_2}$$

HWPK-85-307

3) Sistemi čije je rješenje sadržano u rješenju obostrano kruto spojenog okvira



Prikazani su simetrični okvirni sistemi čije jednadžbe kontinuiteta čine dio jednadžbi kontinuiteta kruto spojenog okvira.

Sistem prikazan pod a) ima samo prekobrojne veličine X_1 i X_2 uvedene za kruto spojeni okvir.

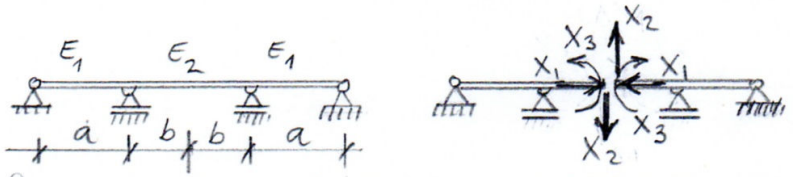
Sistem prikazan pod b) ima samo prekobrojne veličine koje odgovaraju X_2 i X_3 kod kruto spojenog okvira.

Sistem prikazan pod c) ima samo prekobrojnu veličinu X_1 uvedenu za kruto spojen okvir.

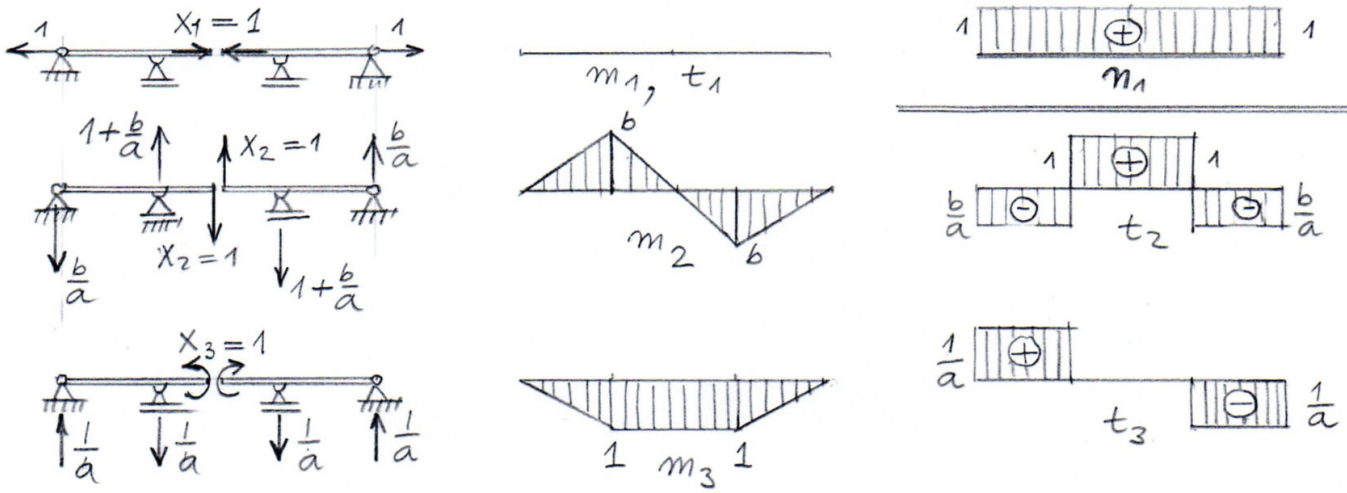
Sistem prikazan pod d) ima samo prekobrojnu veličinu koja odgovara veličini X_2 za kruto spojen okvir.

HWPK-85-308

4) Simetrični kontinuirani nosač s tri polja.



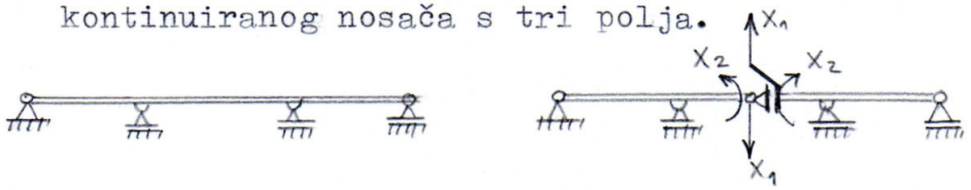
Osnovni sistem je dobiven uvodjenjem prekida u osi simetrije. Uz simetričnu raspodjelu karakteristika poprečnih presjeka i svojstava materijala pojavljuje se dijagonalni sistem jednadžbi kontinuiteta. Prikazati će se samo oni dijagrami reznih sila koji ne iščezavaju identično. Time će se smanjiti preglednost dijagrama.



$$a_{11} = \frac{2a}{E_1 F_1} + \frac{2b}{E_2 F_2}; \quad a_{22} = \frac{2ab^2}{3E_1 I_1} + \frac{2b^3}{3E_2 I_2} + \frac{2\alpha_1 b}{G_1 F_1} + \frac{2\alpha_2 b}{G_2 F_2}$$

$$a_{33} = \frac{2a}{3E_1 I_1} + \frac{2b}{E_2 I_2}; \quad a_{12} = 0; \quad a_{13} = 0; \quad a_{23} = 0.$$

5) Sistemi čije rješenje sadržano u rješenju simetričnog kontinuiranog nosača s tri polja.



Kontinuirani nosač na tri polja koji je simetričan, ali sadrži samo jedan nepomični spoj s podlogom ima prekobrojne veličine koje odgovaraju X_2 i X_3 potpuno simetričnog kontinuiranog nosača. Osnovni sistem je u tom slučaju ulančen; na simetrali je uveden pomični zglob. Skica je nesimetrična jer je spoj prikazan s konačnim mjerama, a u postupku se smatra da je neizmjerno malen.

Daljnji primjeri mogu se lako izvesti po analogiji s točkama 2) i 3).

Proširenje metode sila

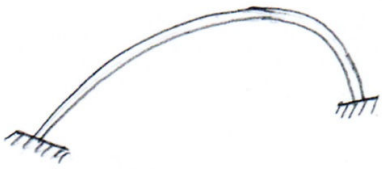
U prikazanoj osnovnoj formulaciji metoda sila je podesna samo za primjenu kod manjih sistema. Ovdje će se prikazati četiri proširenja metode sila koja omogućuju bitno proširenje područja efikasne primjene metode sila.

HWPK-85-309

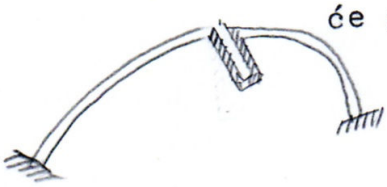
Uvodjenje nedeformabilnih elemenata

Radi postizavanja povoljnijeg sistema jednadžbi kontinuiteta mogu se u prekide sistema uvesti zamišljeni nedeformabilni elementi. To proširenje će se prikazati na dva primjera: odredjivanje elastičnog težišta i jedan specijalni slučaj dijagonalizacije sistema jednadžbi za simetričan okvir.

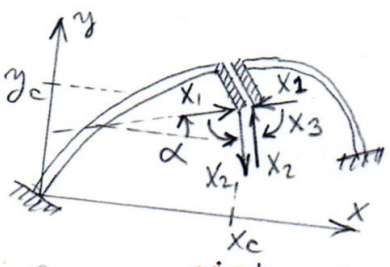
Odredjivanje elastičnog težišta



Promatra se luk ili okvir koji je na oba kraja kruto spojen s podlogom ili zatvoren štap. Ako se na bilo koji način prema osnovnoj formulaciji metode sila odabere osnovni sistem pojaviti će se jednadžbe kontinuiteta kod kojih će svi članovi biti različiti od nule. Uvodjenjem nedeformabilnog elementa uspjeti će dijagonalizacija sistema jednadžbi.



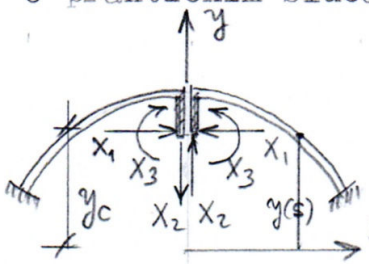
Zamisliti će se da je zadani luk prekinut, pa da su obje strane spojene nedeformabilnim elementom koji je na mjestima spajanja sa presjecima neizmjerno tanak, pa njegovo uvodjenje ne utječe na mehaničko ponašanje sistema. Zbog nedeformabilnosti i beskonačno male debljine taj element održava presjeke jedan uz drugi kao da je luk neprekinut.



Osnovni sistem će se uvesti prekidanjem nedeformabilnog umetka. Točka u kojoj se uvode prekobrojne sile i moment jst elastično

težište. Jedan pravac prekobrojnih sila odabrati će se pod odredjenim kutem α prema sistemu, a drugi će biti okomit na prvi. Položaj elastičnog težišta, odredjen koordinatama x_c i y_c kao i kut α odrediti će se tako da pripadni sistem jednadžbi kontinuiteta bude dijagonalan t.j. da bude $a_{12}=0$, $a_{13}=0$, $a_{23}=0$

U praktičnim slučajevima se najčešće pojavljuje simetričan luk ili okvir. Ako se prekobrojne veličine označe kao što je prikazano na skici, zbog simetrije sistema će biti $a_{12}=0$ i $a_{23}=0$, t.j elastično težište leži na simetrali i kut $\alpha=0$. Položaj elastičnog težišta na simetrali odrediti će se iz uvjeta $a_{13}=0$.

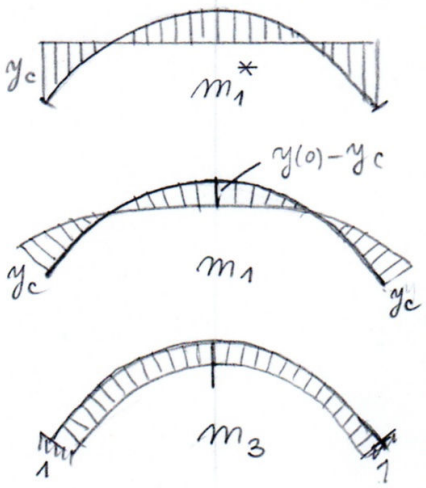


Ako se sa y(s) označi udaljenost od osi x kao funkcija položaja na luku, a s y_c položaj elastičnog težišta, mogu se momenti jediničnih stanja izraziti kao funkcije položaja s:

$$m_1(s) = y(s) - y_c$$

$$m_3(s) = 1$$

pri čemu je pozitivan moment savijanja koji izaziva zatezanje u unutrašnjosti luka.



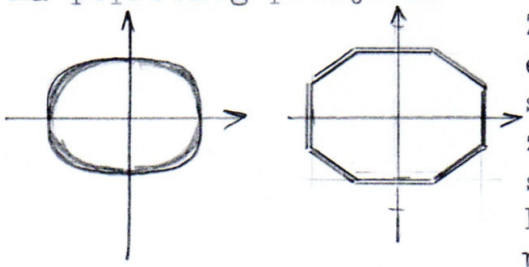
Ukoliko se momentni dijagram od X_1 crta tako da su ordinate paralelne s osi simetrije onda se mogu direktno očitaviti na skici osi luka: izmedju točke na osi i pravca djelovanja X_1 Takav dijagram je označen s m_1. Ordinate se mogu nanijeti i na standardni način- okomito na os luka, što je prikazano na skici m_1. Osnovni sistem čine dvije konzole pa je moment savijanja od X_3 konstanta. Zatjev za iščezavanjem a_{13} glasi:

$$\int_s \frac{m_1 m_3\, ds}{EI} = 0; \quad \int_s \frac{[y(s)-y_c]\, ds}{EI} = 0; \quad \int_s \frac{y(s)\, ds}{EI} - y_c \int_s \frac{ds}{EI} = \phi$$

Iz desnog izraza se direktno odredjuje ordinata a_{13}, prema:

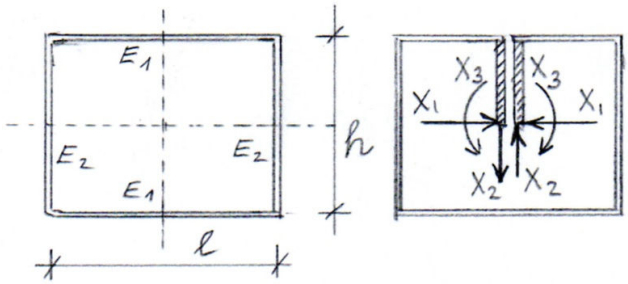
$$y_c = \frac{\int \frac{y(s)\, ds}{EI}}{\int \frac{ds}{EI}}$$

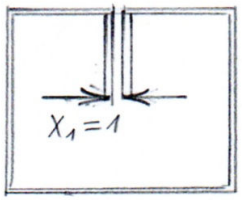
Sada je vidljivo radi čega se točka naziva "elastično težište". Izraz koji odredjuje položaj tražene točke je potpuno jednak izrazu kojim se odredjuje težište linijskih sila čiji je intenzitet odredjen funkcijom $1/EI$, t.j. elastičnim karakteristikama poprečnog presjeka.

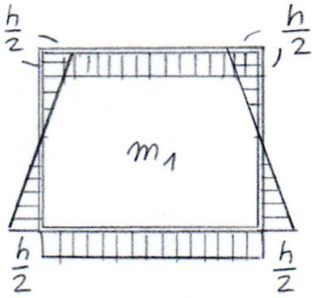


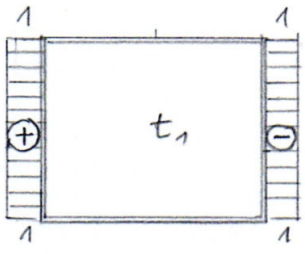
Za dvoosno simetrične zatvorene štapove elastično težište se nalazi na sjecištu simetrala. Izvesti će se opći izrazi za članove jednadžbi kontinuiteta za simetričan pravokutan zatvoren štap kojemu su karakteristike presjeka duž pojedinih elemenata.

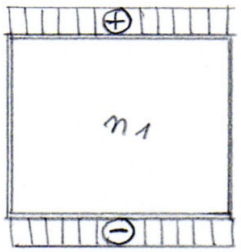
HWPK- 85-310

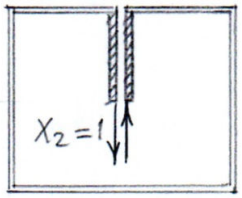


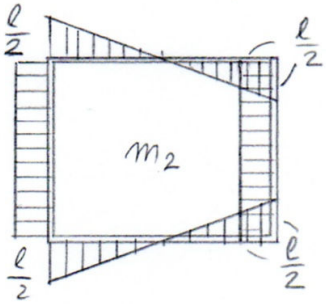


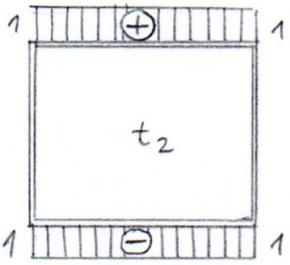


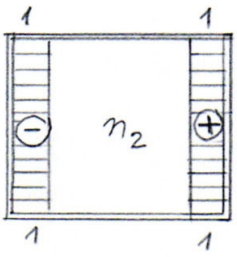


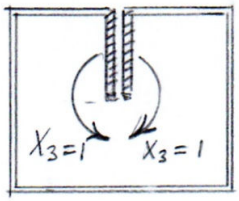


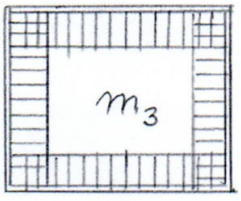


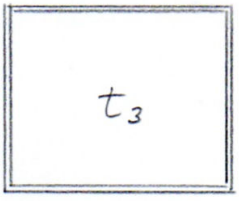


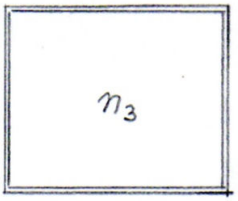












$$a_{11} = \frac{h \cdot \ell^2}{2 E_1 I_1} + \frac{h^3}{6 E_2 I_2} + \frac{2 \alpha_2 h}{G_2 F_2} + \frac{2 \ell}{E_1 F_1}$$

$$a_{12} = 0; \quad a_{13} = 0$$

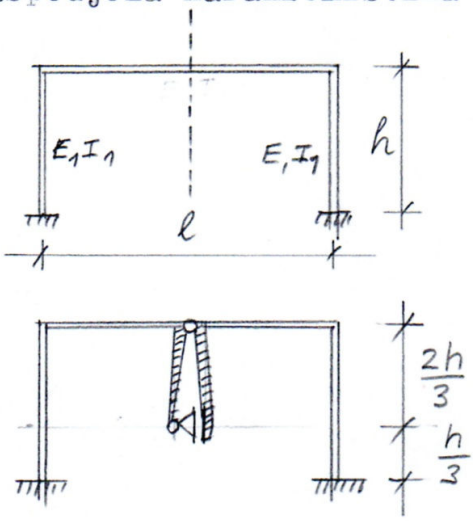
$$a_{22} = \frac{\ell^3}{6 E_1 I_1} + \frac{h \cdot \ell^2}{2 \cdot E_2 I_2} + \frac{2 \alpha_1 \ell}{G_1 F_1} + \frac{2 h}{E_2 F_2}$$

$$a_{23} = 0$$

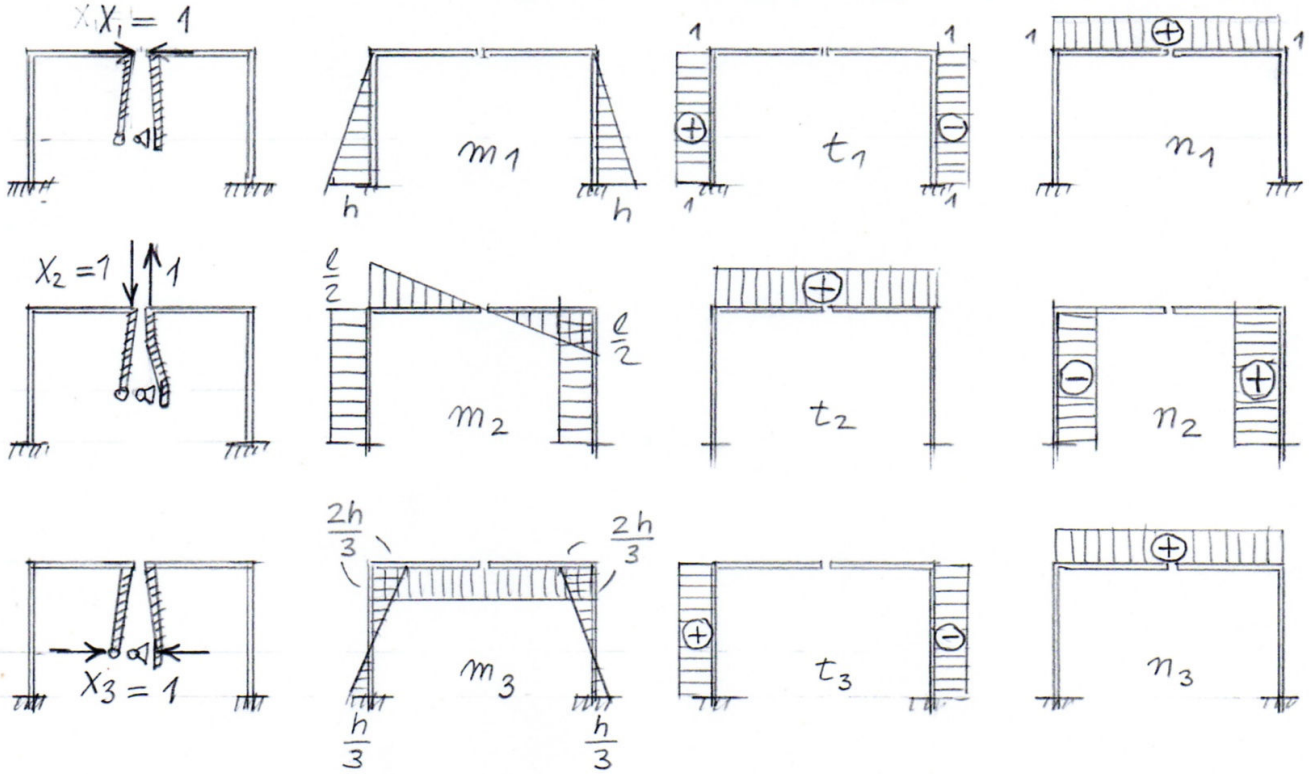
$$a_{33} = \frac{2 \ell}{E_1 I_1} + \frac{2 h}{E_2 I_2}$$

HWPL-85-311

Uvodjenje nedeformabilnih elemenata uvesti će se na poseban način kod simetričnog okvira s prizmatičnim stupovima i gredom čija raspodjela karakteristika presjeka po osi može biti proizvoljna.



Uz zanemarivanje doprinosa poprečnih i uzdužnih sila članovima jednadžni kontinuiteta dobiva se dijagonalan sistem. Uvodi se prekid u sredini grede i zamišlja da su na tako dobivene krajeve nadovezani nedeformabilni elementi. Ti nedeformabilni elementi su prosto spojeni u nedeformabilnu cjelinu. Uključivanje takove nedeformabilne cjeline u okvir ne mijenja njegove mehaničke karakteristike. Osnovni sistem će se dobiti isključivanjem spojeva koji spajaju nedeformabilne elemente. Pravac sile koja prolazi krajevima nedeformabilnih elemenata siječe stupove na donjim trećinama visine. Uslijede djelovanja te sile (X_3) momentni dijagram stupa biti će jednak dijagramu jednostrano upete grede za djelovanje momenta na presjek uz zglob. Vidljivo je da se dijagonalni sistem jednadžbi kontinuiteta dobiva ako se zanemari samo doprinos uzdužnih



sila u gredi i doprinos poprečnih sila u stupovima; i takovo zanemarivanje ima ponekad opravdanje. Opći izrazi za članove jedandžbi kontinuiteta će se prikazati za specijalni slučaj kada je i greda prizmatična (E_2I_2), i uz zanemarivanje doprinosa i poprečnih i uzdužnih sila u izrazima za članove lijeve strane jed-

HWPE-BS-312

nadžbi kontinuiteta. Sistem jednadžbi će biti dijagonalan i za simetrični okvir s kosim, ali dakako, prizmatičnim stupovima.

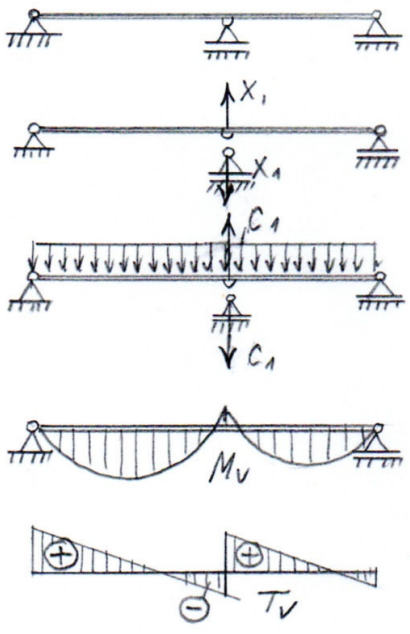
$$a_{11} = \frac{2h^3}{3E_1 I_1}\,; \qquad a_{12} = 0\,; \qquad a_{13} = 0$$

$$a_{22} = \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{h}{E_1 I_1} + \frac{\ell}{6E_2 I_2}\right)\,; \qquad a_{23} = 0$$

$$a_{33} = \frac{4h^2}{9}\left(\frac{h}{2E_1 I_1} + \frac{\ell}{E_2 I_2}\right)$$

Pridruživanje konstantnog dijela prekobrojne veličine opterećenju

Rješavanje metodom sila može se pojednostavniti ako se opterećenju pridruže konstantna djelovanja koja odgovaraju prekobrojnim djelovanjima. Ta djelovanja mogu biti parovi suprotnih sila i/ili momenata koji djeluju izmedju rubnih presjeka uvedenih prekida. Veličine tih djelovanja će se označavati s C_i pri čemu indeks "i" odgovara pripadnom prekobrojnom djelovanju. Za djelovanje opterećenja i priduženih konstantnih dijelova prekobrojnih djelovanja riješiti će se osnovni sistem na poznati način i u tom postupku će se odrediti rezne sile M_v, N_v, T_v, koje će se razlikovati od onih iz osnovne formulacije. Daljnji postupak je identičan postupku osnovne formulacije metode sila: odredjivanje članova jednadžbi kontinuiteta, rješavanje jednadžbi i odredjivanje konačnog stanja. Konačno stanje, dakako mora biti jednako konačnom stanju dobivenom bilo kojom drugom metodom. Može se zaključiti da doprinos konstantnog dijela prekobrojne veličine zajedno s doprinosom same prekobrojne veličine mora biti jednak prekobrojnoj veličini prema osnovnoj formulaciji, koja će se ovdje označiti s X_i^o. Ako su za sva tri djelovanja odabrane jednake strijelice, onda će za pripadne veličine vrijediti:



$$X_i + C_i = X_i^o$$

Odnosno prekobrojna veličina dobivena uz konstantni dio C_1 će biti-

$$X_i = X_i^o - C_i$$

Postoje dva načina izbora konstantnih dijelova prekobrojnih veličina:

a) Veličine C_i se odabiru tako da se minimizira područje na kojemu su rezne sile od opterećenja i konstantnih dijelova prekobrojnih različite od nule. Teži se tome da rezne sile M_v, T_v, N_v

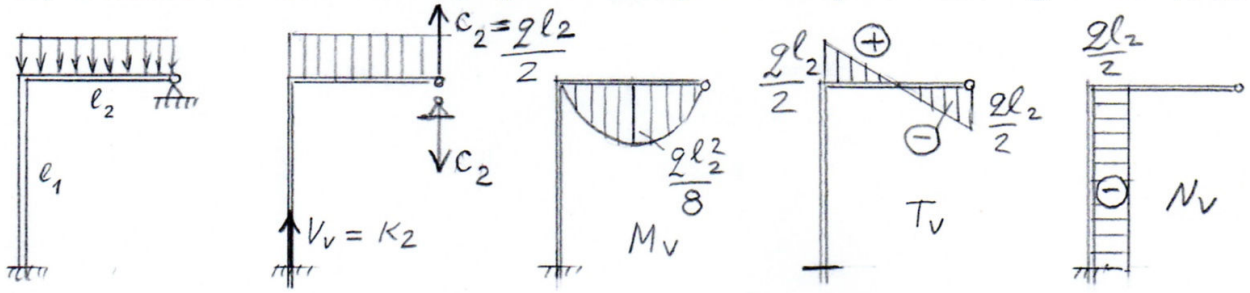
HWPK - 85 - 313

iščezavaju na što većem dijelu sistema. Na taj se način olakšava odredjivanje apsolutnih t.j. vanjskih članova jednadžbi kontinuiteta, a ako se postigne da neki od vanjskih članova iščezne olakšava se i rješavanje jednadžbi.

b) Veličine C_i se odabiru tako da se što bolje približe prekobrojnim veličinama osnovne formulacije i taj izbor se uglavnom vrši iskustveno. Odredjivanje apsolutnih članova postaje složenije, ali potrebna točnost s kojom se rješavaju jednadžbe kontinuiteta se smanjuje.

Pridruživanje konstantnog dijela prekobrojnih veličina opterećenju prikazati će se na primjerima sistema koji su već obradjivani.

1) Poluokvir s kruto spojenim krajem i nepomičnim zglobom (str.271).

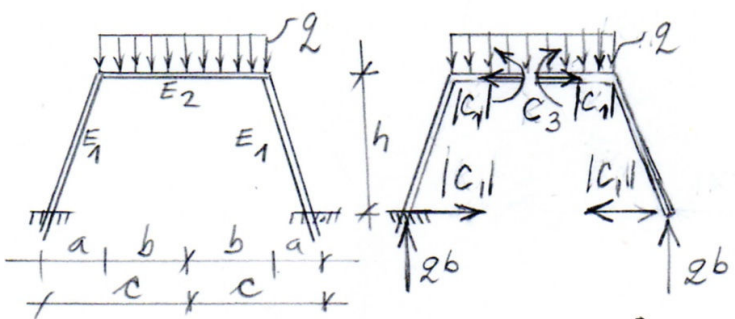


Osnovni sistem je odabran kao i prvom primjeru: isključivanjem nepomičnog zgloba. Opterećenju je pridružen konstantni dio prekobrojne veličine X_2. Ta sila je označena s C_2 i odredjena iz uvjeta iščezavanja momenta savijanja u stupu. Pomoću rješenja za jedinična djelovanja prikazana na str.271. odrediti će se apsolutni članovi jednadžbi kontinuiteta:

$$a_{1v} = 0; \qquad a_{2v} = \frac{q l_2^4}{24 E_2 I_2} - \frac{q l_1 l_2}{2 E_1 F_1}$$

Opseg proračunavanja za odredjivanje vanjskih članova smanjen je na 40%, a iščezavanje jednog vanjskog člana olakšava i rješavanje samih jednadžbi.
Kod odredjivanja konačnog stanja treba uvažiti i silu C_2 što se s ozirom na razliku prema osnovnoj formulaciji može nepažnjom izostaviti.

2) Simetričan obostrano kruto spojen okvir (str.307).



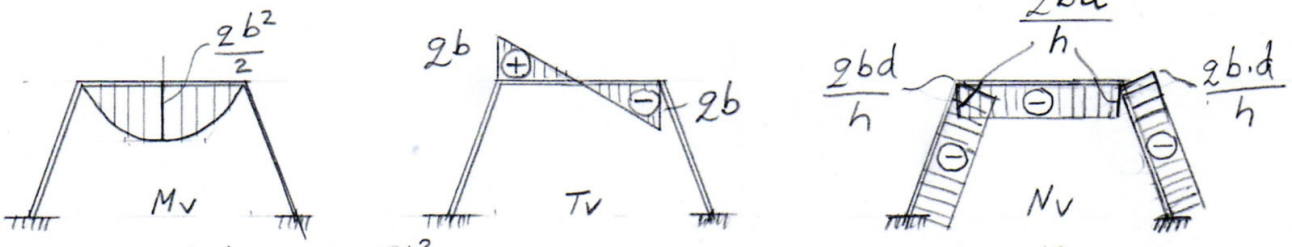
$$C_1 = -\frac{2 \cdot b \cdot a}{h}$$

$$C_3 = \frac{2b^2}{2}$$

Osnovni sistem je odabran kao i u prvom primjeru: prekidom štapa u simetrali sistema. Opterećenju su pridruženi konstantni dijelovi prekobrojnih veličina X_1 i X_3 tako da iščezne moment savijanja u stupovima. Strijelice uz C_1 su ucrtane u stvarnom smjeru

HWPK-85-314

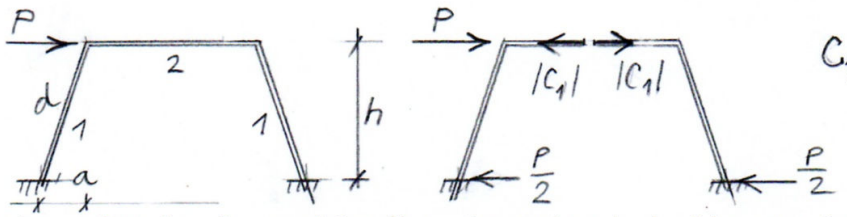
pa su označene apsolutnom veličinom.



$$a_{1V} = -\frac{2q\,abd}{h\,E_1 F_1} - \frac{2qab^2}{h\cdot E_2 F_2}; \quad a_{2V} = 0; \quad a_{3V} = \frac{2qb^3}{3E_2 I_2}$$

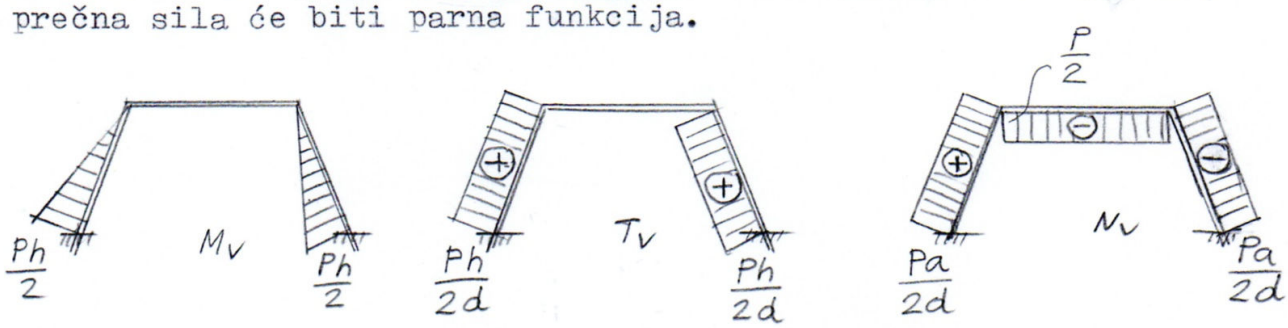
Opseg proračuna za vanjske članove iznosi 60% opsega proračuna potrebnog u osnovnoj formulaciji.

Isti sistem će se promatrati i za djelovanje sile paralelne s gredom



$$C_1 = -\frac{P}{2}$$

Opterećenju je pridružen konstantni dio prekobrojne veličine X_1 koji je po apsolutnoj veličini jednak polovini zadane sile. Ukupna sila koja djeluje na svaku od konzola biti će jednaka P/2 pa će moment savijanja biti neparna funkcija, a poprečna sila će biti parna funkcija.



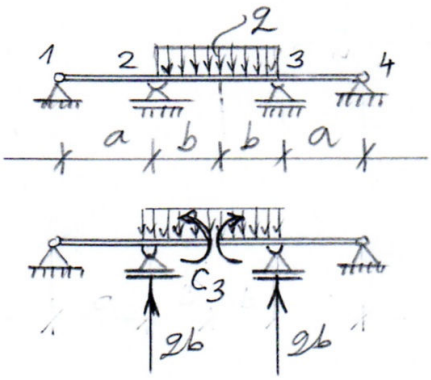
$$a_{1V} = -\frac{Pb}{E_2 F_2}; \quad a_{2V} = \frac{Pdh}{6E_1 I_1}(2c+b) + \frac{\alpha_1 Pah}{dG_1 F_1} - \frac{Pah}{dE_1 F_1};$$

$$a_{3V} = 0$$

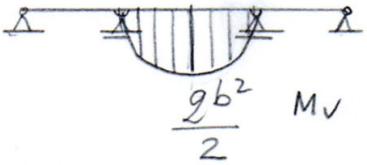
Opseg proračuna za vanjske članove iznosi 60% opsega za osnovnu formulaciju. U osnovnoj formulaciji se pojavljuju sva tri vanjska člana, dok ovdje jedan iščezava što olakšava rješavanje jednadžbi.

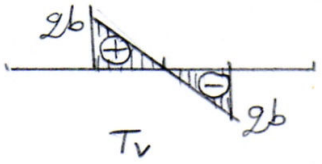
HNPK-85-315

3) Simetrični kontinuirani nosač s tri polja.(str.308).



$$C_3 = \frac{qb^2}{2}$$

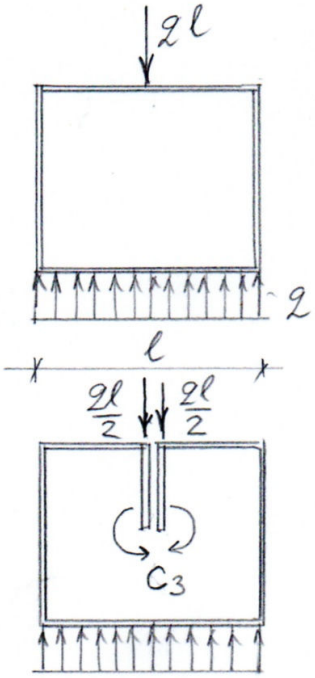




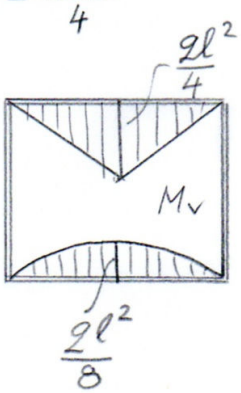
Osnovni sistem je odabran kao u prvom primjeru: prekidom štapa u osi simetrije. Opterećenju je pridružen konstantni dio prekobrojnog momenta X_3 i označen s C_3. Veličina C_3 je odredjena iz uvjeta iščezavanja sile u spojevima 1 i 4. Na taj način je područje na kojemu su dijagrami reznih sila različiti od nule ograničeno na srednji raspon.

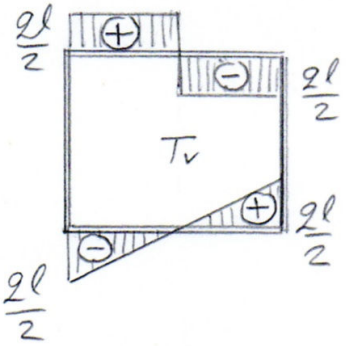
$$a_{1v} = 0 \; ; \qquad a_{2v} = \frac{2qb^3}{3E_2I_2}$$

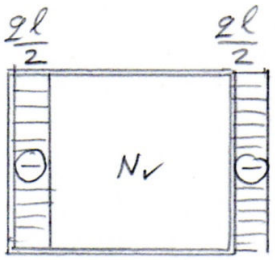
4) Simetričan pravokutan zatvoren štap (str.311).



$$C_3 = \frac{ql^2}{4}$$





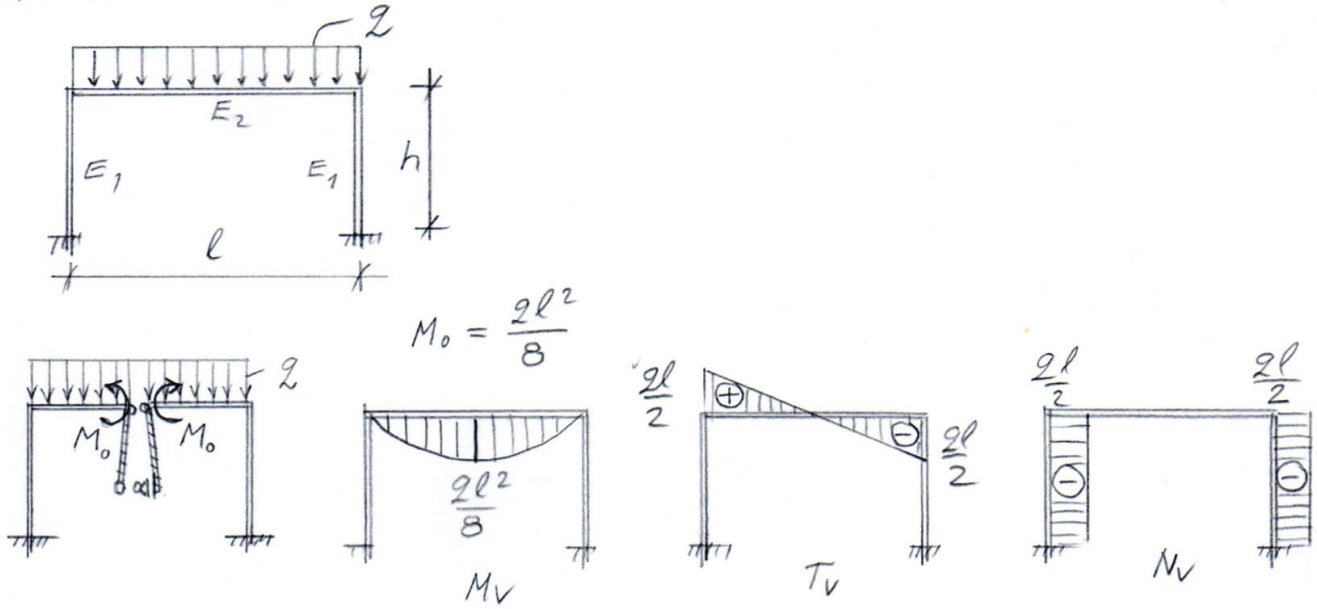


$$a_{1v} = \frac{ql^3h}{48E_1I_1} \; ; \qquad a_{2v} = 0 \; ; \qquad a_{3v} = \frac{5ql^3}{24E_1I_1}$$

Osnovni sistem je odabran kao u prvom primjeru prekidom u uključenom nedeformabilnom elementu. Opterećenju je pridružen konstantni dio prekobrojnog momenta X_3 i označen s C_3. Veličina C_3 je odredjena iz uvjeta iščezavanja momenta savijanja u stupovima.

HWPL-85-316

4) Simetričan pravokutan okvir (str. 312).



Osnovni sistem je odabran kao u prvom prikazu: isključenjem spojeva izmedju uvedenih nedeformabilnih elemenata. Opterećenju će se pridružiti konstantni dijelovi prekobrojnih veličina tako da iščeznu momenti savijanja u stupovima. Sile C_1 i C_3 bi trebale formirati spreg s momentom $ql^2/8$ pa je zbog jednostavnosti ucrtan upravo odgovarajući moment i označen s M_0.

$$a_{1V} = 0; \qquad a_{2V} = 0; \qquad a_{3V} = \frac{q h l^3}{18 E_2 I_2}$$

Uz zanemarivanje doprinosa uzdužnih i poprečnih sila deformacijama dobiven je za ovaj slučaj dijagonalan sistem jednadžbi kontinuiteta i taj će se sistem riješiti za prikazano djelovanje opterećenja.

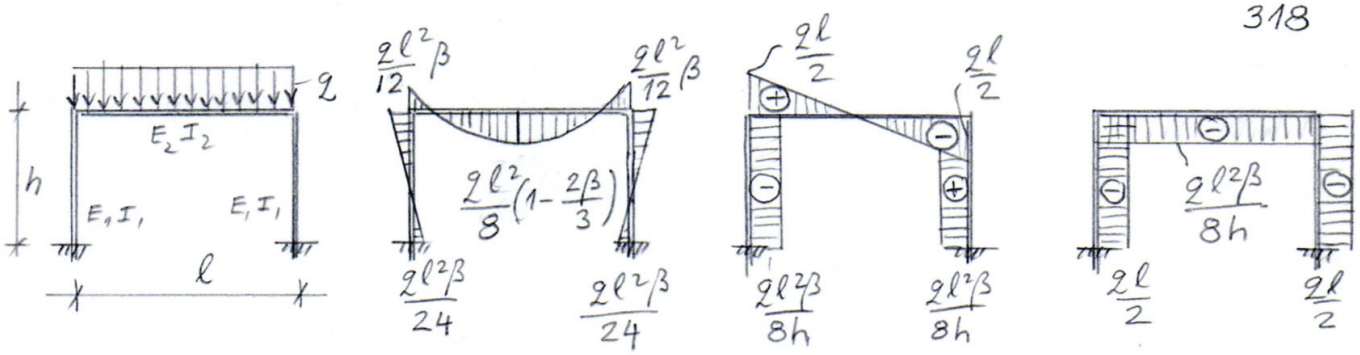
$$X_1 = 0; \qquad X_2 = 0; \qquad X_3 = -\frac{a_{3V}}{a_{33}} = -\frac{q h l^3}{18 E_2 I_2 \cdot \frac{4h^2}{9}\left(\frac{h}{2E_1 I_1} + \frac{l}{E_2 I_2}\right)}$$

$$X_3 = \frac{q l^2}{8h\left(\frac{K_2}{2K_1} + 1\right)} = \frac{q l^2}{8h}\beta \qquad \beta = \frac{1}{1 + \frac{K_2}{2K_1}}$$

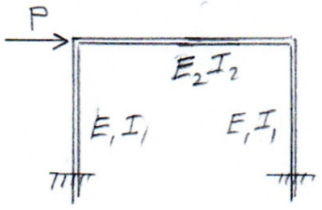
Izveden je izraz za prekobrojnu veličinu u kojemu se pojavljuje bezdimenzionalni faktor β koji je funkcija omjera krutosti. Porastom omjera krutosti grede i stupa β se približava nuli, pa će u graničnom slučaju neizmjerno krute grede rješenje biti jednako stanju osnovnog sistema. Smanjenjem omjera krutosti grede i stupa β se približava vrijednosti 1, pa će u graničnom slučaju nedeformabilnih t.j. neizmjerno krutih stupova rješenje za gredu biti jednako rješenju obostrano upete grede.

Zbrajanjem doprinosa opterećenja kojemu je pridružen konstantni dio prekobrojnog momenta i doprinosa prekobrojne veličine dobiva se konačno stanje.

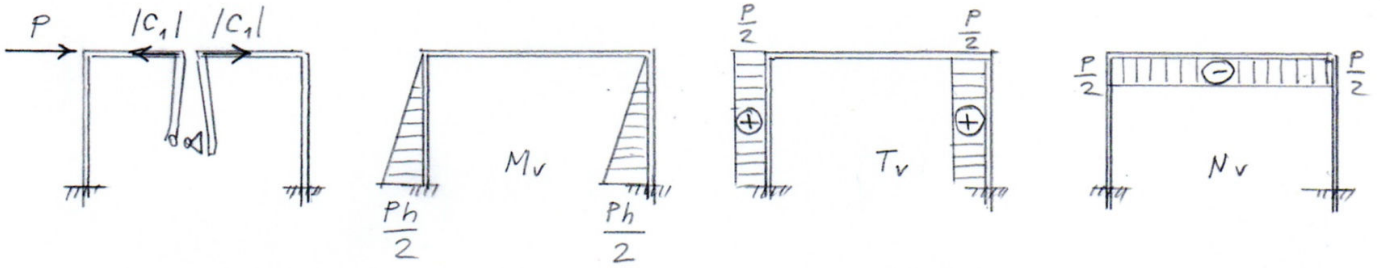
HWPK-85-317



Isti sistem će se promatrati i za djelovanje sile paralelne s gredom



$$C_1 = -\frac{P}{2}$$

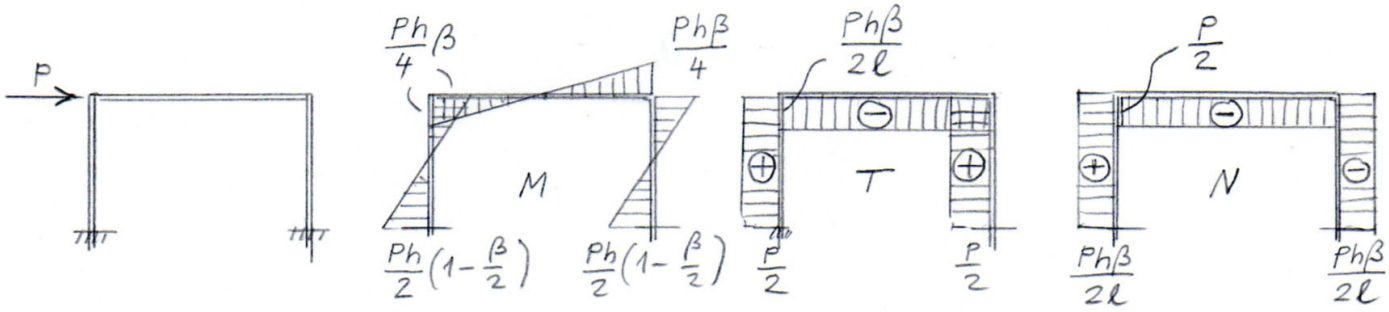


Opterećenju je pridružen konstantni dio prekobrojne sile X_1. Veličina C_1 je po apsolutnom iznosu jednaka polovini sile opterećenja, pa će rezultanta ukupnog djelovanja na svaku od konzola biti jednaka. Rješenje će se postaviti uz zanemarivanje doprinosa uzdužnih i poprečnih sila deformacijama, pa će zbog neparne funkcije momenta savijanja iščeznuti apsolutni članovi u prvoj i trećoj jednadžbi kontinuiteta

$$a_{1v} = 0 \; ; \qquad a_{2v} = \frac{P\ell h^2}{4E_1 I_1} \; ; \qquad a_{3v} = 0$$

$$X_1 = 0 \; ; \qquad X_2 = -\frac{P\ell h}{\frac{4E_1 I_1}{h} \cdot \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{h}{E_1 I_1} + \frac{\ell}{6E_2 I_2}\right)} = -\frac{Ph}{2\ell}\beta$$

$$X_3 = 0 \qquad \beta = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{6K_2}}$$



HWPK-85-318

Pridruživanje većeg broja prekobrojnih djelovanja jednoj prekobrojnoj veličini

U mnogim slučajevima se metoda sila može efikasnije primijeniti ako se jednoj prekobrojnoj veličini ne pridruži samo jedan suprotan par jediničnih sila ili suprotan par jedniničnih momenata nego grupa suprotnih parova sila i/ili suprotnih parova momenata, koji ne moraju biti jedinični. Postupak će se zbog toga nazivati i "grupiranje prekobrojnih djelovanja".

Prekobrojna veličina će kod grupiranja prekobrojnih djelovanja imati smisao faktora koji odredjuje doprinos grupe traženom rješenju.

Stanje u kojem se osnovni sistem nalazi pod djelovanjem i-te grupe prekobrojnih djelovanja nazivati će se i-to osnovno stanje. Naziv "jedniničnо stanje" bi i ovdje bio primjenjiv, jer se odnosi na jediničnu vrijednost prekobrojne veličine. Osnovna stanja se nekad nazivaju i homogena jer se u njima ne pojavljuje opterećenje.

Osnovna stanja imaju i ulogu mjernih opterećenja, ali rezultati integralnog izraza ne će biti pojednini relativni pomaci ili relativni zaokreti nego njihova linearna kombinacija.

Ukupni broj osnovnih stanja mora biti jednak stupnju preodredjenosti sistema. Osnovna stanja moraju biti linearno nezavisna.

Za rješavanje pomoću grupiranja prekobrojnih djelovanja odabire se najjednostavniji osnovni sistem. Pogodno je na tom sistemu odrediti stupanj preodredjenosti istim postupkom kao u osnovnoj formulaciji. Nakon toga se izabiru grupna djelovanja i za njih rješava osnovni sistem. Daljnji postupak je jednak kao i za osnovnu formulaciju metode sila.

Moguća su dva osnovna načina grupiranja prekobrojnih djelovanja: lokalizacija i računska ortogonalizacija.

Dva jedinična ili dva osnovna stanja metode sila će se nazvati ortogonalnima ako iščezava pripadni vandijagonalni član jednadžbi kontinuiteta, t.j. stanje "i" i stanje "j" su ortogonalni ako vrijedi $a_{ij}=0$.

Lokalizacija je izbor takovih grupa prekobrojnih djelovanja čije je djelovanje lokalno t.j. ograničeno na što manji dio sistema. Traže se stanja kod koji rezne sile za svako od njih iščezavaju na što većem dijelu sistema.

Lokalizacijom se postiže jednostavnost i preglednost, a kod složenijih sistema i osjetna mjera ortogonalnosti.

Lokalizacija bi se svakako trebala provesti pri rješavanju preodredjenih štapnih sistema metodom sila.

HWPE-85-319

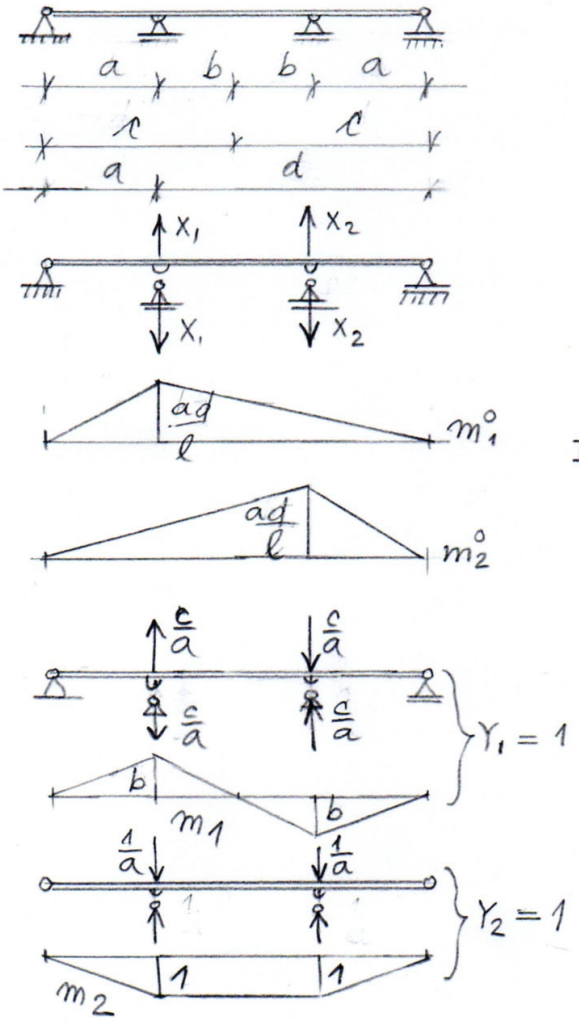
Računska ortogonalizacija je postupak grupiranja jediničnih ili lokaliziranih osnovnih stanja u kojemu se računskim postupkom postiže iščezavanje vandijagonalnih članova jednadžbi kontinuiteta.

Računska ortogonalizacija vodi na složenija osnovna stanja i može se okarakterizirati kao olakšavanje rješavanja jednadžbi na račun otežavanja njihovog postavljanja, pa njenu upotrebu treba pažljivo razmotriti.

U općem slučaju se računskom ortogonalizacijom može postići dijagonalni sistem jednadžbi kontinuiteta, t.j. može se dobiti takovih "n" osnovnih stanja koja su medjusobno ortogonalna. Rješavanje jednadžbi je svedeno na najmanju mjeru, ali je odredjivanje apsolutnih članova složeno. Ukupni opseg proračunavanja odgovara ukupnom opsegu potrebnom za rješavanje invertiranjem sistema jednadžbi, znači da dolazi u obzir ukoliko se zadani sistem treba riješiti za veći broj različitih opterećenja. Prednost prema invertiranju je mogućnost prikazivanja osnovnih stanja dijagramima reznih sila što daje mogućnost uvida u karakteristike sistema kao i mogućnost kvalitativne kontrole.

Grupiranje prekobrojnih djelovanja će se uvesti na nekoliko poznatih primjera.

1) Simetričan kontinuirani nosač s tri polja (str.308. i 316.).



Najjednostavniji osnovni sistem je u ovom slučaju prosta greda, dobivena isključivanjem spojeva izmedju polja. Prekobrojna djelovanja su dvije sile: X_1, X_2. U osnovnoj formulaciji se zasebnim djelovanjem dobivaju jedninična stanja. Prikazani su samo pripadni dijagrami momenata savijanja m_1^o i m_2^o, koji su označeni superskriptom "o" da bi se istaknula pripadnost osnovnoj formulaciji. Rezne sile zahvačaju cijeli sistem i vandijagonalni član je različit od nule. Na str.308 je zadatak rješavan pomoću ulančenog osnovnog sistema.

Grupiranjem prekobrojnih djelovanja mogu se na prostoj gredi postići osnovna stanja potpuno jednaka jedninićnim stanjima na pogodnom osnovnom sistemu.

Radi isticanja razlike će se prekobrojne veličine za grupna osnovna stanja označiti s Y_i.

HWPK-85-320

Prvu grupu prekobrojnih djelovanja čine dva para suprotnih sila pri čemu sile jednog para teže zbližavanju a sile drugog para teže razmicanju. Sile nisu jedninične jer je pripadno osnovno stanje točno prilagodjeno prvom jedniničnom stanju rješenja sa str.308.

Prva grupa prekobrojnih djelovanja ima u rješenju i ulogu mjernog opterećenja pomoću kojeg se odredjuje linearna kombinacija relativnih pomaka u uvedenim prekidima. Ako se relativni pomaci u uvedenim prekidima označe s a_1° i a_2° prema osnovnim prekobrojnim veličinama X_1 i X_2, onda prva grupa prekobrojnih djelovanja "mjeri" kombinaciju:

$$a_1 = a_1^\circ \cdot \frac{c}{a} - a_2^\circ \cdot \frac{c}{a}$$

Drugu grupu prekobrojnih djelovanja čine takodjer dva para suprotnih sila pri čemu sile u oba para teže zbližavanju. Veličina sila je i ovdje odabrana tako da se osnovno stanje točno prilagodi drugom jedniničnom stanju rješenja na str.308.

Druga grupa prekobrojnih djelovanja ima i ulogu mjernog opterećenja i ona "mjeri" linearnu kombinaciju relativnih pomaka u uvedenim prekidima:

$$a_2 = -a_1^\circ \frac{1}{a} - a_2^\circ \frac{1}{a}$$

HWPK-85-321

Jednadžbe kontinuiteta postavljene pomoću grupnih djelovanja izražavaju zahtjev za iščezavanjem linearnih kombinacija relativnih pomaka:

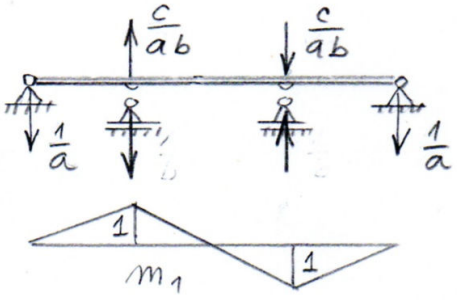
$$a_1 = a_1^\circ \frac{c}{a} - a_2^\circ \frac{c}{a} = 0$$

$$a_2 = -a_1^\circ \frac{1}{a} - a_2^\circ \frac{1}{a} = 0$$

Vidljivo je da taj zahtjev povlači i iščezavanje relativnih pomaka, pa je na tom jednostavnom primjeru prikazana korektnost uvodjenja grupnih prekobrojnih djelovanja.

Ovaj primjer omogućuje da se to i intuitivno prihvati: Ako su grupiranjem postignuta stanja koja potpuno odgovaraju jedniničnim stanjima poznatog rješenja, onda i grupiranje vodi na točno rješenje. na drugačijem osnovnom sistemu,

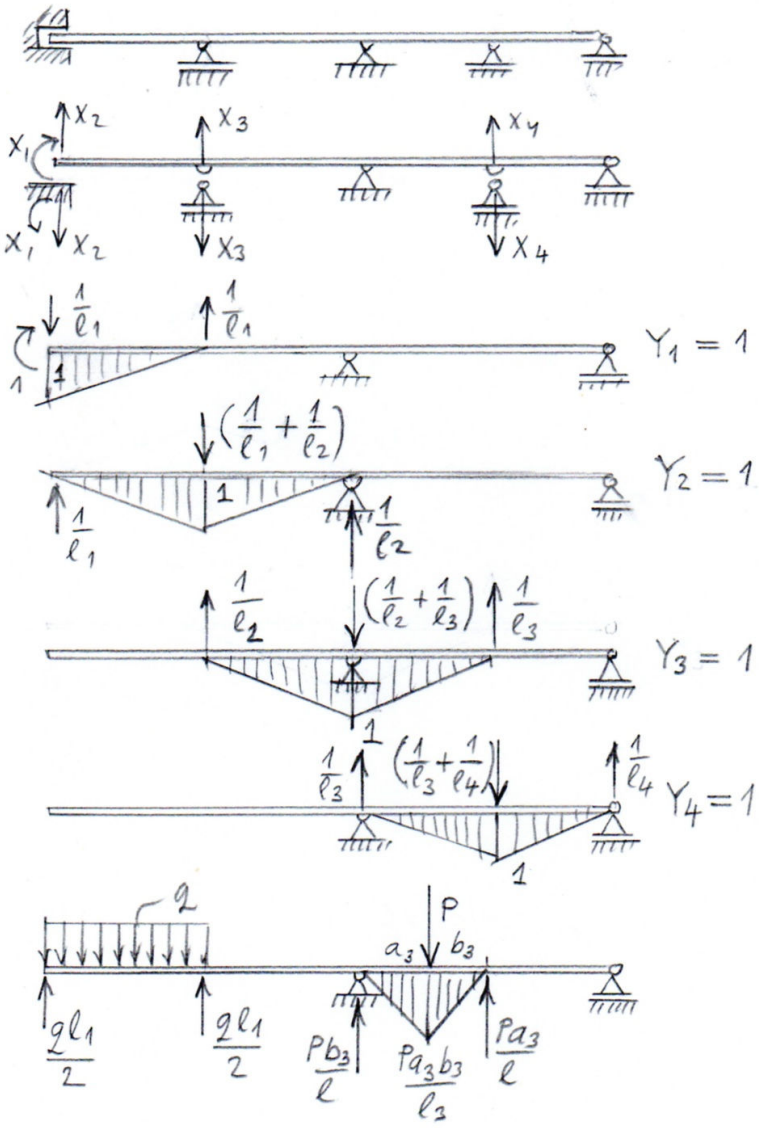
Za tehničku provedbu postupka nije bitna fizikalna interpretacija uloge grupnih djelovanja kao mjernih opterećenja; ako su grupna djelovanja linearno nezavisna, osigurano je korektno rješenje.



Za rješenje nije bitan faktor proporcionalnosti s kojim je osnovno stanje pomnoženo. U praktičnom postupku bi se prva grupa prekobrojnih djelovanja odabrala tako da ekstremi momenta savijanja budu jedinični. Pripadne sile u spojevima se lako rekonstruiraju iz uvjeta ravnoteže.

2) Kontinuirana greda

Clapeyronov postupak može se pomoću grupiranja prekobrojnih djelovanja postaviti i na jednostavnom osnovnom sistemu: prostoj gredi. Sile u spojevima jediničnih stanja prema Clapeyronu sada su grupe prekobrojnih sila u isključenim spojevima.



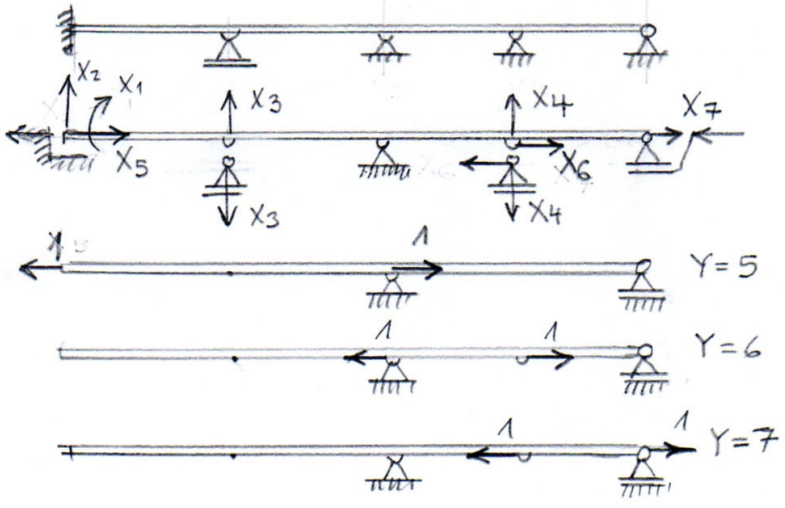
Može se uočiti: za metodu sila su bitna osnovna stanja, a osnovni sistemi služe samo za njihovu interpretaciju.

Prikazana je kontinuirana greda četiri puta preodredjena.

Primijenjen je način prikazivanja koji se često pojavljuje u primjenama: na istoj skici je prikazano opterećenje i momentni dijagram.

Pri rješavanju sa grupnim prekobrojnim djelovanjima obavezno će se uvoditi konstantni dijelovi prekobrojnih djelovanja uz opterećenja, da se postignu što jednostavniji dijagrami reznih sila. Primjer je prikazan na skici.

3) Kontinuirana greda s nepomičnim zglobovima

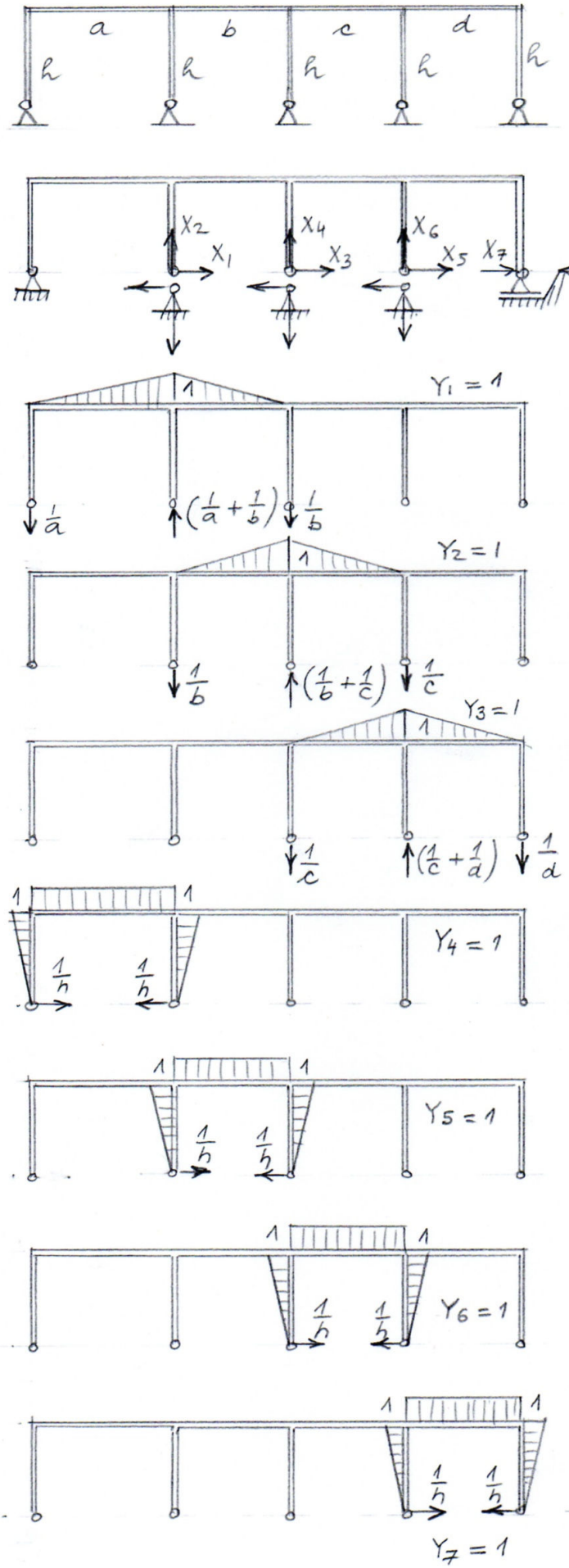


Kod kontinuirane grede s nepomičnim zglobovima grupiraju se po dvije prekobrojne sile paralelne s osi i to tako djeluju u susjednim ležajevima.

Primjer izveden zamjenom spojeva prethodnog primjera, pa su prikazane samo tri grupe po kojima se ovaj primjer razlikuje od prethodnoga.

HWPK-85-322

4) Kontinuirani jednokatni okviri



Pomoću grupiranja prekobrojnih djelovanja može se kontinuirani jednokatni okvir riješiti analogno kontinuiranoj gredi s nepomičnim zglobovima.

Prikazan je jednostavni osnovni sistem: prosto spojen okvir. Na njemu su uvedena prekobrojna djelovanja i odredjen stupanj preodredjenosti: u ovom primjeru n=7.

Prikazano je sedam grupa prekobrojnih sila uz glavnu karakteristiku pripadnih osnovnih stanja: momentne dijagrame.

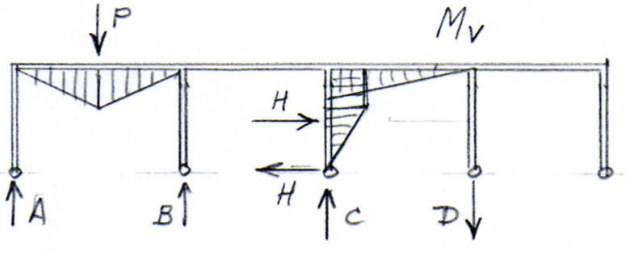
Dijagrami uzdužnih i poprečnih sila će se lako odrediti.

Pogodno je uočiti da se u osnovnim stanjima pojavljuju samo dva tipa:

prvi tip koji odgovara osnovnom stanju za kontinuiranu gredu sa dva polja;

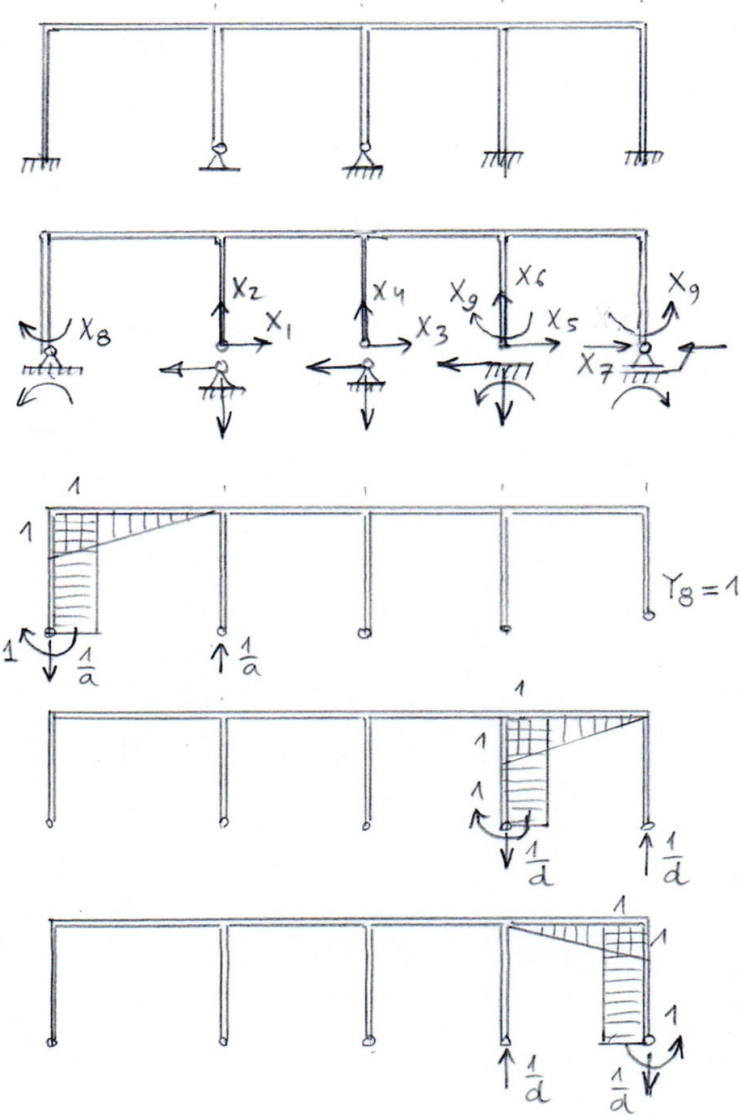
drugi tip odgovara dvozglobnom okviru.

Zbog usporedbe efikasnosti s metodom pomaka treba uočiti da se kod ovog rješenja mogu uzeti u obzir svi utjecaji na deformacije.
Djelovanja opterećenja treba dodavanjem pogodnih konstantnih dijelova prekobrojnih sila uravnotežiti za svako polje zasebno.



HWPK-85-323

5) Kontinuirani okviri s upetim stupovima



Rješenje okvira s upetim stupovima može se postaviti proširivanjem rješenja za okvir s nepomičnim zglobovima.

Prikazan je okvir s tri upeta stupa i dva stupa na nepomičnim zglobovima.

Prikazan je nadalje jednostavan osnovni sistem s prekobrojnim djelovanjima u osnovnoj formulaciji.

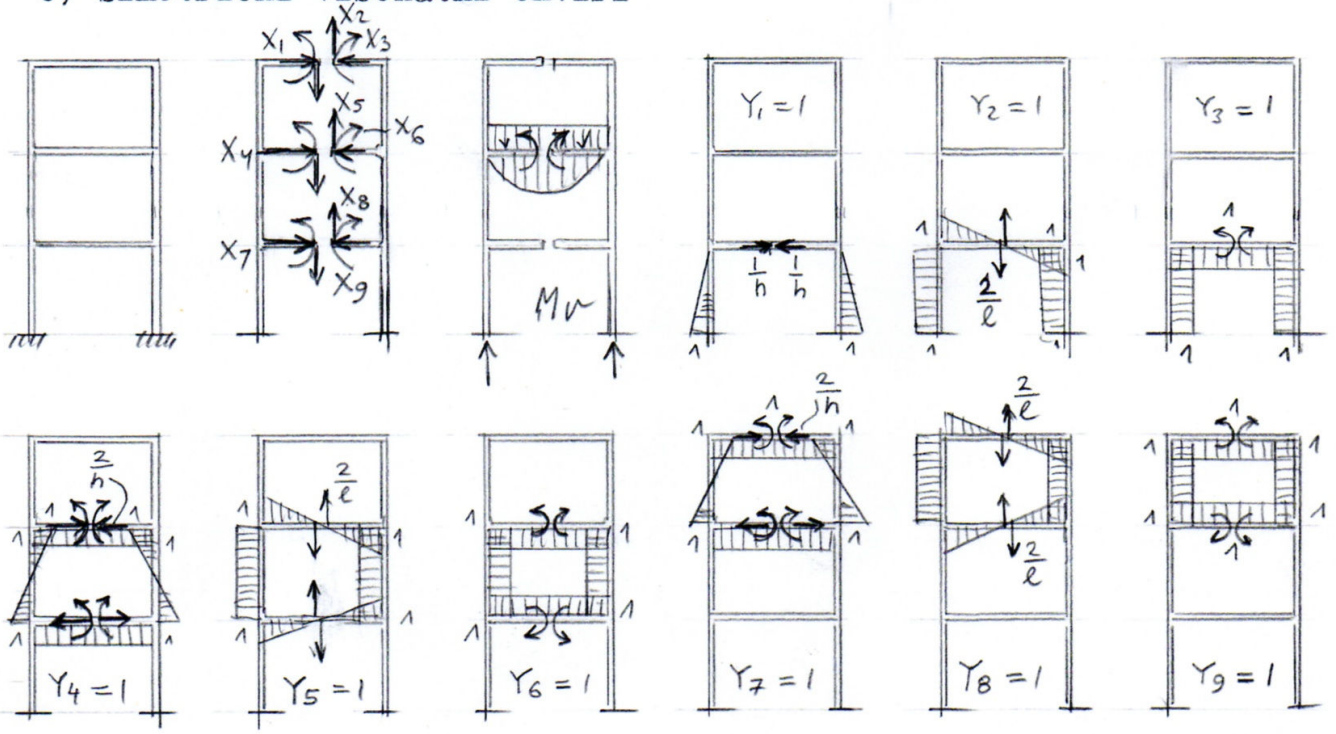
Prvih sedam grupa prekobrojnih djelovanja preuzimaju se od prethodnog primjera.

Za svaki upeti stup treba uvesti po jednu grupu koja po tipu odgovara osnovnom stanju za poluokvir s pomičnim zglobom.

Na ovom primjeru je vidljiva prilagodljivost metode sila uz grupiranje prekobrojnih djelovanja.

HWPK-85-324

6) Simetrični višekatni okviri

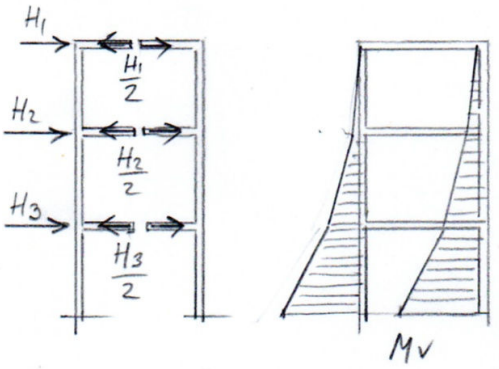


Simetrični višekatni okviri se grupiranjem prekobrojnih djelovanja rješavaju tako da se uvedu osnovna stanja koja odgovaraju stanjima simetričnog ovira i stanjima simetričnog pravokutnog zatvorenog štapa.

Na str.324 je prikazan takav okvir. Na skici b) je prikazan najjednostavniji osnovni sistem: dvije konzole spojene s podlogom.

Na skici označenoj s M_v je prikazana mogućnost uvodjenja konstantnih dijelova prekobrojnih djelovanja.

Na preostalim skicama su prikazana grupirana djelovanja s dijagramima momenata savijanja. Odabrana su stanja kod kojih se najveće ordinate momenata savijanja jedinične. Zbog toga će se veličine sila odrediti računski,što je ovdje elementarno.

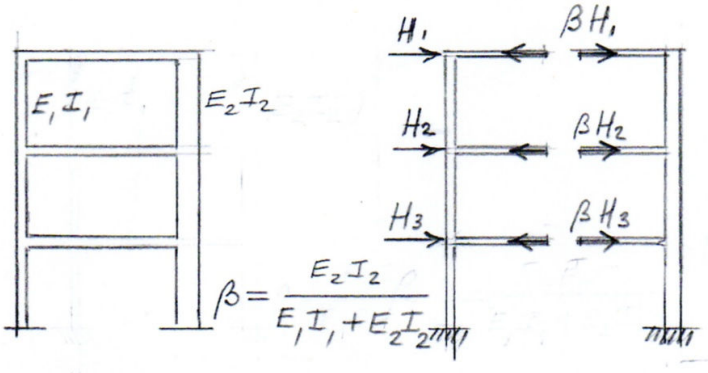


Zbog simetričnosti se sistem od 9 jednadžbi kontinuiteta raspada na dva: jedan sa šest jednadžbi koji sadrži doprinose simetričnih stanja i jedan s tri jednadžbe koji sadrži doprinose antimetričnih stanja.

Kod opterećenja silama paralelnim s gredama uvesti će se konstantne sile u grede jednake polovinama sila opterećenja i tako postići antimetričan raspored momenata savijanja. Time se postiže iščezavanje apsolutnih članova uz momentna stanja, koja imaju redne brojeve 3,6,9.

Isto tako iščezavaju i doprinosi savijanja apsolutnim članovima za stanja 1,4,7 i preostaju samo doprinosi uzdužnih sila. U visokogradnji su grede spojene sa stropnim pločama što bitno povećava aksijalnu krutost greda pa se i doprinosi uzdužnih sila mogu zanemariti, što znači da će iščeznuti sve desne strane za šest jednadžbi u kojima se pojavljuju perkobrojne veličine simetričnih stanja. U tom slučaju treba samo riješiti tri jednadžbe s nepoznanicama 2,5,8.

7) Višekatni okviri s konstantnim omjerom krutosti stupova



Okviri koji imaju različite stupove, ali je omjer umnožaka EI za sve katove konstantan rješavati će se s analognim osnovnim stanjima kao simetrični okviri.

Pri proračunu za sile paralelne s gredama uvesti će se u prekide sile koje ovise o omjeru umnožaka EI. Uz zanemarivanje doprinosa uzdužnih sila u gredama i poprečnih sila u stupovima, poništavati će se i ovdje svi apsolutni članovi za simetrična osnovna stanja.

HWPK-85-325

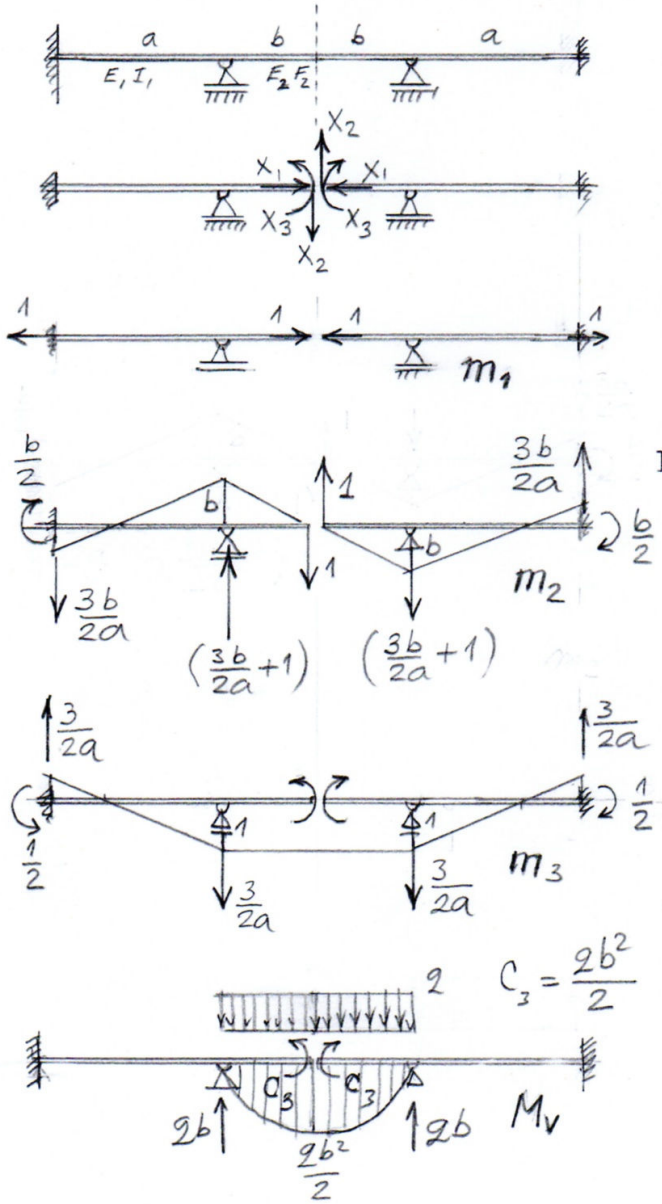
Metoda sila na preodredjenom sistemu

Metoda sila se može formulirati i na preodredjenom sistemu. Promatra se preodredjeni sistem kojemu je stupanj preodredjenosti "n". Uvodjenjem prekida omogućiti će se "m" relativnih stupnjeva slobode, pri čemu će "m" biti manje od "n". Dobiven je preodredjeni sistem čiji je stupanj preodredjenosti (n-m) i pomoću kojeg se zadani preodredjeni sistem može rješavati metodom sila na uobičajeni način. Taj sistem će se nazivati "reducirani sistem" jer je naziv "preodredjeni osnovni" kontradiktoran.

Prednost rješavanja pomoću reduciranog sistema je u manjem broju prekobrojnih veličina, čemu se suprotstavlja potreba zasebnog rješavanja preodredjenog reduciranog sistema za vanjsko opterećenje kao i za svako jedninično ili grupno djelovanje.

Metoda sila na preodredjenom t.j. reduciranom sistemu može biti povoljna zbog veće preglednosti, svakako je efikasnija ako su rješenja reduciranog sistema tabelirana ili jednostavna, a trebalo bi ju svakako primijeniti ako se reducirani sistem sastoji od niza jednakih podsistema.

HNPK-85-326



Kao primjer je odabran kontinuirani nosač s tri polja, kojemu su sva svojstva simetrična. Krajevi su upeti, stupanj preodredjenosti je 5. Presjekom u simetrali prelazi u 2 puta preodredjeni reducirani sistem, koji se sastoji od dvije nezavisne jednostrano upete grede s konzolama.

Jedinična stanja su prikazana sa po jednom skicom na kojoj su sile u spojevima i dijagram momenata savijanja.

Rješavanje reduciranog sistema svodi se na rješenje jednostrano upete grede opterećene momentom na presjeku uz zglob

$$a_{11} = \frac{2a}{E_1 F_1} + \frac{2b}{E_2 F_2}$$

$$a_{22} = \frac{ab^2}{2E_1 I_1} + \frac{2b^3}{3E_2 I_2} + \frac{9\alpha_1 b^2}{2aG_1 F_1} + \frac{2\alpha_2 b}{G_2 F_2}$$

$$a_{33} = \frac{a}{2E_1 I_1} + \frac{2b}{E_2 I_2} + \frac{9\alpha_1}{2aG_1 F_1}$$

$$a_{12} = 0; \quad a_{13} = 0; \quad a_{23} = 0$$

Za simetrično opterećenje prikazano na skici (pridružen mu je konstantni dio preodredjenog momenta označen s C_3) apsolutni član glasi:

$$a_{3v} = \frac{2 \cdot q \cdot b^3}{3 E_2 I_2} \; ; \qquad a_{1v} = 0 \; ; \qquad a_{2v} = 0$$

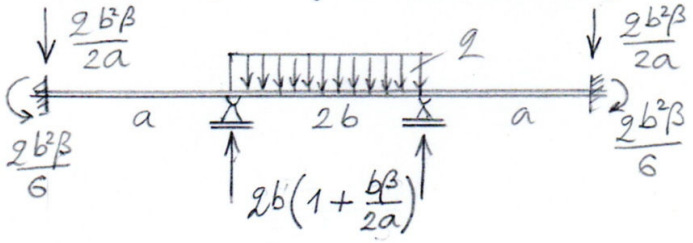
Opći izraz za rješenje će se postaviti uz zanemarivanje doprinosa poprečnih sila deformacijama:

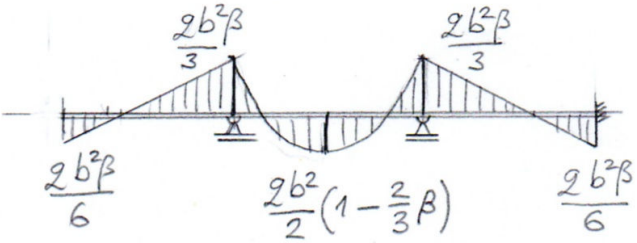
$$X_1 = 0 \; ; \qquad X_2 = 0 \; ; \qquad X_3 = \frac{-2 q b^3}{3 E_2 I_2 \left(\frac{a}{2 E_1 I_1} + \frac{2b}{E_2 I_2} \right)} = -\frac{q b^2}{3} \beta$$

$$K_a = \frac{E_1 I_1}{a} \; ; \qquad K_b = \frac{E_2 I_2}{b} \; ; \qquad \beta = \frac{1}{1 + \frac{K_b}{4 K_a}}$$

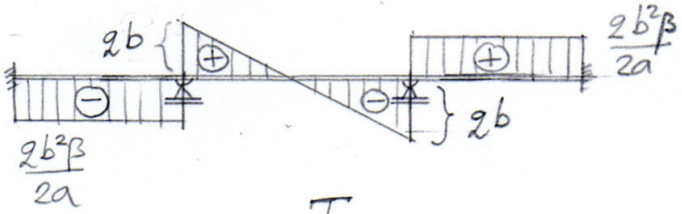
Prekobrojni moment je izražen kao produkt momenta upetosti obostrano upete grede i bezdimenzionalnog faktora β koji je funkcija omjera krutosti prvog polja i polovine srednjeg polja. Povećavanjem krutosti vanjskih polja stanje srednjeg polja se približava stanju upete grede, a smanjivanjem krutosti vanjskih polja stanje srednjeg polja se približava stanju proste grede koje je uz pomoć konstantnog momenta postignuto na osnovnom sistemu. Na donjim skicama su prikazani dijagrami konačnog stanja.

HWPK-85-327

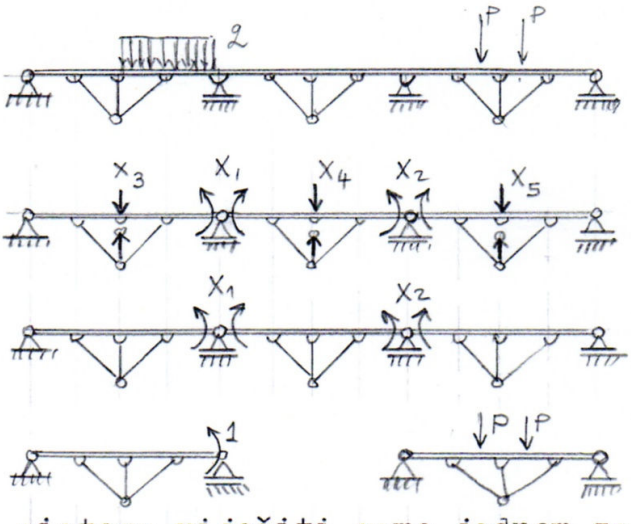




M



T



Kao drugi primjer odabran je ojačan kontinuirani nosač kojemu su sva polja jednaka i simetrična. Stupanj preodredjenosti je 5.

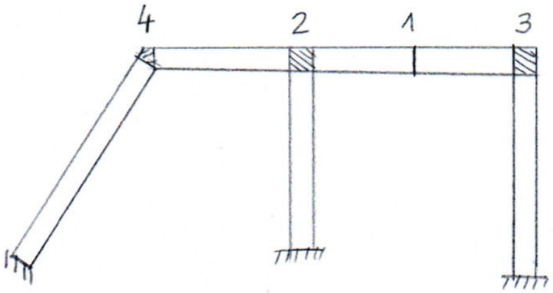
Kao reducirani sistem odabran je niz ojačanih greda na kojima treba odrediti dvije prekobrojne veličine.

Zbog simetrije i ponavljanja treba preodredjeno polje reduciranog sistema riješiti samo jednom za jedninično djelovanje, ali će ga se rješavati više puta za razne tipove opterećenja.

Metoda pomaka

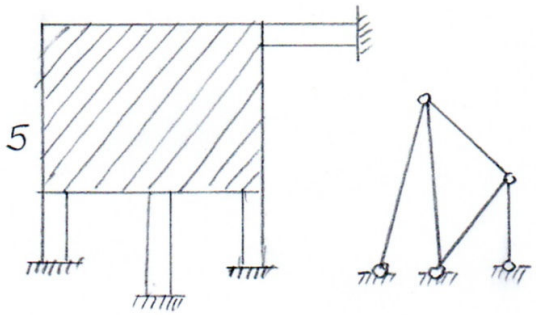
Metoda pomaka se zasniva na opisivanju mehaničkog stanja štapnog sistema pomoću pomaka i zaokreta pogodno odabranih nedeformabilnih elemenata koji se uvode u štapni sistem. Pomaci i zaokreti se odredjuju iz uvjeta ravnoteže odabranih elemenata.

Nedeformabilni elementi



U štapnu statiku je uvedena pretpostavka da točke koje leže na poprečnim presjecima nedeformiranog sistema i nakon deformacije ostaju na istoj ravnini.

Pojedini poprečni presjeci mogu se odabrati kao nedeformalbilni elementi u metodi pomaka (na skici 1).

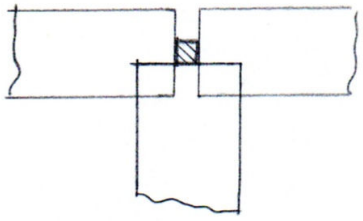


Kao nedeformabilni elementi se često uvode mjesta grananja osi (na skici:2) i mjesta loma osi (skica: 3 i 4).

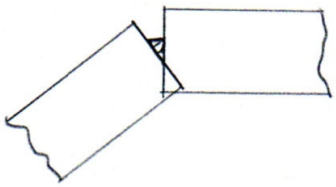
Tako odabrani nedeformabilni elementi pretstavljaju područja na kojima se ne može jednoznačno odrediti os sistema, pa ih odredjuju poprečni presjeci elemenata s kojima graniče.

Nedeformabilni element može biti i dio konstrukcije koji nije štapni (na skici: 5).
Kao nedeformabilni element uvodi se i čvorni element zglobnog čvora.

Kruti čvorovi



Izrazi metode pomaka su složeniji ako su nedeformabilni elementi konačni, pa se uvode zamišljeni,neizmjerno mali nedeformabilni elementi koji se nazivaju "kruti čvorovi" ili samo: "čvorovi". Treba uočiti razliku prema zglobnim čvorovima koji se pojavljuju u rešetkastim dijelovima spojenih sistema.



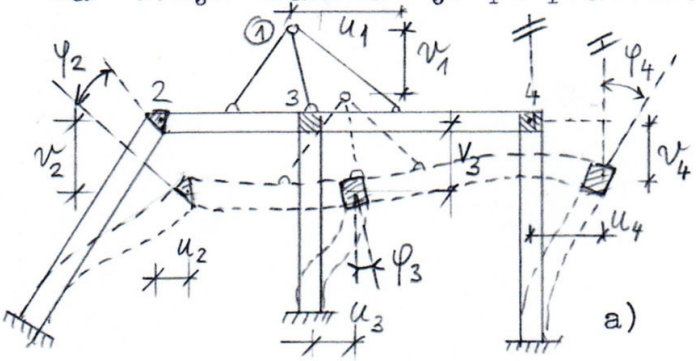
Taj pristup je aproksimativan jer sadrži kontradikciju: isti dio područja loma ili grananja pridružuje se svakom od štapnih elemenata koji se sastaju.

Pogreška uvedena tom aproksimacijom se smanjuje s povećanjem vitkosti štapa t.j. omjera duljine i visine štapa.

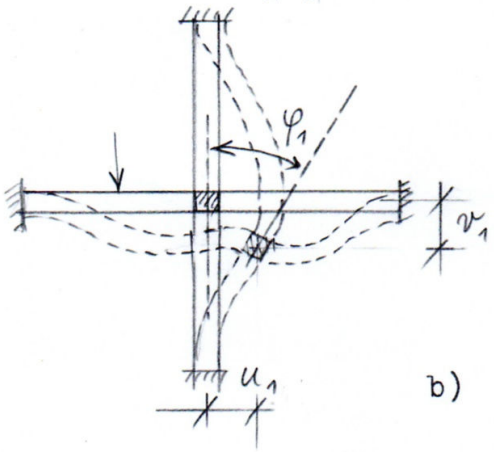
HWPK- 85- 328

Ukupni broj kinematskih parametara

Metoda pomaka će se prikazati na primjerima ravnih štapnih sistema, a ona se može formulirati i za opći slučaj štapnog sistema. Položaj svakog nedeformabilnog elementa odredjen je u ravnini s tri kinematska parametra, koji se u pravilu interpretiraju kao dvije translacije po pravcima i jedna rotacija. Pri tome treba odabrati točku oko koje će element rotirati.



a)



b)

Izborom nedeformabilnih elemenata odredjen je ukupni broj kinematskih parametara koji odredjuju mehaničko stanje sistema. Taj će se broj označiti s "p".

Broj kinematskih parametara nije konstanta sistema kao što je to stupanj preodredjenosti.

Osnovna stanja metode pomaka se rješavaju metodom sila, pa postoji neki "prirodni" broj kinematskih parametara uz koje se osnovna stanja mogu pregledno formulirati.

Umjesto "ukupni broj kinematskih" parametara može se reći i:"ukupni broj nepoznanica po metodi pomaka" ili samo "broj nepoznanica.

Primjer na skici a) ima 11 kinematskih parametara, pa se za opće rješenje prema metodi pomaka mora postaviti i riješiti sistem od 11 linearnih algebarskih jednadžbi. Stupanj preodredjenosti je 7, pa će za taj slučaj rješenje po metodi sila biti povoljnije.

Zanemarivanje doprinosa uzdužnih sila deformacijama vodi u nekim slučajevima na bitno manji broj kinematskih parametara: taj specijalni slučaj metode pomaka će se zasbno prikazati.
Na primjere prikazane na ovoj stranici ne može se primijeniti taj specijalni slučaj metode pomaka.

Opće rješenje po metodi pomaka nože se za primjer prikazan na skici b) postaviti s tri kinematska parametra, dok supanj preodredjenosti iznosi 9. U tom je slučaju očita prednost metode pomaka.

Sistemi koji sadrže konačne dijelove na koje je priključeno više štapova rješavaju se samo po metodi pomaka.

HWPK - 85 - 329

Prikazivanje mehaničkog stanja štapnog sistema

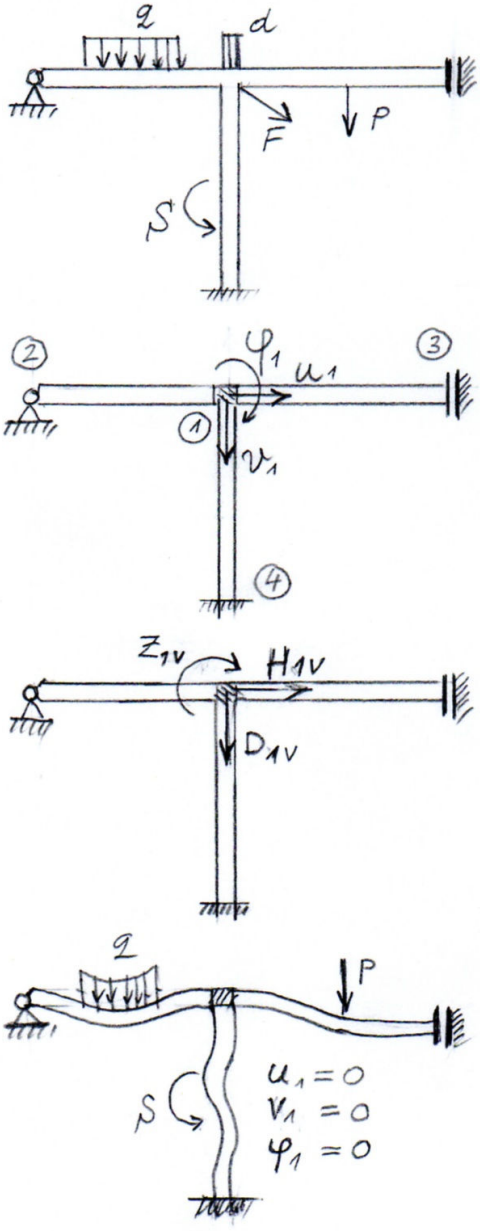
Mehaničko stanje zadanog štapnog sistema može se opisati pomoću opterećenja i zasada nepoznatih kinematskih parametara koji odredjuju položaje odabranih nedeformabilnih elemenata. Opći izraz za bilo koju mehaničku veličinu će glasiti:

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 u_1 + \phi_2 v_1 + \phi_3 \varphi_1 + \phi_4 u_2 + \ldots$$

Pri tome je kontinuitet sistema postignut prethodnim rješavanjem pomoću metode sila. U većini praktičnih slučajeva mogu se za prethodna rješenja postaviti jednostavni izrazi.

U daljnjem postupku se postavljaju uvjeti ravnoteže za nedeformabilne elemente i iz njih odredjuju kinematski parametri. Direktno postavljanje tih uvjeta u općem obliku bi bilo nepregledno, pa će se konačno stanje prikazati kao linearna kombinacija pogodnih parcijalnih stanja zadanog štapnog sistema, a to su: stanje pune upetosti i stanja zasebnih pomaka i zaokreta. Pogodno je da se i opterećenje rastavi na dva dijela: direktno opterećenje na odabrane nedeformabilne elemente i opterećenje štapnih elemenata.

HWPK-85-330

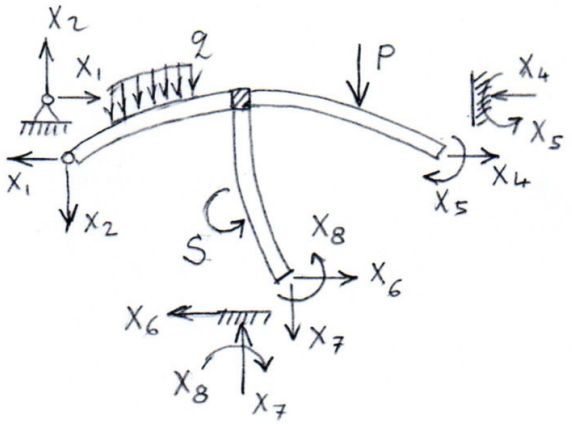


Za opis stanja sistema koja se koriste u metodi pomaka promatrati će se jednostavan primjer štapnog sistema s jednim grananjem i tri štapna elementa.

Područje grananja je odabrano kao nedeformabilni element (šrafirano). Odabrano je i "središte elementa" t.j. točka pomoću koje se odredjuje položaj elementa. Uvedene su dvije translacije središta: u_1 i v_1, te φ_1 rotacija oko središta. Ucrtane su strijelice pomoću kojih će se u tehničkoj notaciji prikazati vektori pomaka i zaokreta elementa. Nedeformabilni elementi se označavaju rednim brojevima (ovdje samo 1). U nastavku niza se numeriraju spojevi s podlogom (ovdje: 2,3,4)

Opterećenja na nedeformabilne elemente se zamjenjuju rezultirajućim djelovanjima, koje obično odgovara izboru strijelica za prikazivanje pomaka i zaokreta. Odgovarajuće osi projekcija će se iskoristiti za postavljanje uvjeta ravnoteže.

Uvodi se stanje pune upetosti kod kojeg su nedeformabilni elementi u početnom položaju, a na štapne elemente djeluje opterećenje.

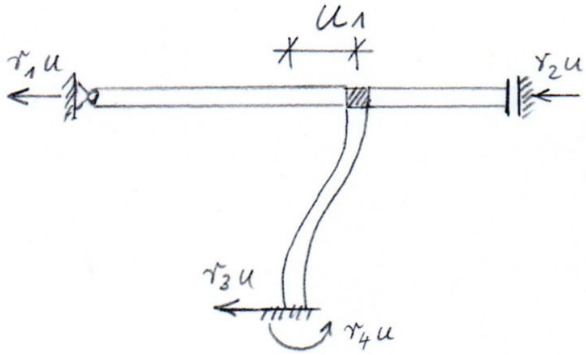


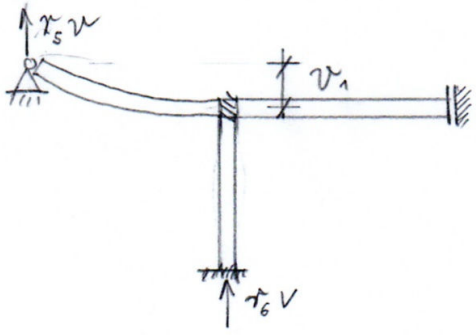
Stanje upetosti je preodredjeno i treba ga riješiti po metodi sila. Na skici je simbolički prikazano rješavanje uvodjenjem osnovnog sistema i prekobrojnih djelovanja.

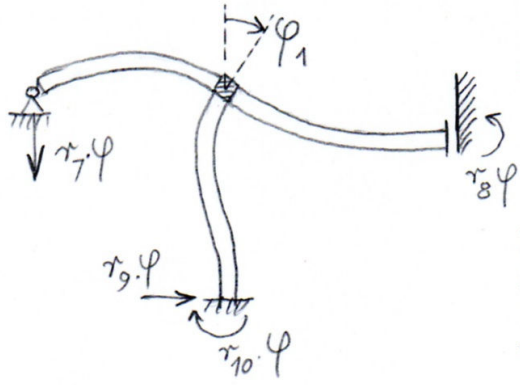
Zbog nepomičnosti grananja svaki štapni element se može riješiti zasebno, pa se rješenje po metodi di sila sadrži rješavanje niza manjih sistema linearnih jednadžbi. Kod ravnog sistema se pojavljuju najviše tri jednadžbe, a u prostoru najviše šest jednadžbi.

Vidljivo je da se na taj način rješavaju upete grede, jednostrano upete grede i slični zadaci koji su već obradjeni u metodi sila. Za mnoge slučajeve postoje i tabele.

Uvode se još i stanja zasebnih pomaka i zaokreta. Zasebno se promatra toliko stanja koliko ima kinematskih parametara. U ta stanja se ne uvode opterećenja, samo jedan kinematski parametar je različit od nule, a svi ostali iščezavaju. Znači da su svi nedeformabilni elementi, osim jednoga u početnom položaju, a preostali element je samo translatiran po jednom od odabranih pravaca ili samo zarotiran.







Odabrani primjer ima samo jedan nedeformabilni element, čiji položaj u ravnini odredjuju tri kinematska parametra, pa će se ovdje pojaviti tri stanja zasebnih pomaka i zaokreta.

Na skicama su prikazana stanja:
u_1 različit od nule, a $v_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$
v_1 različit od nule, a $u_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$
φ_1 različit od nule, a $u_1 = 0$, $v_1 = 0$.

Sva prikazana stanja su preodredjena i treba ih riješiti po metodi sila. Opće napomene date uz stanje upetosti vrijede i ovdje.

Pomaci i zaokreti u_1, v_1, φ_1 su zasada nepoznati, pa će se u njima pojavljivati opći brojevi.
U stanju za koje vrijedi $u_1 \neq 0$, biti će sve mehaničke veličine funkcije od u_1. Zbog linearnosti veze sila i pomaka, biti će sve veličine linearne funkcije od u_1. Treba uočiti da se to odnosi na sve

HWPK- 85-331

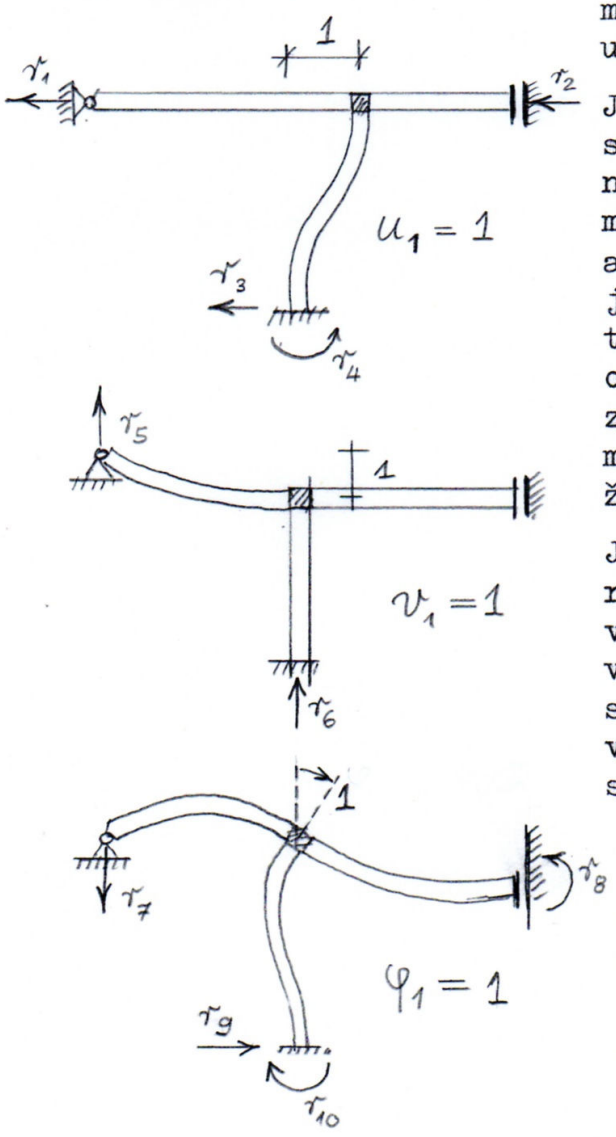
veličine: sile u spojevima,rezne sile M,T,N i pomake. Na skici su ucrtane samo sile u spojevima, a koeficijenti koji povezuju te sile i kinematski parametar u_1 označeni su sa r_i. Kasnije će se uvesti sistematično označavanje tih veličina.

Analogno vrijedi i za dva preostala stanja. Ako je samo $v_1 \neq 0$, onda će sve mehaničke veličine biti proporcionalne s v_1. Ako je samo $\varphi_1 \neq 0$ onda će sve mehaničke veličine biti proporcionalne s φ_1.

Superpozicijom uvedenih stanja dobiva se traženo stanje zadanog sistema, ali opisano pomoću zasada nepoznatih kinematskih parametara. Postaviti će se uvjeti ravnoteže za nedeformabilne elemente. Na nedeformabilne elemente djeluje direktno opterećenje, a u presjecima prema štapnim elementima djeluju rezne sile koje su funkcije opterećenja štapnih elemenata i kinematskih parametara. Uvjeti ravnoteže vode na sistem linearnih algebarskih jednadžbi u kojemu su nepoznanice kinematski parametri.

Za praktičnu provedbu postupka nije pogodno da se na dijagramima pojavljuju opći brojevi, pa se uvode jedinična stanja.

HWPK-85-332



Jedinična stanja metode pomaka su stanja štapnog sistema u koja se ne uvode opterećenja, jedan kinematski parametar ima veličinu 1, a svi ostali iščezavaju. Znači da je jedan nedeformabilni element translatiran za jedinicu po jednom od odabranih pravaca ili zarotiran za kut jedan, a svi ostali nedeformirani elementi su u početnom položaju.

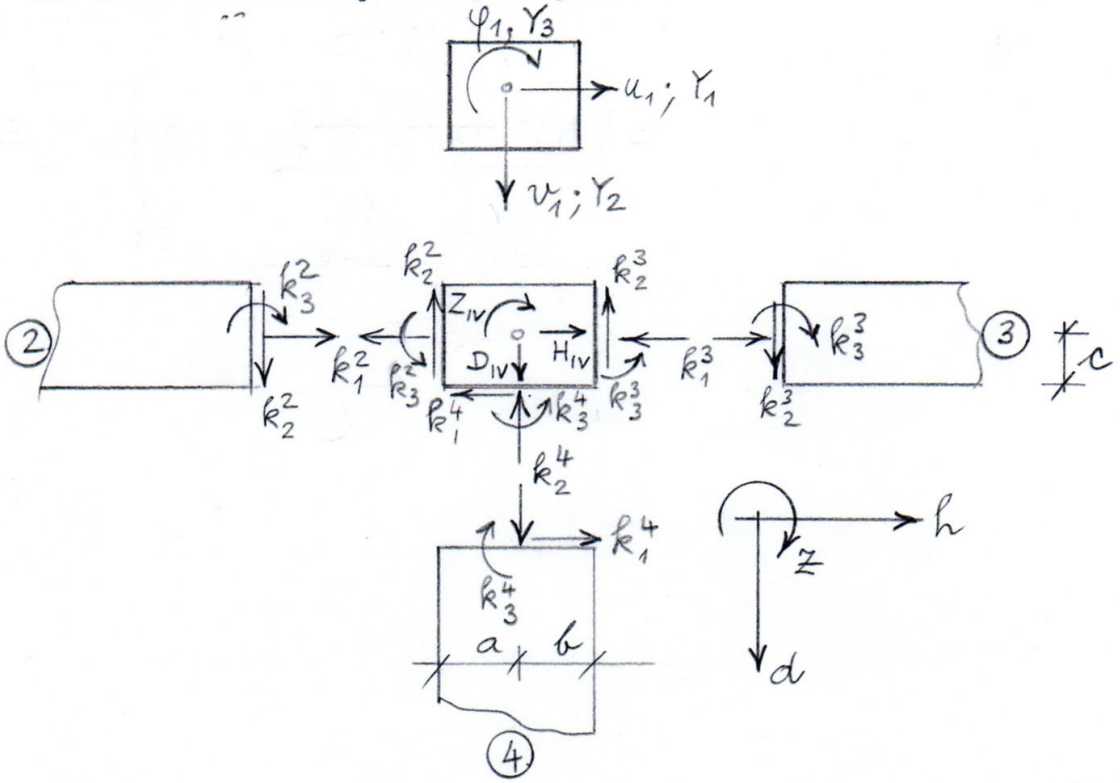
Jedinično stanje se može konkretno riješiti po metodi sila. Dobivene veličine mehaničkog stanja su upravo koeficijenti koji su u zasebnim stanjima pomaka i zaokreta povezivali pojedini kinematski parametar s pripadnom veličinom.

Npr: u stanju zasebnog pomaka u_1 jedna od sila u spojevima je bila $r_1 \cdot u_1$, a u odgovarajućem jediničnom stanju će ta sila u spoju biti upravo r_1.

Vrlo je važno da se u postupku istakne o kojem jediničnom stanju se radi. Dijagrami reznih sila će se označavati s malim slovima i indeksom koji odredjuje pripadni

Uvjeti ravnoteže nedeformabilnih elemenata

Promatraju se nedeformabilni elementi i sve sile koje na njih djeluju: rezultirajuće djelovanje direktnog opterećenja i rezne sile u zamišljenim presjecima.



HWPK-85-333

Oznake kinematskih parametara s u_i, v_i, φ_i su pogodne za prepoznavanje značenja, ali nisu pogodne za sistematsko postavljanje uvjeta ravnoteže. Zbog toga će se svi kinematski parametri označiti jedinstveno sa Y_i; od Y_1 do Y_p pri čemu je "p" broj kinematskih parametara.

Uvjeti ravnoteže će se postaviti u osnovnoj formulaciji: dvije sume projekcija sila i jedna suma momenata na točku. Osi projekcija će se odabrati prema već odabranim pravcima i smjerovima za pomake i sile koje djeluju na nedeformabilne elemente i označiti s h i d. Točka redukcije je središte elementa označeno s C. Kao pozitivni smisao vrtnje momenata koji djeluju na nedeformabilni element odabran je smisao vrtnje kazaljke na satu.
Radi postavljanja uvjeta ravnoteže pogodno je uvesti konvenciju predznaka reznih sila koja je različita od one koja se koristi za crtanje dijagrama. Ta se konvencija koristi samo za postavljanje uvjeta ravnoteže, a za crtanje dijagrama će se i u metodi pomaka koristiti standardna konvencija.

Kao pozitivna djelovanja u smislu uvedenog sustava h,d i smisla vrtnje, odabiru se djelovanja na krajeve štapova. Na sam element djeluju suprotna, dakle djelovanja čiji će doprinos uvjetima ravnoteže u općem obliku imati negativan predznak.

Djelovanja u presjecima izmedju elementa i štapova označiti će

se jedinstveno sa k_i^s, pri čemu indeks "i" označava pravac i smjer ili smisao djelovanja prema numeraciji kinematskih parametara Y_i, a superskript "s" označava redni broj nedeformabilnog elementa ili spoja na drugom kraju promatranog štapa.
Iz uvjeta iščezavanja sume projekcija na os "h" svih sila koje djeluju na nedeformabilni element dobiva se:

$$-k_1^2 - k_1^3 - k_1^4 + H_{1V} = 0$$

Iz uvjeta iščezavanja sume projekcija na os "d" svih sila koje djeluju na nedeformabilni element dobiva se:

$$-k_2^2 - k_2^3 - k_2^4 + D_{1V} = 0$$

Iz uvjeta iščezavanja sume momenata na središte elementa svih sila i koncentriranih momenata koji djeluju na nedeformabilni element dobiva se:

$$c \cdot k_1^4 + a \cdot k_2^2 - b \cdot k_2^3 - k_3^2 - k_3^3 - k_3^4 + Z_{1V} = 0$$

Svako djelovanje u presjecima izmedju elementa i štapova je funkcija opterećenja na štapove i funkcija kinematskih parametara. Općenito se može napisati:

$$k_i^s = k_{i0} + k_{i1} \cdot u_1 + k_{i2} \cdot v_1 + k_{i3} \cdot \varphi_3$$

Ista jednadžba se može napisati i s jedinstvenim oznakama kinematskih parametara:

$$k_i^s = k_{i0}^s + k_{i1}^s \cdot Y_1 + k_{i2}^s \cdot Y_2 + k_{i3}^s \cdot Y_3$$

pri tome je k_{i0}^s doprinos stanja pune upetosti t.j. doprinos opterećenja na štapne elemente, a k_{ij}^s je doprinos od jediničnog stanja za kinematski parametar Y_j, ili kako se kraće kaže: doprinos od $Y_j = 1$.
Uvrštavanjem veze reznih sila k^s_i s opterećenjem i kinematskim parametrima u uvjete ravnoteže dobiva se:

$$-(k_{10}^2 + k_{11}^2 u_1 + k_{12}^2 v_1 + k_{13}^2 \varphi_1) - (k_{10}^3 + k_{11}^3 u_1 + k_{12}^3 v_1 + k_{13}^3 \varphi_1)$$
$$-(k_{10}^4 + k_{11}^4 u_1 + k_{12}^4 v_1 + k_{13}^4 \varphi_1) + H_{1V}$$ i analogno za preostale dvije jednadžbe. Sredjivanjem po kinematskim parametrima, odbijanjem doprinosa opterećenja od lijeve i desne strane, kao i primjenom predznaka dobiva se za sva tri uvjeta:

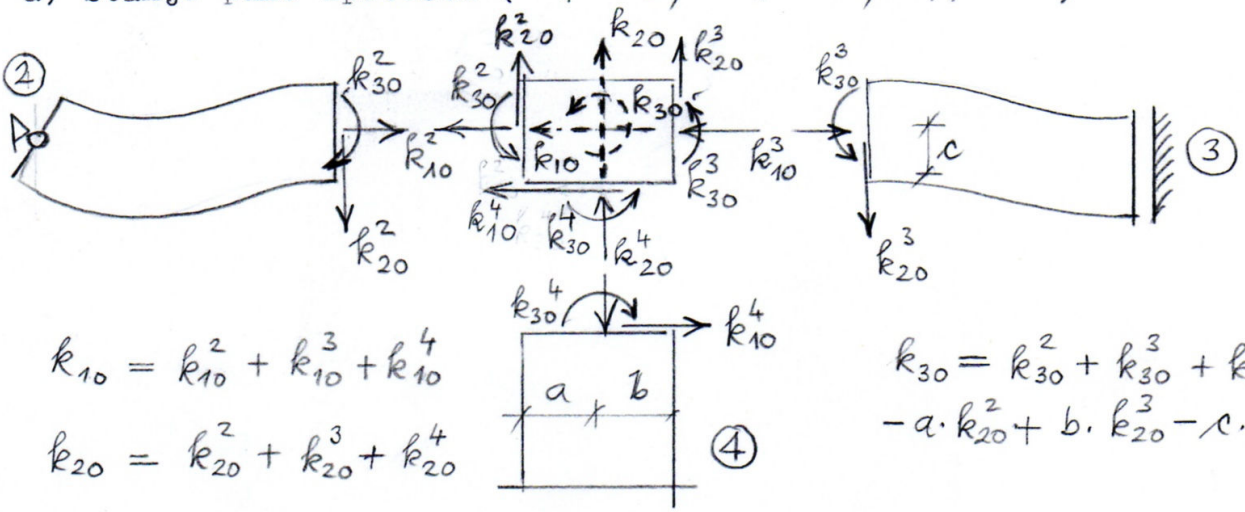
$$k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot v_1 + k_{13} \cdot \varphi_1 = H_{1V} - k_{10}$$
$$k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot v_2 + k_{23} \cdot \varphi_1 = D_{1V} - k_{20}$$
$$k_{31} \cdot u_1 + k_{32} \cdot v_2 + k_{33} \cdot \varphi_1 = Z_{1V} - k_{30}$$

pri tome k_{ij} pretstavljaju ukupna djelovanja štapova na nedeformabilni element i to reducirana na središte elementa.

HWPK-85-334

Radi boljeg uočavanja fizikalnog smisla pojedinih članova prikazati će se na skicama sva stanja sistema.

a) Stanje pune upetosti ($u_1 = 0,\ v_1 = 0,\ \varphi_1 = 0$)



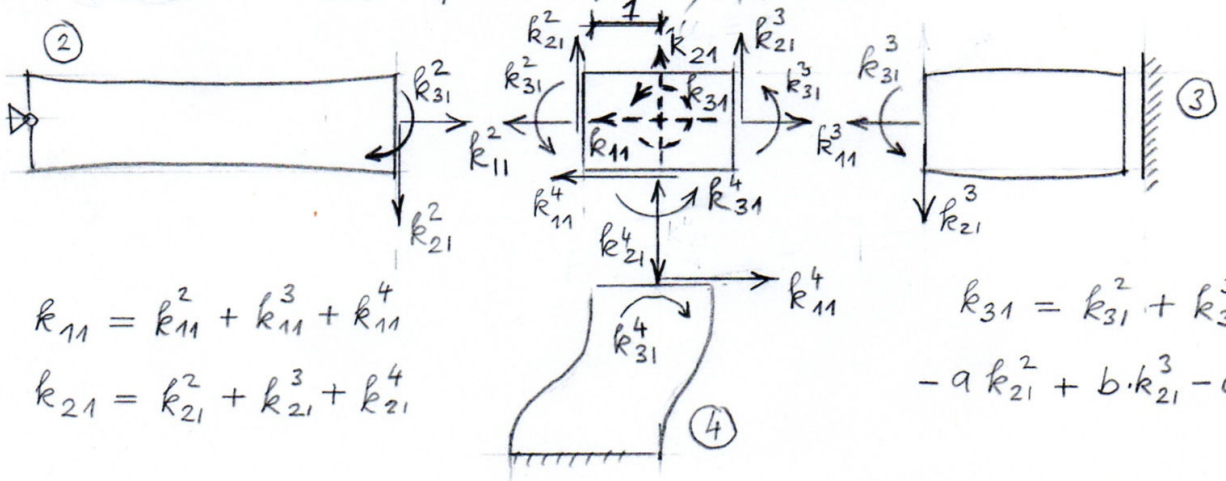
$$k_{10} = k_{10}^2 + k_{10}^3 + k_{10}^4$$

$$k_{20} = k_{20}^2 + k_{20}^3 + k_{20}^4$$

$$k_{30} = k_{30}^2 + k_{30}^3 + k_{30}^4 - a \cdot k_{20}^2 + b \cdot k_{20}^3 - c \cdot k_{10}^4$$

Na nedeformabilnom elementu je isprekidanim linijama prikazano rezultirajuće djelovanje za sve rezne sile koje djeluju na element.

b) Jedinično stanje $u_1 = 1$ ($v_1 = 0,\ \varphi_1 = 0$)

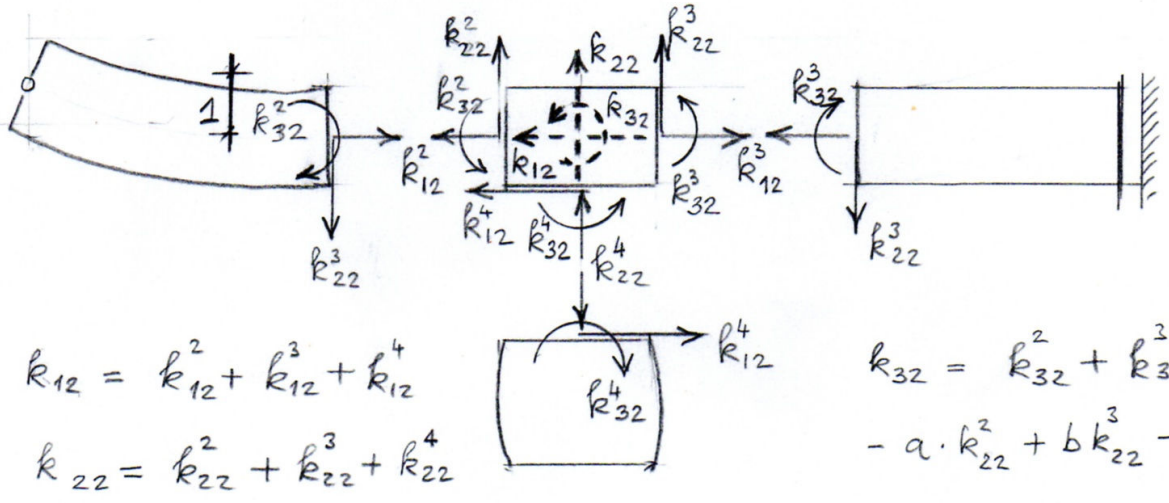


$$k_{11} = k_{11}^2 + k_{11}^3 + k_{11}^4$$

$$k_{21} = k_{21}^2 + k_{21}^3 + k_{21}^4$$

$$k_{31} = k_{31}^2 + k_{31}^3 + k_{31}^4 - a\, k_{21}^2 + b \cdot k_{21}^3 - c\, k_{11}^4$$

c) Jedinično stanje $v_1 = 1$ ($u_1 = 0,\ \varphi_1 = 0$)



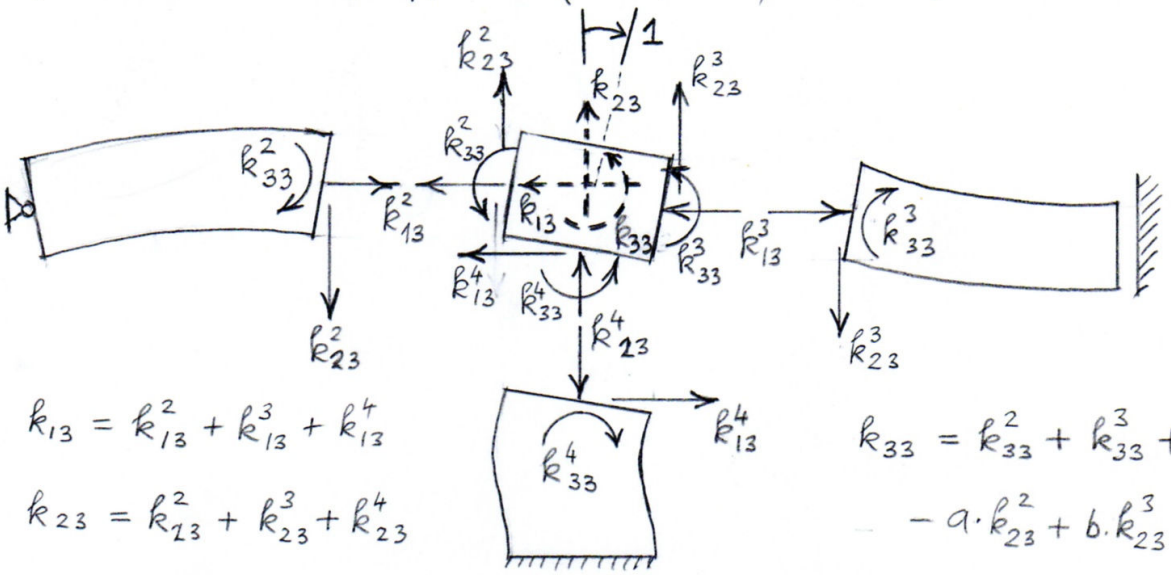
$$k_{12} = k_{12}^2 + k_{12}^3 + k_{12}^4$$

$$k_{22} = k_{22}^2 + k_{22}^3 + k_{22}^4$$

$$k_{32} = k_{32}^2 + k_{32}^3 + k_{32}^4 - a \cdot k_{22}^2 + b\, k_{22}^3 - c\, k_{12}^4$$

HWPK-85-335

d) Jedinično stanje $\varphi_1 = 1 \quad (u_1 = 0,\ v_1 = 0)$



Na taj način su dobivena rezultirajuća djelovanja na nedeformabilni element od reznih sila u svim štapovima za svako parcijalno stanje zasebno, pa se jednostavno mogu postaviti uvjeti ravnoteže; u njima će se pojaviti samo djelovanja koja su na skicama prikazana isprekidanim strijelicama, a osim toga i direktno opterećenje nedeformabilnog elementa.

HWPK-85-336

Uvjet iščezavanja projekcija svih sila na os "h" glasi:

$$-k_{11} u_1 - k_{12} v_1 - k_{13} \cdot \varphi_1 - k_{10} + H_{1V} = 0$$

Uvjet iščezavanja projekcija svih sila na os "d" glasi:

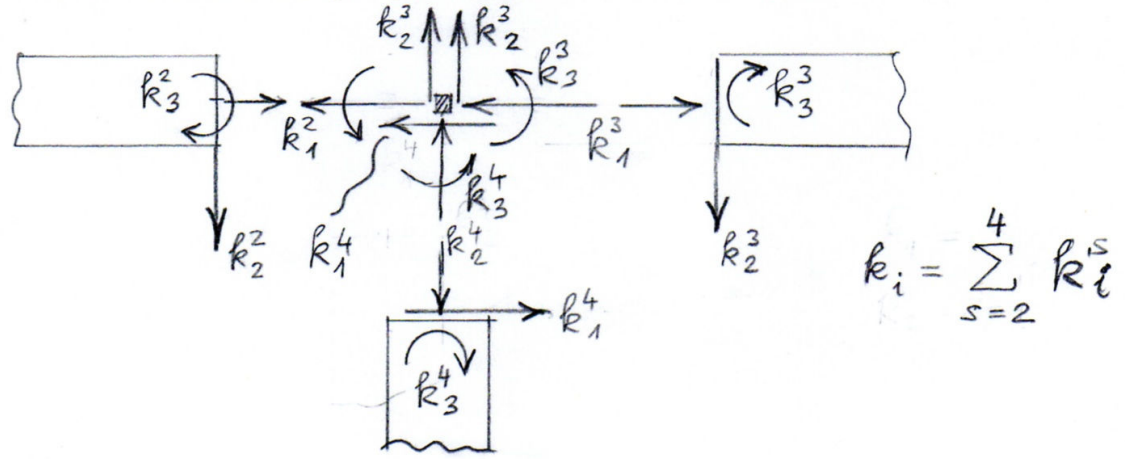
$$-k_{21} u_1 - k_{22} v_1 - k_{23} \varphi_1 - k_{20} + D_{1V} = 0$$

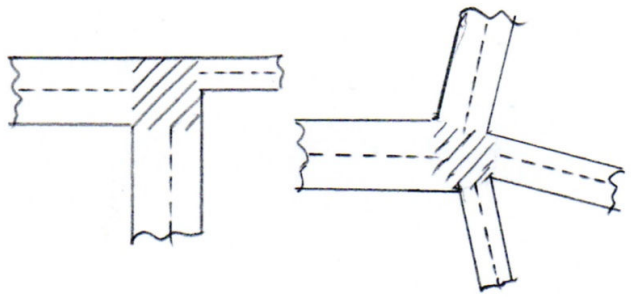
Uvjet iščezavanja svih momenata na "središte" elementa glasi:

$$-k_{31} u_1 - k_{32} v_1 - k_{33} \varphi_1 - k_{30} + Z_{1V} = 0$$

Dobiven je sistem jednadžbi koji se lako prevodi u oblik prikazan na str. 344. dolje.

Ukoliko se na mjestu grananja uvede čvor t.j. neizmjerno mali nedeformabilni element pojednostavniti će se izrazi za momete koji djeluju na čvor: krakovi poprečnih i uzdužnih sila iščezavaju, pa se rezultirajući moment djelovanja štapova na čvor dobiva samo zbrajanjem pojedinih momenata.





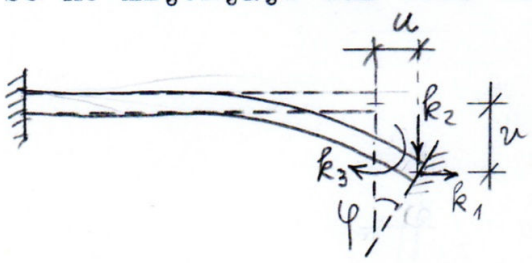
U ovom se prikazu ne će razmatrati složeniji slučajevi: ekscentrični i kosi spojevi štapova. Rješavanje takovih primjera je dakako moguće pomoću metode pomaka.

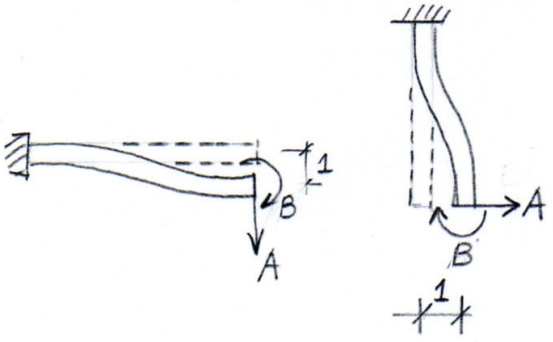
Bez dokaza će se uvesti da su sistemi jednadžbi metode pomaka simetrični, dakle vrijedi:

$$k_{ij} = k_{ji}$$

Jedinična stanja štapova

Pokazano je da se jedinična stanja metode pomaka postavljaju rješavanjem pomoću metode sila, te da se pri tome može rješavati svaki štap zasebno. Prema tome se jedinična stanja sistema mogu sastaviti pomoću jediničnih stanja pojedinih štapova. Ovdje će se prikazati samo jedinična stanja prizmatičnih štapova: os im je dio pravca, a karakteristike poprečnog presjeka se ne mijenjaju duž osi. Za jedinična stanja takvih štapova promatraju se pomaci paralelni s osi i okomiti na os. Sile koje djeluju na krajnje presjeke će se rastaviti na komponente duž osi i okomite na os. Iako dobiveni rezultati nisu ovisni o položaju štapa u sistemu koristiti će se prilikom izvoda oznaka "u" za translaciju duž osi, oznaka "v" za translaciju okomito na os i oznaka φ za kut zaokreta. Za sile i moment koji djeluju na štap u zamišljenom presjeku izmedju štapa i nedeformabilnog elementa uvesti će se oznake k_i prikazane na skici. Rezultati izvoda će se prikazati na skici deformiranog štapa. Pri tome će se pomak ili zaokret označiti samo jedinicom, sile i momenti koji djeluju na krajeve štapa ucrtati će se sa stvarnim smjerovima uz koje će stajati izraz za odgovarajuću veličinu. Pri korištenju tih izvoda treba identificirati kinematički parametar u sistemu na koji se jedinično stanje štapa odnosi, a usporedbom stvarnog smjera i pozitivnog odrediti predznak doprinosa.





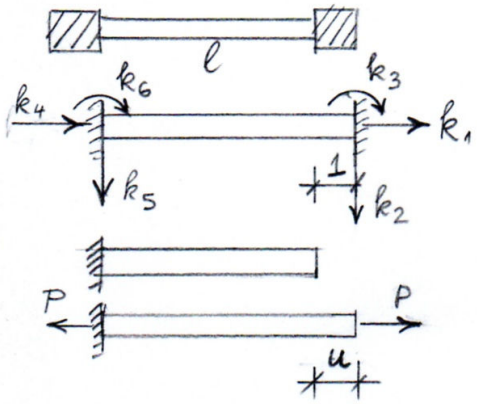
Kao primjer promatrati će se štap na lijevoj skici kojemu je kraj pomaknut za 1 po okomici na os. Pri tome na krajeve štapa djeluje sila odredjena izrazom A i moment odredjen izrazom B.

Za štap koji nije u istom položaju kao uzorni, ali se za njega traži stanje jediničnog pomaka okomitog na os mogu se primijeniti isti izrazi, a smjerove treba odrediti prema načinu deformiranja.

HWPK-85-337

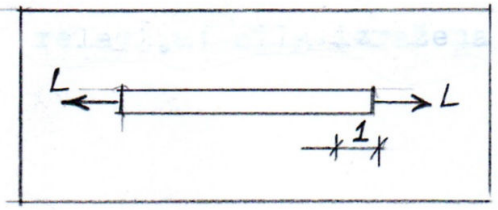
Prilikom izvodjenja koristiti će se rješenja postavljena u prikazu metode sila. Doprinosi poprečnih sila će se zanemariti.

a) Štap kruto spojen na oba nedeformabilna elementa



Odrediti će se sile i momenti koji djeluju izmedju krajeva štapa i nedeformabilnih elemenata pri jediničnom pomaku desnog elementa.

Vidljivo je da se u odgovarajućem stanju deformacije nalazi konzola opterećena na kraju silom duž osi. Poznat je izraz za pomak kraja konzole uz zadanu silu: $u = \frac{P\ell}{EF}$

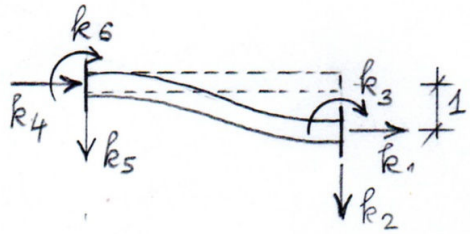


U metodi pomaka je potrebna inverzna relacija: sila izražena pomoću pomaka:

$$P = \frac{EF}{\ell} u = L \cdot u; \quad k_1 = L; \quad k_4 = -L$$

pri tome je uvedena oznaka za aksijalnu krutost štapa: $L = \frac{EF}{\ell}$

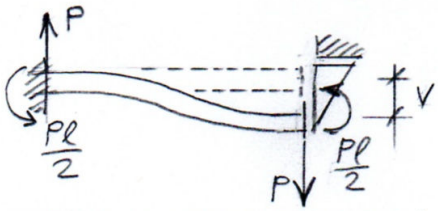
Sila okomito na os i moment su jednaki nuli: $k_2 = k_3 = k_5 = k_6 = 0$.



Odrediti će se djelovanja na krajeve štapa pri jediničnom pomaku okomitom na os.

U odgovarajućem stanju deformacije nalazi se greda na jednom kraju upeta, a na drugom spojena s podlogom momentnim spojem, a opterećena silom okomito na os uz momentni spoj. Poznat je izraz za poprečni pomak krajnjeg presjeka:

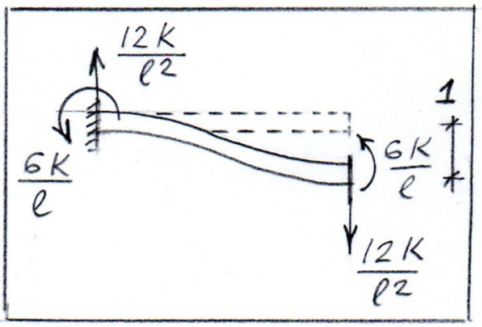
$$v = \frac{P\ell^3}{12EI}$$



Sila će se izraziti pomoću pomaka, a pomoću sile i momenti na krajevima:

$$P = \frac{12EI}{\ell^3} v = \frac{12K}{\ell^2} v; \qquad \frac{P\ell}{2} = \frac{6K}{\ell}$$

Korištena je već ranije uvedena oznaka za fleksionu krutost štapa $K = EI/\ell$

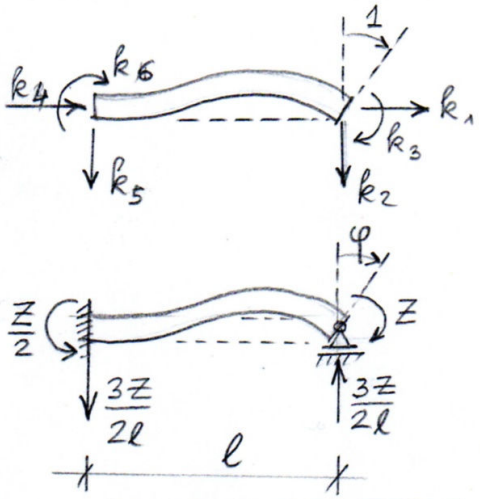


Izrazi za djelovanja na krajeve prema konvenciji metode pomaka će glasiti:

$$k_1 = 0; \quad k_2 = \frac{12K}{\ell^2}; \quad k_3 = -\frac{6K}{\ell}$$

$$k_4 = 0; \quad k_5 = -\frac{12K}{\ell^2}; \quad k_6 = -\frac{6K}{\ell}$$

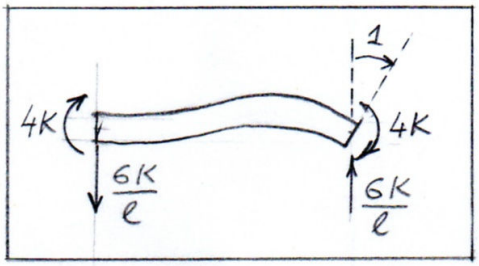
HWPK-85-338



Odrediti će se djelovanja na krajeve štapa pri jediničnom zaokretu desnog kraja.

U odgovarajućem stanju deformacije nalazi se greda upeta na lijevom kraju, spojena s podlogom s pomičnim zglobom na drugom kraju i opterećena koncentriranim momentom uz pomični zglob. Poznat je izraz za zaokret opterećenog presjeka:

$$\varphi = \frac{Z\ell}{4EI} = \frac{Z}{4K}\,; \qquad K = \frac{EI}{\ell}$$



Moment će se izraziti pomoću zaokreta a pomoću momenta odrediti će se veza ostalih djelovanja s zaokretom:

$$Z = 4K\varphi\,; \quad \frac{Z}{2} = 2K\varphi\,; \quad \frac{3Z}{2\ell} = \frac{6K\varphi}{\ell}$$

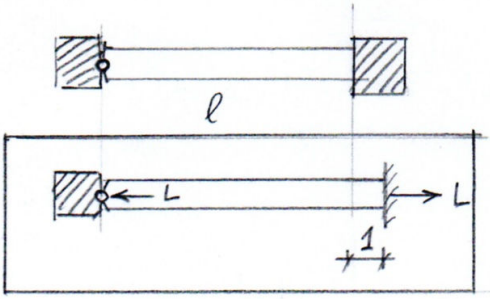
Izrazi za djelovanja na krajeve štapa prema konvenciji metode pomaka će glasiti:

$$k_1 = 0\,; \quad k_2 = -\frac{6K}{\ell}\,; \quad k_3 = 4K\,;$$

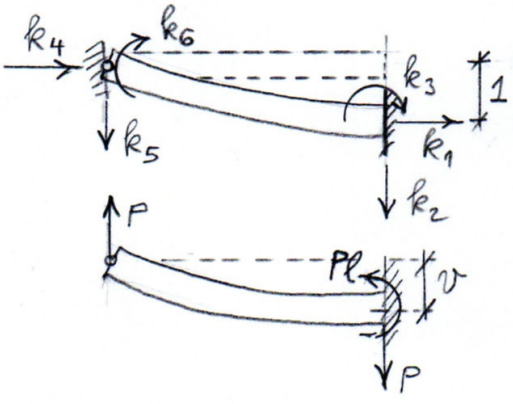
$$k_4 = 0\,; \quad k_5 = \frac{6K}{\ell}\,; \quad k_6 = 2K.$$

HWPK-85-339

b) Štap spojen zglobno za nepomični nedeformabilni element



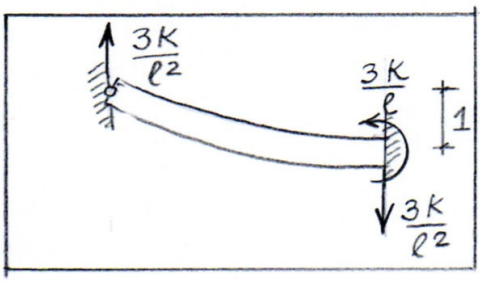
Djelovanja na krajeve pri jediničnom pomaku paralelnom s osi štapa jednaka su onima kod štapa koji je kruto spojen na elemente.



Odrediti će se djelovanja na krajeve štapa pri jediničnom pomaku desnog, kruto spojenog kraja okomito na os.

U odgovarajućem stanju deformacije nalazi se konzola spojena s podlogom na desnom kraju i odgovarajućom silom na slobodnom kraju. Stanje konzole je isto pri spuštanju desnog kraja za takav iznos da hvatište sile miruje i pri podizanju lijevog kraja pod djelovanjem sile. Poznat je izraz za poprečni pomak kraja konzole:

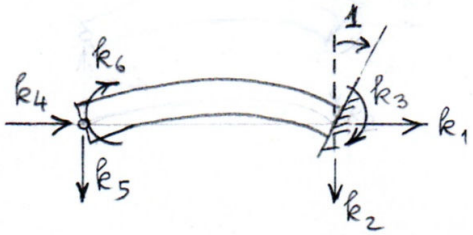
$$V = \frac{P\ell^3}{3EI} = \frac{P\ell^2}{3K}\,; \qquad K = \frac{EI}{\ell}$$



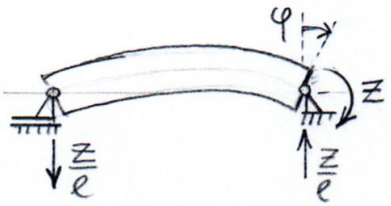
Sila na kraju će se izraziti pomoću pomaka, a pomoću sile i moment na kraju:

$$P = \frac{3K}{\ell^2} v; \qquad P\ell = \frac{3K}{\ell} v$$

Izrazi za djelovanja na krajeve prema konvenciji metode pomaka će glasiti: $k_1 = 0$; $k_2 = \frac{3K}{\ell^2}$; $k_3 = -\frac{3K}{\ell}$; $k_4 = 0$; $k_5 = -\frac{3K}{\ell^2}$; $k_6 = 0$.



Odrediti će se djelovanje na krajeve štapa pri jediničnom zaokretu desnog nedeformabilnog elementa oko težišta krajnjeg presjeka.

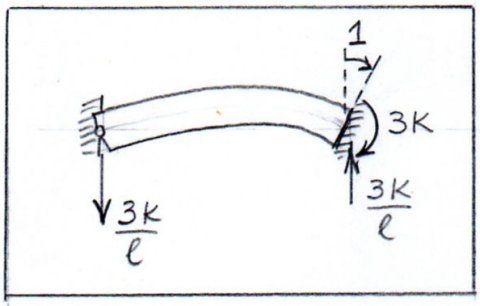


U odgovarajućem stanju deformacije nalazi se prosta greda opterećena koncentriranim momentom na desnom krajnjem presjeku uz zglob.
Poznat je izraz za zaokret presjeka na koji djeluje moment:

$$\varphi = \frac{Z\ell}{3EI} = \frac{Z}{3K}$$

Moment će se izraziti pomoću zaokreta, a uvrštavanjem izraza za moment u izraz za veličine sila u spojevima dobiva se izraz za sile kao funkcije zaokreta:

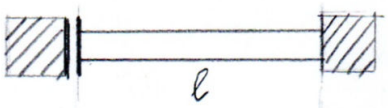
$$Z = 3K \cdot \varphi; \qquad \frac{Z}{\ell} = \frac{3K}{\ell} \cdot \varphi$$

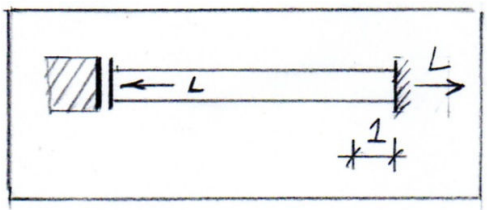


Gornja skica prikazuje rezultat izvoda. Izrazi za djelovanja na krajeve prema konvenciji metode pomaka će glasiti:

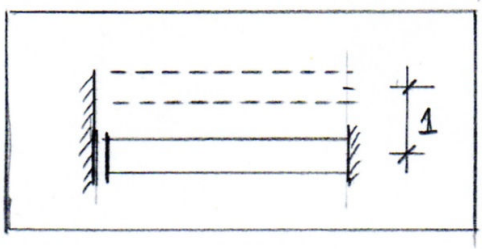
$$k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{3K}{\ell}; \quad k_3 = 3K; \quad k_4 = 0; \quad k_5 = \frac{3K}{\ell}; \quad k_6 = 0.$$

c) Štap spojen kliznim spojem za nepomični nedeformabilni element



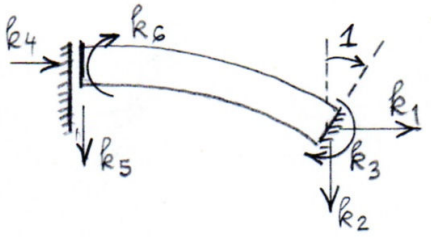


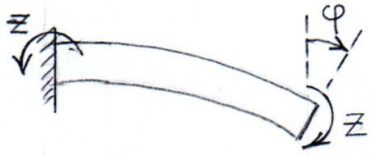
Djelovanja na krajeve pri jediničnom pomaku desnog kraja paralelnom s osi štapa, jednaka su djelovanima na krajeve štapa koji je kruto spojen na elemente.

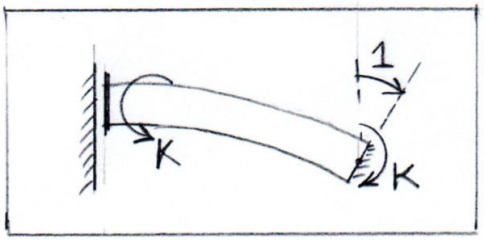


Pri pomaku okomitom na os iščezavaju sva djelovanja na krajeve. Ovaj tip spajanja ne pruža otpor pomicanju okomitom na os.

HWPK-85-340







Odrediti će se djelovanja na krajeve štapa pri jediničnom zaokretu desnog nedeformabilnog elementa oko težišta krajnjeg presjeka. Zbog kliznog spoja mora biti $k_5 = 0$.
U odgovarajućem stanju deformacije nalazi se konzola spojena s podlogom na lijevom kraju i opterećena koncentriranim momentom na desnom kraju.
U ovom slučaju se desni kraj spušta, ali je stanje konzole jednako traženom slučaju u kojemu se lijevi kraj podiže, a desni kraj zaokreće.

Poznat je izraz za zaokret kraja konzole na koji djeluje moment:

$$\varphi = \frac{Z\ell}{EI} = \frac{Z}{K}$$

Moment će se izraziti pomoću zaokreta

$$Z = K \cdot \varphi$$

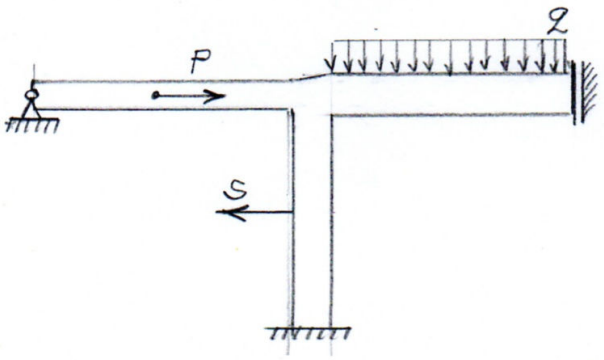
Moment na lijevom kraju je po veličini jednak momentu na desnom.

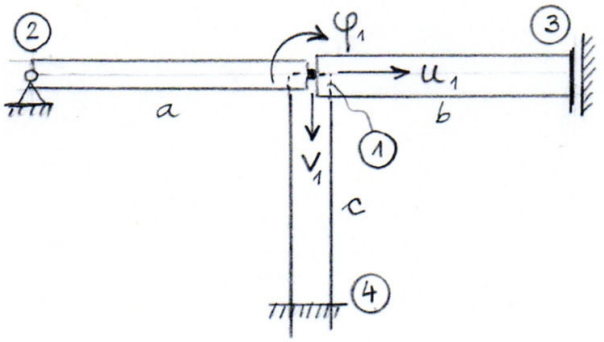
Gornja skica prikazuje rezultat izvoda. Izrazi za djelovanja na krajeve prema konvenciji metode pomaka će glasiti:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = K; \quad k_4 = 0, \quad k_5 = 0, \quad k_6 = -K.$$

HWPK-85-341

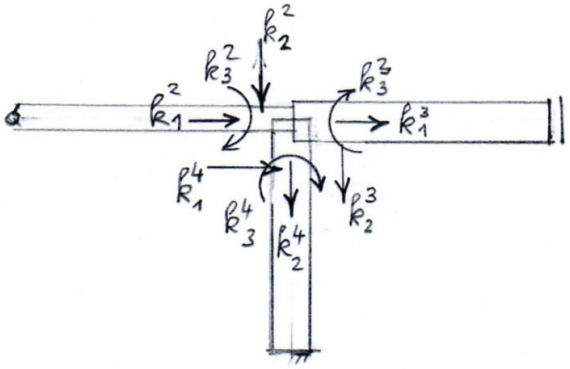
Primjer jednadžbi ravnoteže za sistem s prizmatičnim štapovima.





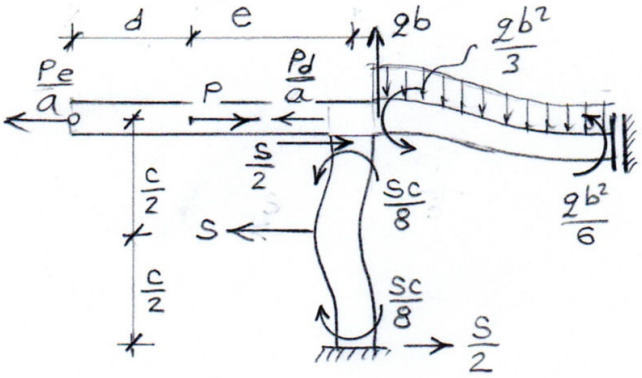
Zadan je štapni sistem s tri štapa spojena u jednom području granjanja. Osi se sijeku u istoj točki. Neizmjerno mala okolina tog sjecišta će se uvesti kao nedeformabilni element t.j. kruti čvor.
Položaj čvora će se odrediti s tri kinematska parametra: dvije translacije u_1, v_1 i jednom rotacijom φ_1.

Štapovi će se označiti malim slovima a,b,c. Te oznake se mogu koristiti i za označavanje duljine štapa, koja će se sada mjeriti od čvora do čvora, odnosno do spojeva. Znači da su štapovi uvodjenjem čvora nešto "produljeni".

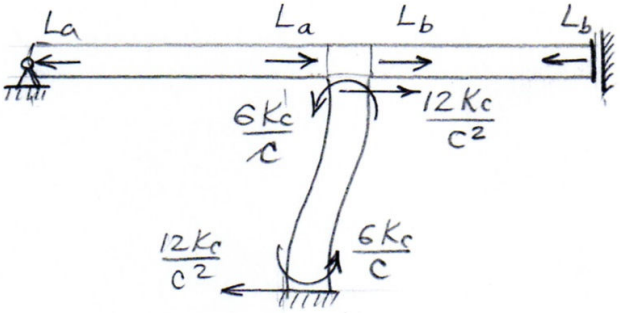


Za prikazivanje parcijalnih stanja sistem će se prikazivati u cijelosti, a upisati će se samo djelovanja na krajeve štapova, jer se ona s istim predznakom pojavljuju na lijevoj strani jednadžbi ravnoteže u metodi pomaka.

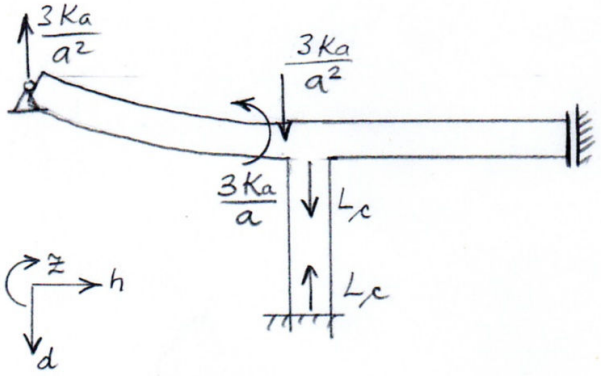
a) Stanje pune upetosti



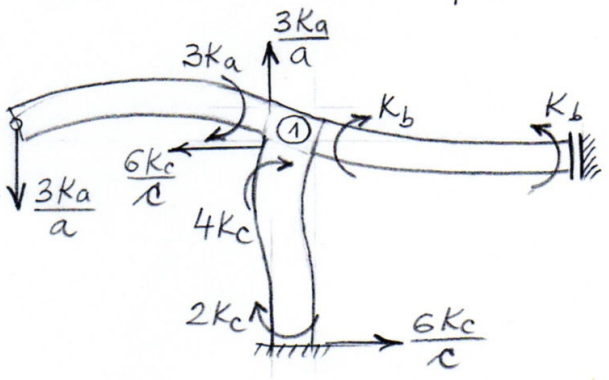
b) Stanje pomaka $u_1 = 1$



c) Stanje pomaka $v_1 = 1$.



d) Stanje zaokreta $\varphi_1 = 1$.



HWPK-85-342

Uvjeti ravnteže u metodi pomaka se postavljaju projiciranjem djelovanja na čvor na osi h i d, te odredjivanjem momenata oko čvora pri čemu će biti pozitivan smisao "z". Doprinosi parcijalnih stanja se postavljaju na lijevu stranu jednadžbi, a doprinosi direktnog opterećenja čvorova na desnu stranu. Djelovanja na krajeve štapova pojaviti će se na lijevoj strani s njihovim predznakom u odnosu na osi h,d, a doprinosi pune upetosti na krajeve štapova pojaviti će se s negativnim predznakom na desnoj strani.

Iz $\Sigma P_{hi} = 0$ slijedi: $\left(L_a + L_b + \frac{12K_c}{c^2}\right) u_1 + 0 \cdot v_1 - \frac{6K_c}{c} \varphi_1 = + \frac{Pd}{a} - \frac{S}{2}$

Iz $\Sigma P_{di} = 0$ slijedi: $0 \cdot u_1 + \left(\frac{3K_a}{a^2} + L_c\right) \cdot v_1 - \frac{3K_a}{a} \varphi_1 = + 2b$

Iz $\Sigma M_{(1)} = 0$ slijedi: $-\frac{6K_c}{c} u_1 - \frac{3K_a}{a} v_1 + \left(3K_a + K_b + 4K_c\right) \varphi_1 = \frac{2b^2}{3} + \frac{S \cdot c}{8}$

Pogodno je direktno postaviti cijeli sistem, s svojstvo simetričnosti iskoristiti za kontrolu vandijagonalnih članova.

Rješavanje jednadžbi metode pomaka

U promatranom slučaju rješavanja linearno elastičnih štapnih sistema pri malim pomacima, vode jednadžbe metode pomaka na sistem linearnih algebarskih jednadžbi koji mora biti regularan. Singularnost t.j. iščezavanje determinante znači da se metodom pomaka pokušao riješiti neki mehanizam, ili da se prilikom rješavanja pojavila pogreška. Koriste se isti načini rješavanja kao kod metode sila.

Odredjivanje konačnog stanja zadanog sistema

Mehaničko stanje zadanog štapnog sistema je opisano pomoću opterećenja štapnih elemenata i uvedenih kinematskih parametara, pa za svaku mehaničku veličinu vrijedi opći izraz:

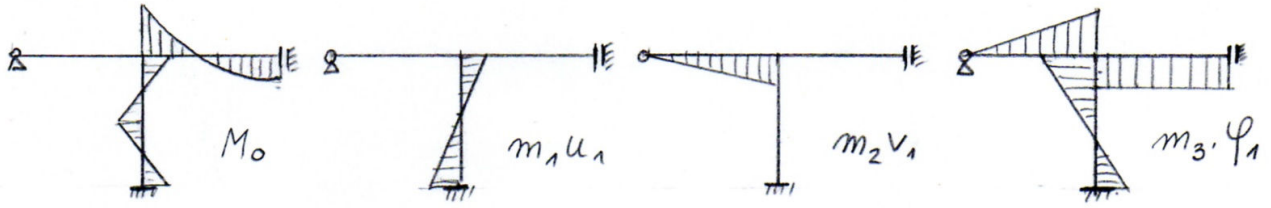
$$F = F_0 + f_1 u_1 + f_2 v_1 + f_3 \varphi_1 + f_4 u_2 + \dots$$

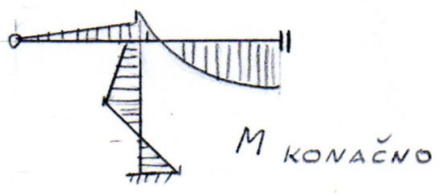
pri čemu je F_0 doprinos opterećenja štapnih elemenata t.j. udio promatrane veličine koji pripada stanju pune upetosti, a f_i je vrijednost tražene veličine na i-tom jediničnom stanju sistema.

Nakon rješavanja su kinematski parametri u_i, v_i, φ_i, itd poznati, pa se prema gornjem izrazu t.j. superpozicijom mogu odrediti sve potrebne mehaničke veličine; obično se odredjuju sile u spojevima i sve rezne sile.

Postupak odredjivanja konačnog stanja je najpregledniji ako se konstruiraju dijagrami reznih sila za stanje pune upetosti i za svako jedinično stanje. Nadalje bi se mogli konstruirati dijagrami reznih sila za sva stanja zasebnih pomaka i zaokreta. Superponiranjem tih dijagrama s dijagramima stanja pune upetosti dobivaju se dijagrami konačnog stanja. U praktičnom postupku se često crtaju samo konačni dijagrami, a i sam postupak se provodi kombinirano: momenti savijanja i uzdužne sile se odredjuju superpozicijom, a poprečne sile se odredjuju direktno iz uvjeta ravnoteže pojedinih štapnih elemenata.

Radi boljeg razješnjavanja postupka odredjivanja konačnog stanja, prikazati će se skice momentnih dijagrama stanja pune upetosti i stanja zasbnih pomaka i zaokreta, kao i dijagram konačnog stanja:





HWPK-85-343

Kontrola rješenja metode pomaka

Nakon odredjivanja konačnog stanja po metodi pomaka treba kontrolirati ravnotežu svih nedeformabilnih elemenata. Osim toga treba kontrolirati ravnotežu jednog većeg podsistema; ako sistem sadrži podlogu onda treba provjeriti ravnotežu svih dijelova zajedno ali bez podloge. Korisno je da se provede i barem jedna deformaciona kontrola.

Ekvivalencijska formulacija metode pomaka

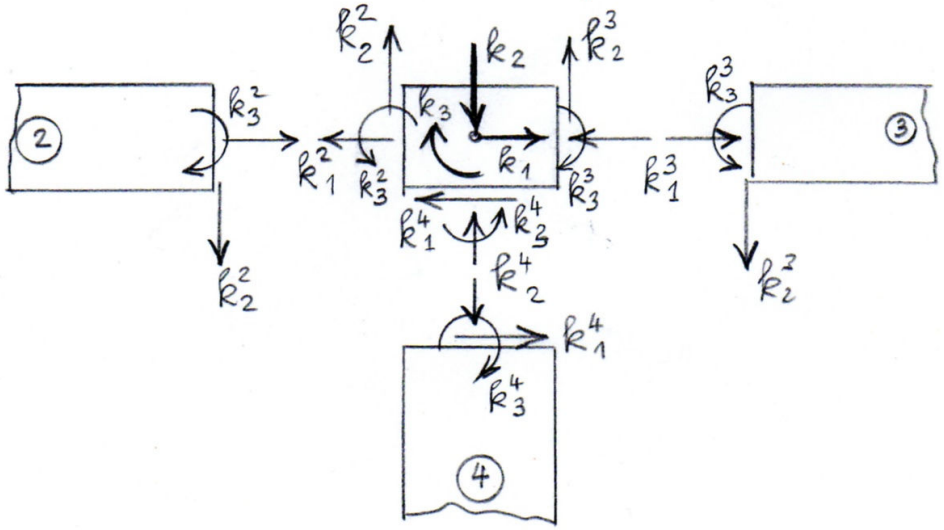
Za postavljanje jednadžbi metode pomaka može biti pregledno da se uvede ekvivalencijska formulacija metode. Pri tome oznake uvedene u metodu i sam postupak ostaju nepromijenjeni , mijenja se samo način izvodjenja. Izvodse u ekvivalencijskoj formulaciji provodi uvodjenjem dopunskih vanjskih sila i momenata.

Ekvivalencijski se metoda pomaka može definirati ovako:

Metoda pomaka se zasniva na opisivanju mehaničkih stanja štapnog sistema pomoću pomaka i zaokreta pogodno odabranih nedeformabilnih elemenata koji se uvode u štapni sistem. Iz uvjeta ravnoteže nedeformabilnih elemenata odredjuju se dopunske vanjske sile i momenti potrebne za ravnotežu nedeformabilnih elemenata a s time i cijelog sistema. Dopunske sile ovise o opterećenju štapnih elemenata i ovise o pomacima i zaokretima nedeformabilnih elemenata. Pomaci i zaokreti nedeformabilnih elemenata se odredjuju iz uvjeta ekvivalencije dopunskih sila i vanjskog zadanog opterećenja na nedeformabilne elemente.

Kod ravnotežne formulacije pretstavljaju lijeve strane jednadžbi negativna rezultirajuća djelovanja reznih sila koje djeluju na nedeformabilni element. Predznaci su odabrani tako, da pozitivni pomaci izazivaju negativna djelovanja na element, pa se uvrštavanjem u negativno rezultirajuće djelovanje dobivaju pozitivni doprinosi lijevim stranama jednadžbi.

To dvostruko mijenjanje predznaka se izbjegava u ekvivalencijskoj formulaciji, koja će se prikazati na istom primjeru kao i ravnotežna formulacija.



HWPK-85-344

Strijelice dopunskih sila usmjerene su kao koordinatni sistem h,d,z, a oznake njihovih veličina su jednake oznakama rezultirajućeg djelovanja za sve rezne sile koje djeluju na element, jer će imati istu ulogu u jednadžbama metode pomaka. Te oznake su: k_1, k_2, k_3. Uz djelovanje dopunskih sila element mora biti u ravnoteži. Uvjeti ravnoteže će imati oblik:

$$-k_1^2 - k_1^3 - k_1^4 + k_1 = 0$$

$$-k_2^2 - k_2^3 - k_2^4 + k_2 = 0$$

$$-k_3^2 - k_3^3 - k_3^4 + a \cdot k_2^2 - b \cdot k_2^3 + c \cdot k_2^4 + k_3 = 0$$

Iz gornjih jednadžbi mogu se izraziti veličine dopunskih sila i dopunskog momenta:

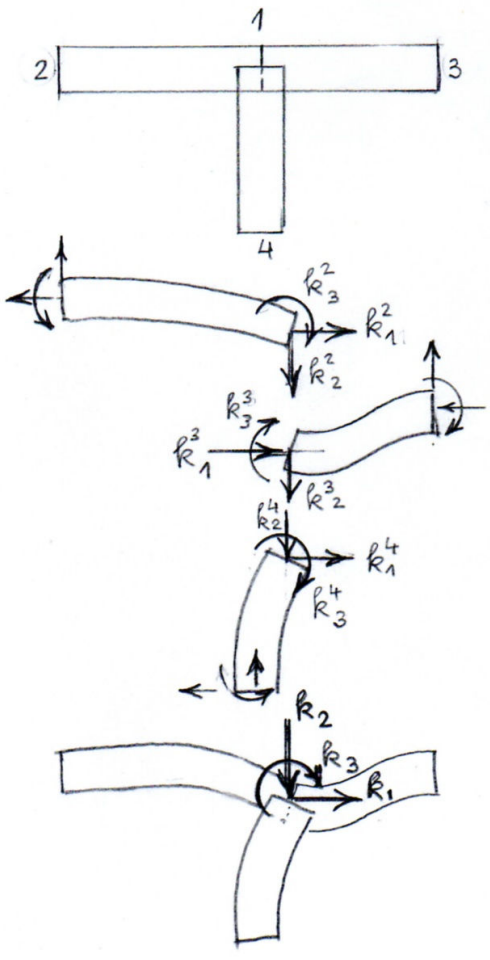
$$k_1 = k_1^2 + k_1^3 + k_1^4$$

$$k_2 = k_2^2 + k_2^3 + k_2^4$$

$$k_3 = k_3^2 + k_3^3 + k_3^4 - a \cdot k_2^2 + b \cdot k_2^3 + c \cdot k_2^4$$

Vidljivo je da su vanjske dopunske sile koje djeluju na element statički ekvivalentne djelovanjima na krajeve štapova, pa se formalno gledano pri postavljanju jednadžbi može potpuno izbjeći promatranje nedeformabilnog elementa.

HWPK-85-345



Takav pristup je pogodan kod situacija u kojima se za ravnotežnu formulaciju uvodi neizmjerno mali nedeformabilni element, dakle kruti čvor. Pokazati će se, da se u ekvivalencijskoj formulaciji za ovu situaciju pojam čvora može potpuno izbjeći.

Pri konstrukciji stanja pomaka štapnog sistema promatraju se zasebno stanja pomaka svakog štapa i pretpostavlja da ta stanja održavaju vanjske koncentrirane sile i momenti koji djeluju u težištima krajnjih presjeka.

To znači da su dopunske sile uvedene već na pojedinim štapovima.

Zamišlja se nadalje da se štapovi u tom stanju, dakle zajedno s dopunskim silama sastavljaju u pomaknuti štapni sistem.

Za svako grananje ili lom postoji u ovoj situaciji točka u kojoj će se sastati težišta krajnjih presjeka, pa će pripadne dopunske sile djelovati iz iste točke.

Zbroj dopunskih sila s krajeva spojenih štapova pretstavlja dopunske sile u toj točki sistema. Točke u kojima djeluju dopunske sile i dalje će se nazivati čvorovi iako u ovom načinu izvodjenja mogu imati čisto geometrijsko značenje.

Na lijevoj strani uvjeta ekvivalencije pojaviti će se projekcije odosno momenti na točke dopunskih sila, a na desnoj projekcije odnosno momenti vanjskih djelovanja na nedeformirane elemente odnosno čvorove:

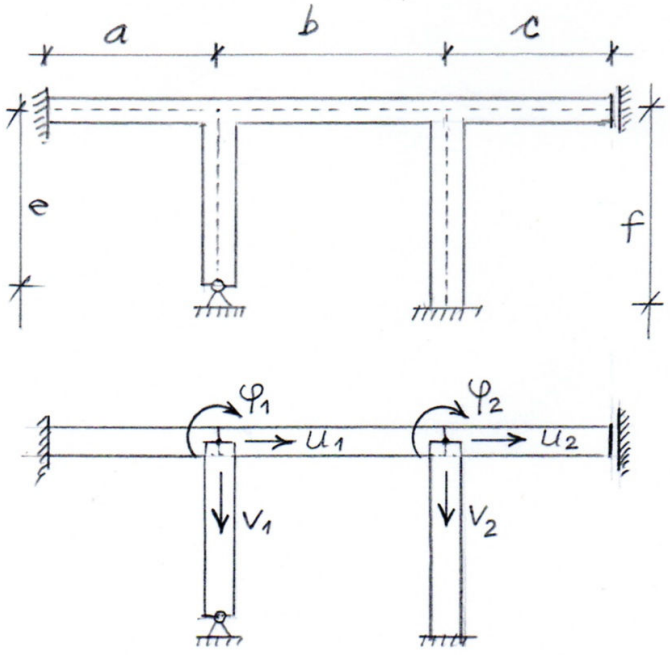
$$k_{10} + k_{11}u + k_{12}v + k_{13}\varphi = H_v$$
$$k_{20} + k_{12}u + k_{22}v + k_{23}\varphi = D_v$$
$$k_{30} + k_{31}u + k_{32}v + k_{33}\varphi = Z_v$$

Odbijanjem doprinosa opterećenja od desne i od lijeve strane uvjeta ekvivalencije dobivaju se poznate jednadžbe metode pomaka-

$$k_{11}u + k_{12}v + k_{13}\varphi = H_v - k_{10}$$
$$k_{12}u + k_{22}v + k_{23}\varphi = D_v - k_{20}$$
$$k_{13}u + k_{23}v + k_{33}\varphi = Z_v - k_{30}$$

HWPK-85-346

Primjer postavljanja jednadžbi metode pomaka pomoću uvjeta ekvivalencije



Zadan je štapni sistem s pet štapova. Pojavljuju se dva grananja. U grananjima se osi štapova sijeku u istim točkama.

Točniji postupak bi vodio na uvodjenje konačnih nedeformabilnih elemenata na području grananja.

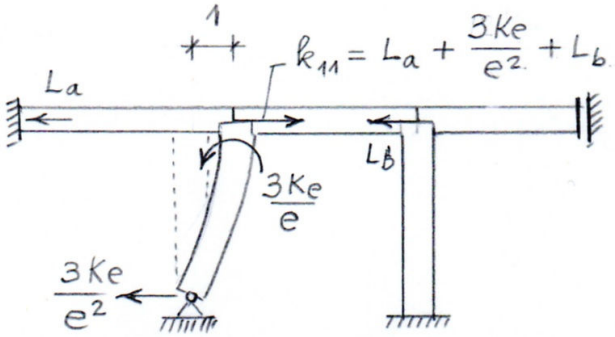
Ovdje će se prikazati postupak u kojem se uvode čvorovi. U sjecištima osi štapova svakog grananja uvodi se čvor. Zamišlja se da štapovi dosižu upravo do tih čvorova, te da su u njima povezani u cjelinu. Mehaničko stanje sistema opisivati će se pomoću pomaka i zaokreta tih čvorova:

$u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2$

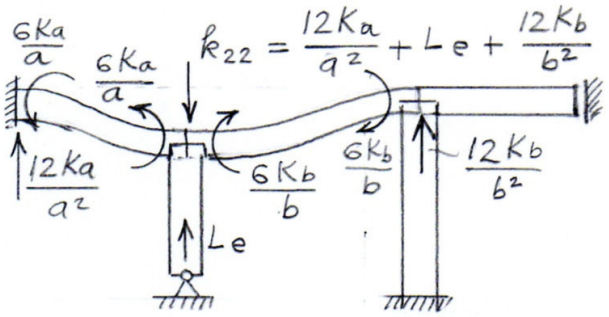
Te veličine su kinematski parametri rješenja; izabrano ih je ukupno šest. Članovi jednadžbi će se označavati kao da su kinematski parametri označeni jedinstveno: $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$.

Nakon izbora načina rješavanja po metodi pomaka mogu se postaviti jedinična stanja pomaka sistema i postaviti lijeve strane jednadžbi. Prikazati će se šest jediničnih stanja; sistem će se prikazivati u cijelosti, a upisati će se djelovanja na krajeve štapova. Ta djelovanja će se shvatiti kao dopunske vanjske sile koje održavaju u ravnoteži promatrano stanje.

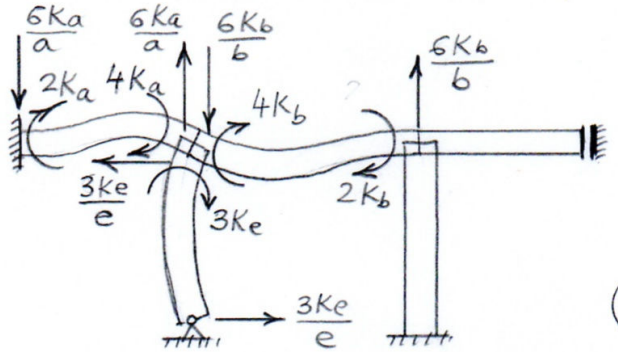
a) Stanje pomaka $u_1 = 1$, $Y_1 = 1$.



b) Stanje pomaka $v_1 = 1$, $Y_2 = 1$.



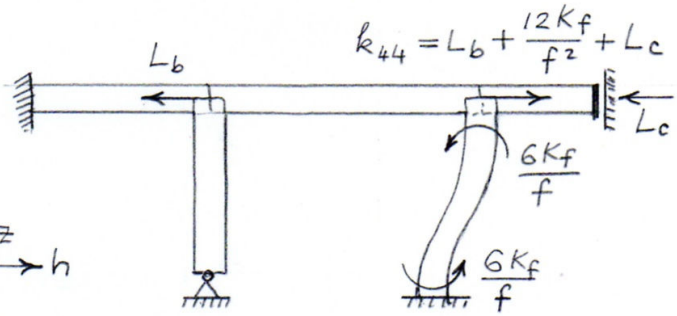
c) Stanje zaokreta $\varphi_1 = 1$, $Y_3 = 1$.



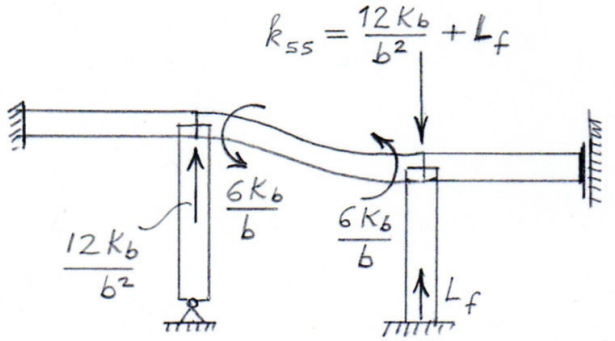
$k_{33} = 4K_a + 4K_b + 3Ke$

z
h
d

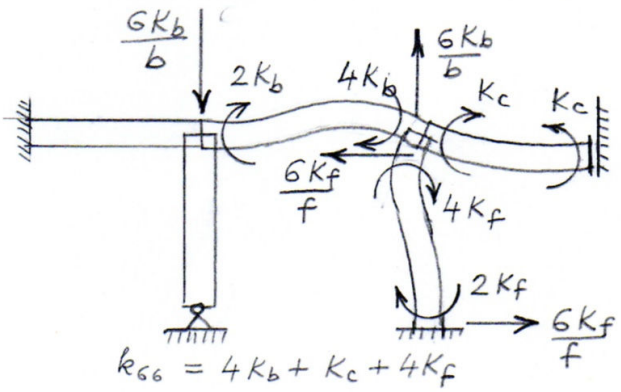
d) Stanje pomaka $u_2 = 1$, $Y_4 = 1$.



e) Stanje pomaka $v_2 = 1$, $Y_5 = 1$.



f) Stanje zaokreta $\varphi_2 = 1$, $Y_6 = 1$.



$k_{66} = 4K_b + K_c + 4K_f$

Oznake za fleksionu krutost K i aksijalnu krutost L imaju indekse koji odgovaraju oznakama duljina pojedinih štapova.

Uvjeti ekvivalencije dopunskih sila i momenata koje održavaju stanje pomaka s vanjskim silama i momentima koji djeluju u čvorovima postaviti će se pomoću suma projekcija za svaki čvor zasebno i suma momenata na čvorove. Osi projekcija će biti h i d.

HJPK-BS-347

Postaviti će se jednadžbe za promatrani primjer: u lijeve strane će se uvrstiti izrazi s jediničnih stanja, a desne strane će ostati u općem obliku.

$$k_{11}u_1 - 3\frac{Ke}{e}\varphi_1 - L_b u_2 = H_{1V} - k_{10}$$

$$k_{22}V_1 + \left(\frac{6K_b}{b} - \frac{6Ka}{a}\right)\varphi_1 - \frac{12K_b}{b^2}V_2 + \frac{6K_b}{b}\varphi_2 = D_{1V} - k_{20}$$

$$-\frac{3Ke}{e}u_1 + \left(\frac{6K_b}{b} - \frac{6Ka}{a}\right)V_1 + k_{33}\cdot\varphi_1 - \frac{6K_b}{b}V_2 + 2K_b\varphi_2 = Z_{1V} - k_{30}$$

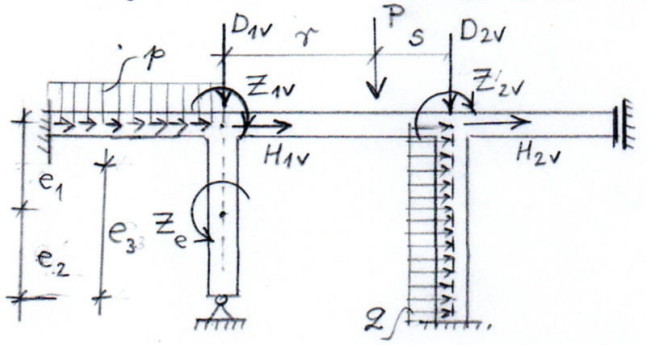
$$-L_b\cdot u_1 + k_{44}u_2 - \frac{6K_f}{f}\varphi_2 = H_{2V} - k_{40}$$

$$-\frac{12K_b}{b^2}V_1 - \frac{6K_b}{b}\varphi_1 + k_{55}V_2 - \frac{6K_b}{b}\varphi_2 = D_{2V} - k_{50}$$

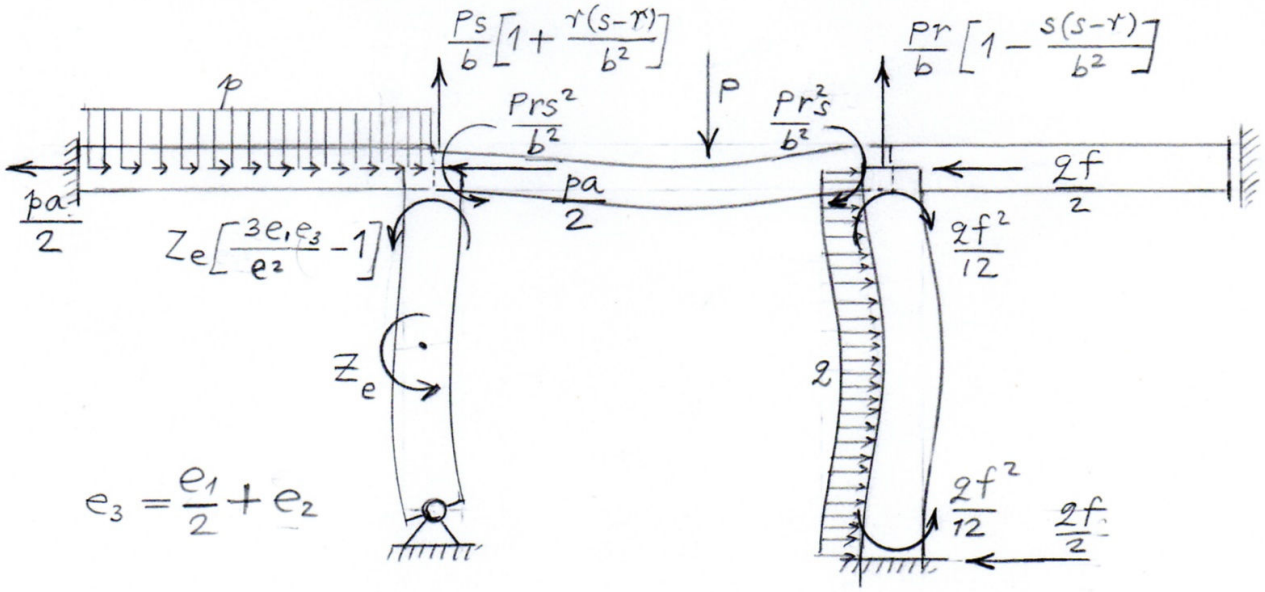
$$\frac{6K_b}{b}V_1 + 2K_b\varphi_1 - \frac{6K_f}{f}u_2 - \frac{6K_b}{b}V_2 + k_{66}\cdot\varphi_2 = Z_{2V} - k_{60}$$

Prikazati će se još i jedan primjer djelovanja opterećenja na sistem, pa će se odrediti dopunske sile i momenti koji održavaju ravnotežu stanja pune upetosti.

HUPK-85-348



Na lijevoj skici je prikazano opterećenje, a na donjoj stanje pune upetosti. Dopunske sile su ucrtane sa stvarnim smjerom djelovanja, a kao veličine su upisani odgovarajući izrazi. Izrazi za djelovanja prema konvenciji metode pomaka su navedeni ispod slike.

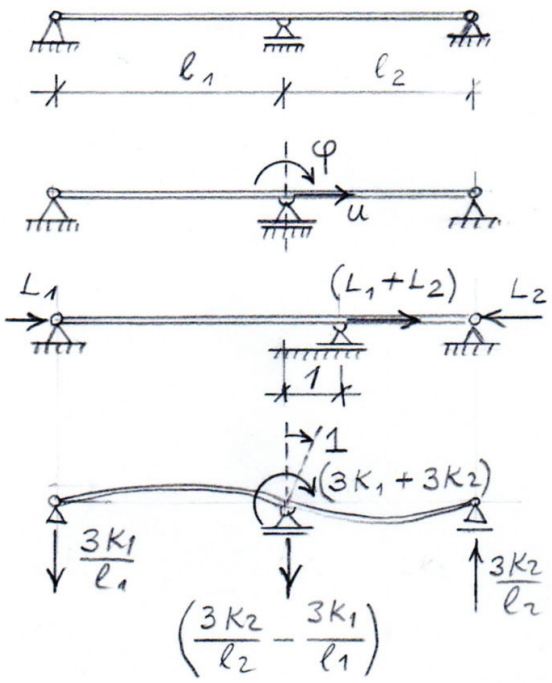


$$k_{10} = -\frac{pa}{2}; \quad k_{20} = -\frac{Ps}{b}\left[1 + \frac{r(s-r)}{b^2}\right] \quad k_{30} = -\frac{Prs^2}{b^2} - Z_e\cdot\left[\frac{3e_1e_3}{e^2} - 1\right]$$

$$k_{40} = -\frac{2f}{2} \quad k_{50} = -\frac{Pr}{b}\left[1 - \frac{s(s-r)}{b^2}\right] \quad k_{60} = \frac{Pr^2s}{b^2} + \frac{2f^2}{12}$$

Primjeri rješenja metode pomaka

1) Kontinuirana greda s dva polja



Promatra se prizmatična greda s dva polja i dva nepomična zgloba.

Za rješavanje po metodi pomaka odabran je kao nedeformabilni element presjek nad srednjim ležajem, njegov položaj je odredjen s dva kinematska parametra; pomakom u i zaokretom φ. koji su na skici prikazani strijelicama.

Prikazana su jedinična stanja. Uz ne deformabilni element t.j.čvor prikazana su djelovanja na krajeve štapa. Jednadžbe metode pomaka glase:

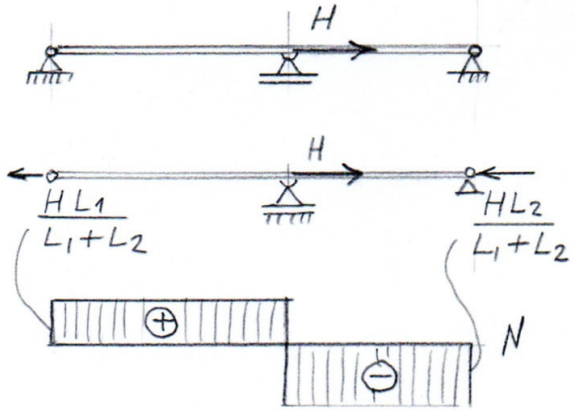
$$(L_1+L_2)\,u = H - k_{10}$$

$$(3K_1+3K_2)\,\varphi = Z - k_{30}$$

Dobiven je dijagonalni sistem jednadžbi.

HNPK-85-349

1a) Djelovanje sile paralelne s osi na čvor

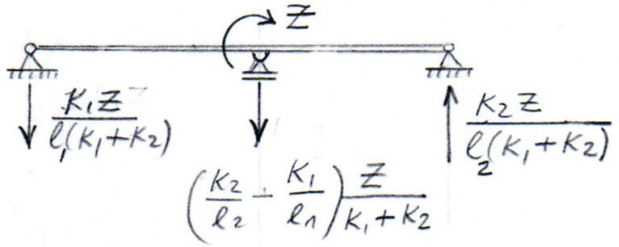


Svi doprinosi desnim stranama osim sile H iščezavaju, pa će samo pomak biti različit od nule:

$$u = \frac{H}{L_1+L_2}$$

Množenjem jediničnog stanja s pomakom dobiva se konačno stanje, jer nema opterećenja štapova. Sila se na lijevi i desni spoj razdijelila u omjeru udjela krutosti.

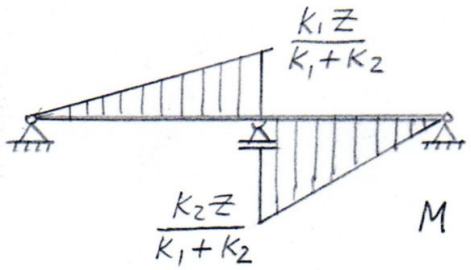
1b) Djelovanje koncentriranog momenta na čvor



Svi doprinosi desnim stranama osim momenta Z iščezavaju, pa će samo zaokret φ biti različit od nule:

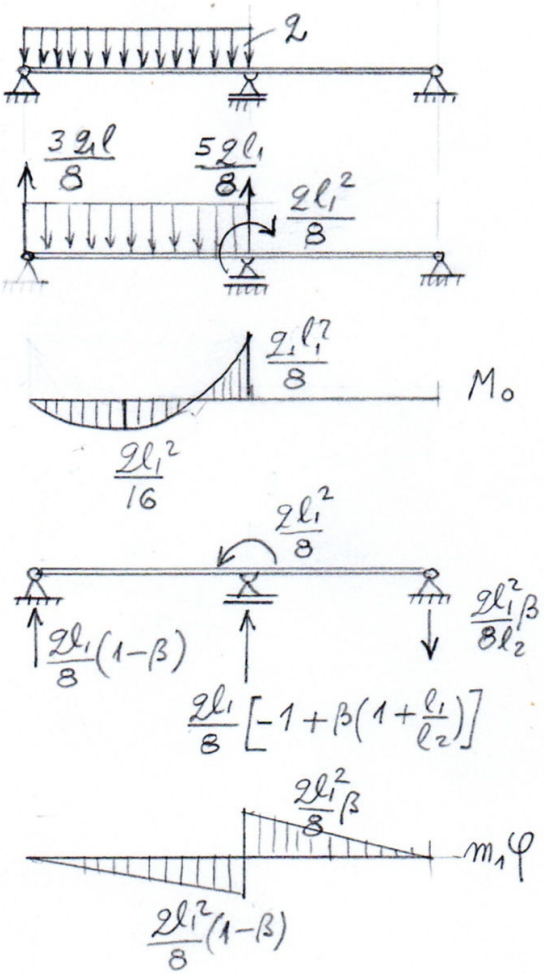
$$\varphi = \frac{Z}{3(K_1+K_2)}$$

Množenjem jediničnog stanja s veličinom zaokreta φ dobiva se i konačno stanje, jer nema opte-



rećenja štapova. Momenti savijanja na krajevima štapova uz čvor odnose se kao fleksione krutosti štapova.

1c) Djelovanje konstantne distribuirane sile okomito na os.



Prikazana je skica opterećenog sistema.

Na skici je prikazano stanje pune upetosti s označenim dopunskim silama i momentima

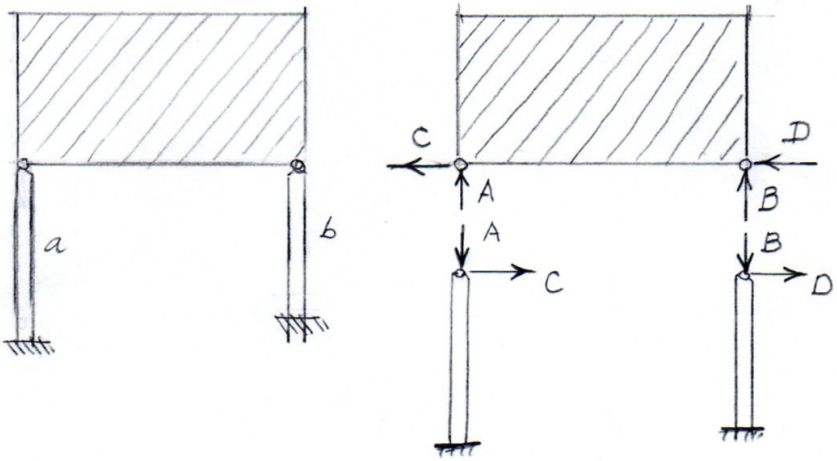
Na skici je prikazan dijagram momenata savijanja stanja pune upetosti.

Prema uvedenim oznakama je $k_{30} = \frac{ql_1^2}{8}$
Svi ostali doprinosi desnim stranama iščezavaju, pa je samo zaokret različit od nule:

$$\varphi = -\frac{ql_1^2}{8 \cdot 3(K_1+K_2)}$$

Prikazano je stanje zaokreta za dobiveni kut φ, te pripadni dijagram momenata savijanja, koji odgovara dijagramu za jedinični kut pomnoženom s veličinom kuta. U izraze je uveden koeficijent $\beta = \frac{K_2}{K_1+K_2}$
Konačno stanje je dakako isto kao i ono dobiveno metodom sila (str.290).

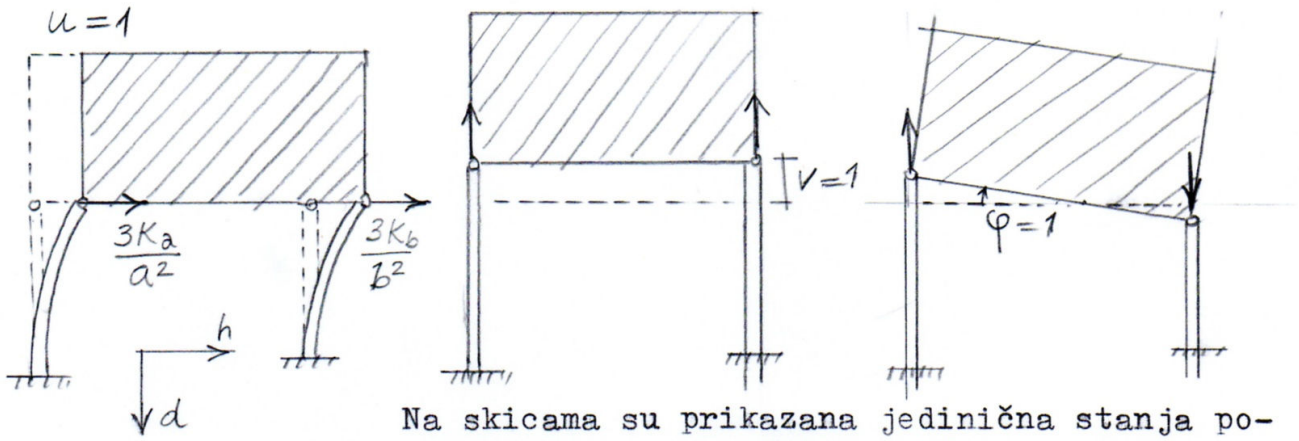
2) Nedeformabilni element zglobno spojen s konzolama

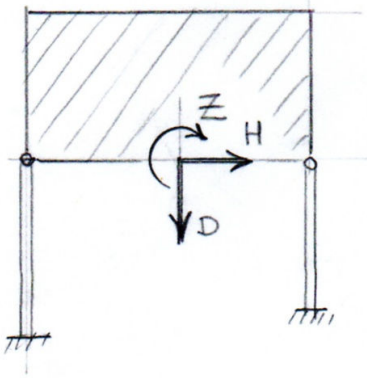


Na ovom jednostavnom preodredjenom sistemu, mogu se dvije reakcije direktno odrediti iz uvjeta ravnoteže; a to su veličine komponenti označene s A i B. Pokazati će se da je za odredjivanje C i D

HWPK-BSC-350

dovoljno je promatrati samo pomak paralelan strijelicama tih komponenti. Ako se središte nedeformabilnog elementa odabere na spojnici zglobova izazivati će rotacija samo pomake zglobova okomite na spojnicu; infinitezimalna rotacija može se zamijeniti translacijom po tangenti.





Na skicama su prikazana jedinična stanja pomaka i zaokreta nedeformabilnog elementa. Promatrati će se samo opterećenje na element a ono će se prikazati pomoću rezultirajućeg djelovanja H,D,Z koje je prikazano na skici. H je odabran tako da ne utječe na odredjivanje sila A i B, a one se mogu odrediti direktno iz uvjeta ravnoteže.

Za jedinično stanje u=1 ucrtane su sile koje djeluju na konzole i zbroj njihovih projekcija mora biti jednak projekciji H na os h.

$$\left(\frac{3K_a}{a^2}+\frac{3K_b}{b^2}\right)u = H \quad \text{i slijedi:} \quad u = \frac{H}{\left(\frac{3K_a}{a^2}+\frac{3K_b}{b^2}\right)}$$

Pomoću odredjenoga pomaka u, direktno se odredjuju sile C i D:

$$C = \frac{\frac{3K_a}{a^2}}{\frac{3K_a}{a^2}+\frac{3K_b}{b^2}}; \qquad D = \frac{\frac{3K_b}{b^2}}{\frac{3K_a}{a^2}+\frac{3K_b}{b^2}}$$

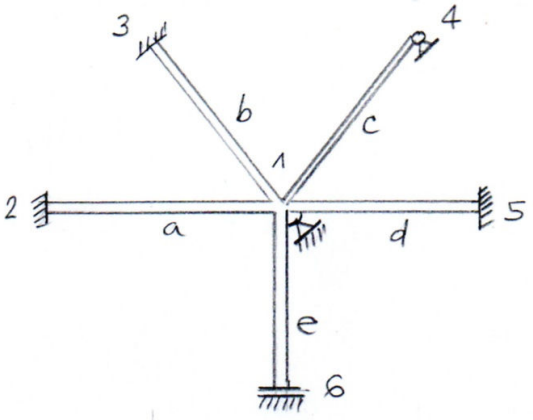
Poprečne sile konzola odnose se u ovom slučaju kao odgovarajući koeficijenti metode pomaka ili kako se i ovdje kaže, odnose se kao krutosti priključenih elemenata. Pri tome se ovdje krutost uvodi u smislu veze sile i pomaka.

Prikazana su tri primjera u kojima se odredjivanje mehaničkog stanja za neka opterećenja svodilo na odredjivanje samo jednog kinematskog parametra. U svakom primjeru se pojavio samo po jedan tip jediničnih stanja: izduženje, zaokret kraja i poprečni pomak. Korisno je uočiti zajedničko svojstvo svih prikazanih rješenja: raspodjelu u omjeru odgovarajućih krutosti.

HWPk-85-351

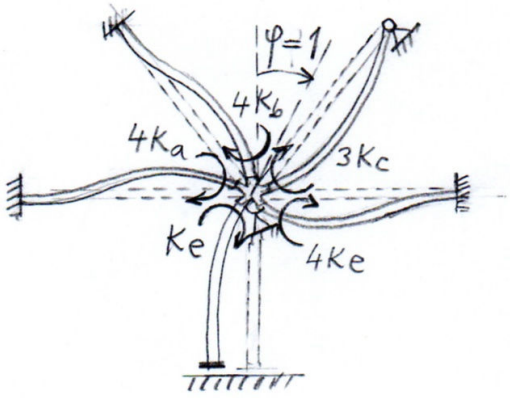
Prikazani jednostavni primjeri su imali i praktičnu primjenu. Slijedeća tri primjera će biti formalna proširenja prethodnih i njihova primjena je rjedja, a uvedeni su radi naglašavanja prednosti metode pomaka.

3) Višestruko grananje



Promatra se sistem s pet štapova koji se sastaju u području grananja, pridržanom za podlogu nepomičnim zglobom. Zglob omogućuje rotaciju oko točke u kojoj se sijeku sve osi štapova. Uvodi se neizmjerno mali nedeformabilni element t.j. čvor.

Prikazano je stanje jediničnog zaokreta. Ucrtana su djelovanja na krajeve štapova.



Ukupni dopunski moment koji izvana djeluje na čvor i održava ravnotežu stanja zaokreta ima veličinu:

$$k_{11} = 4K_a + 4K_b + 3K_c + 4K_d + K_e$$

Ukoliko izvana na grananje djeluje zadani koncentrirani moment Z prikazan simbolom s istim smislom kao simboli ucrtani na skici, glasiti će jednadžba metode pomaka:

$$k_{11} \cdot \varphi = Z \quad \text{pa slijedi:} \quad \varphi = \frac{Z}{k_{11}}$$

Nakon odredjivanja kuta zaokreta, mogu se odrediti momenti na krajevima štapova:

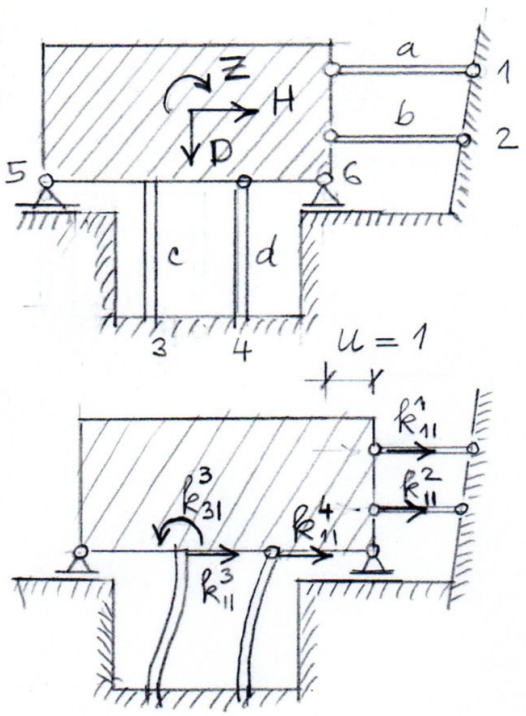
$$M_{1,2} = \frac{4K_a \cdot Z}{k_{11}}; \quad M_{1,3} = \frac{4K_b \cdot Z}{k_{11}}; \quad M_{1,4} = \frac{3K_c \cdot Z}{k_{11}}; \quad M_{1,5} = \frac{4K_d \cdot Z}{k_{11}}$$

$$M_{1,6} = \frac{K_e \cdot Z}{k_{11}}.$$

Kod zadataka ovog tipa broj kinematskih prametara ne ovisi o stupnju preodredjenosti: Konkretni primjer je 12 puta preodredjen pa alternativu rješavanja po metodi sila uopće ne treba razmatrati.

HWPK-85-352

3) Sistem s jednom nepoznatom translacijom



Promatra se sistem koji sadrži nedeformabilni element koji je pomičnim zglobovima povezan s nedeformabilnom podlogom u točkama 5 i 6. Osim toga je s podlogom povezan i preko dva štapna elementa i dva zglobna štapa.
Zbog veze s podlogom moguća je samo jedna translacija. Opterećenje elementa je zamijenjeno rezultirajućim djelovanjem H,D,Z.

Prikazano je stanje jedinične translacije. Ucrtane su sile i momenti koji djeluju na štapove.

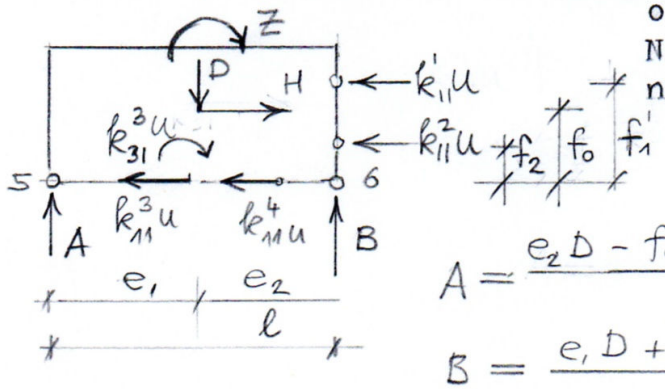
Pomak će se odrediti iz uvjeta ekvivalencije projekcija sila koje djeluju na štapove i zadane sile H:

$$k_{11}u = H; \text{ pa slijedi: } u = \frac{H}{k_{11}}$$

pri čemu je: $k_{11} = k_{11}^1 + k_{11}^2 + k_{11}^3 + k_{11}^4$, odnosno:

$$k_{11}^1 = L_a; \quad k_{11}^2 = L_b; \quad k_{11}^3 = \frac{12\,K_c}{c^2}; \quad k_{11}^4 = \frac{3K_d}{d^2}$$

I u ovom slučaju su sile proporcionalne udjelu njihove krutosti u ukupnoj krutosti elementa. Sile u pomičnim zglobovima će se odrediti iz uvjeta ravnoteže. Na skici su ucrtana djelovanja na nedeformabilni element.



$$A = \frac{e_2 D - f_0 H - Z + (f_1 k_{11}^1 + f_2 k_{11}^2 - k_{31}^3)u}{l}$$

$$B = \frac{e_1 D + f_0 H + Z - (f_1 k_{11}^1 + f_2 k_{11}^2 - k_{31}^3)u}{l}$$

HWPK-85-353

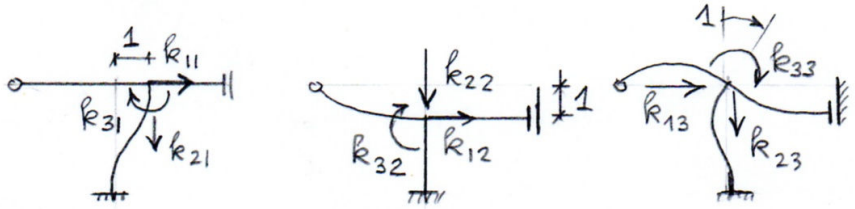
Normiranje dopunskih djelovanja

Nepoznanice u metodi pomaka su pomaci i zaokreti; veličine koje nisu primarno zanimljive za dokaz sigurnosti. U rješenjima se pojavljuju male vrijednosti pomaka i zaokreta, što zajedno s činjenicom da se radi o različitim dimenzijama (m,m°) otežava kvalitativnu kontrolu postupka. Uklanjanje tih nedostataka vodi na uvodjenje prikladnog normiranja; ovdje će se uvesti normiranje dopunskih djelovanja.

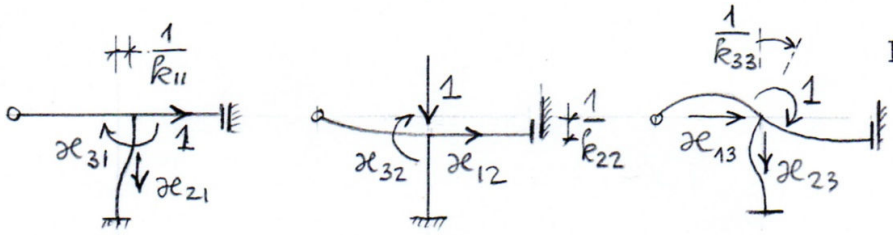
Umjesto stanja jediničnih zasebnih pomaka ili zaokreta uvode se stanja jediničnih dopunskih djelovanja.

Stanje jedinične dopunske sile je stanje zasebnog pomaka odabranog tako, da pripadna dopunska sila bude jedinična.

Stanje jediničnog dopunskog momenta je stanje zasebnog zaokreta odabranog tako, da pripadni dopunski moment bude jediničan.



Na skicama su prikazana stanja jediničnih pomaka i zaokreta s dopunskim silama k_{ij}.



Na skicama su prikazana stanja jediničnih dopunskih djelovanja za isti sistem.

Ako se traži stanje koje umjesto djelovanja k_{jj} sadrži jedinično djelovanje, moraju se sve veličine stanja podijeliti s k_{jj}. Zbog toga će se umjesto jediničnih pomaka i zaokreta pojaviti odgovarajući zasebni pomaci i zaokreti:

$$u_{11} = \frac{1}{k_{11}}\,; \qquad v_{11} = \frac{1}{k_{22}}\,; \qquad \varphi_{11} = \frac{1}{k_{33}}$$

Odgovarajući izrazi su uneseni na skice stanja jediničnih dopunskih sila i momenata.

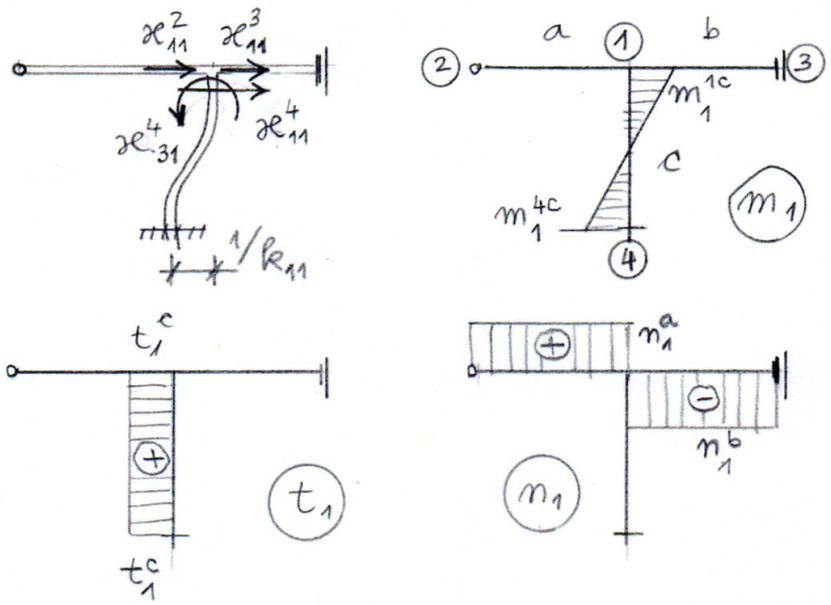
Dopunske sile i momenti stanja jediničnih sila i momenata označeni su sa $\mathcal{R}_{ij}$. I te se veličine dobivaju djelenjem pripadnih dopunski sila s veličinom koja odgovara zasebnom pomaku odnosno: zaokretu: $\mathcal{R}_{ij} = \frac{k_{ij}}{k_{jj}}$

Uz jediničnu silu su dopunske sile bezdimenzionalne pa se za njih često uvodi naziv koeficijenti raspodjele, jer pokazuju kako se jedinična sila "raspodjelila" po sistemu. Isti naziv će se primijeniti i na dopunske momente iako će oni imati dimeziju dužine.

HWPK-95-354

Uz jedinični moment biti će bezdimenzionalni svi dopunski momenti, a dopunske sile će imati dimenziju 1/dužina.

Koeficijenti raspodjele će se zvati i dijelovi dopunskih djelovanja koja pripadaju krajevima pojedinih priključenih štapova.



Na lijevoj skici je prikazano stanje jedinične dopunske sile, koja nije ucrtana, jer su ucrtana djelovanja na krajeve štapova.

Preostale skice prikazuju pripadne dijagrame reznih sila. Zbog razlike u konvenciji predznaka ordinate su ovdje označene s dva superskripta: prvi se odnosi na redni broj nedeformabilnog elementa uz koji se nalazi promatrani presjek štapa, a drugi se odnosi na oznaku štapa.

Doprinos pojedinog stanja jediničnog dopunskog djelovanja rješenju sistema dobiva se množenjem s zasada nepoznatom dopunskom silom ili dopunskim momentom. Te će se nepoznanice jedinstveno označiti s X_i, da se uvede razlika prema oznaci Y_i kojom su se jedinstveno označavali pomaci i zaokreti. Jednadžbe metode pomaka s normiranim dopunskim djelovanjima će glasiti:

$$1 \cdot X_1 + \mathcal{R}_{12} \cdot X_2 + \mathcal{R}_{13} \cdot X_3 = H - k_{10}$$

$$\mathcal{R}_{21} \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + \mathcal{R}_{23} \cdot X_3 = D - k_{20}$$

$$\mathcal{R}_{31} \cdot X_1 + \mathcal{R}_{32} \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 = Z - k_{30}$$

Dobiven je nesimetrični sistem jednadžbi.

Formalno gledano bi se ovakva modifikacija metode pomaka mogla nazvati "metoda vanjskih sila", jer su stvarno sada nepoznate dopunske vanjske sile i momenti. Zbog jasnoće bi se onda i metoda sila morala nazvati "metoda unutarnjih sila".

Nakon odredjivanja nepoznanica X_i, odrediti će se konačno stanje na poznati način.

Ako je potrebno odrediti će se i pomaci i zaokreti nedeformabilnih elemenata prema izrazu:

$$u = \frac{X_1}{k_{11}}; \qquad v = \frac{X_2}{k_{22}}; \qquad \varphi = \frac{X_3}{k_{33}}$$

Taj izraz se najlakše objašnjava modificiranjem jednadžbi osnovne formulacije metode pomaka.

HWPL-85-355

Jednadžbe osnovne formulacije, u kojoj se pojavljuju stanja jediničnih pomaka i zaokreta glase:

$$k_{11} Y_1 + k_{12} Y_2 + k_{13} Y_3 = H - k_{10}$$
$$k_{12} Y_1 + k_{22} Y_2 + k_{23} \cdot Y_3 = D - k_{20}$$
$$k_{13} Y_1 + k_{23} Y_2 + k_{33} Y_3 = Z - k_{30}$$

Svi faktori u kojima se pojavljuje Y_1 pomnožiti će se sa k_{11} i analogno će se postupiti i s preostalim nepoznanicama. Ta operacija će se provesti kao dijelenje člana uz nepoznanicu i množenje nepoznanice istim brojem:

$$\frac{k_{11}}{k_{11}}(k_{11} \cdot Y_1) + \frac{k_{12}}{k_{22}}(k_{22} \cdot Y_2) + \frac{k_{13}}{k_{33}}(k_{33} Y_3) = H - k_{10}$$

$$\frac{k_{12}}{k_{11}}(k_{11} \cdot Y_1) + \frac{k_{22}}{k_{22}}(k_{22} \cdot Y_2) + \frac{k_{23}}{k_{33}}(k_{33} \cdot Y_3) = D - k_{20}$$

$$\frac{k_{13}}{k_{11}}(k_{11} \cdot Y_1) + \frac{k_{23}}{k_{22}}(k_{22} \cdot Y_2) + \frac{k_{33}}{k_{33}}(k_{33} \cdot Y_3) = Z - k_{30}$$

HAPK-85-356

Izrazi u zagradama će se uvesti kao nove nepoznanice:

$$X_1 = k_{11} Y_1 \; ; \quad X_2 = k_{22} \cdot Y_2 \; ; \quad X_3 = k_{33} \cdot Y_3$$

a omjeri će postati članovi novog sistema linearnih jednadžbi koji je dakako ekvivalentan početnom sistemu, čije se nepoznanice mogu odrediti prema izrazima:

$$u = Y_1 = X_1 / k_{11} \; ; \quad v = Y_2 = X_2 / k_{22} \; ; \quad \varphi = Y_3 = X_3 / k_{33}$$

Članovi novog sistema jednadžbi će se označiti s $\mathcal{K}_{ij}$, sistem je već prikazan na str. 355.

U ovom obliku se sistem jednadžbi direktno može koristiti za provedbu iterativnog rješavanja.

Sistem simetričnih linearnih jednadžbi se može i tako normirati da se na dijagonali pojave jedinice, a simetričnost ostane očuvana:

$$\mathcal{K}_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{k_{ii} \cdot k_{jj}}} \; ; \quad X_i = \sqrt{k_{ii}} \cdot Y_i \; ; \quad \mathcal{K}_{iD} = \frac{H - k_{i0}}{\sqrt{k_{ii}}}$$

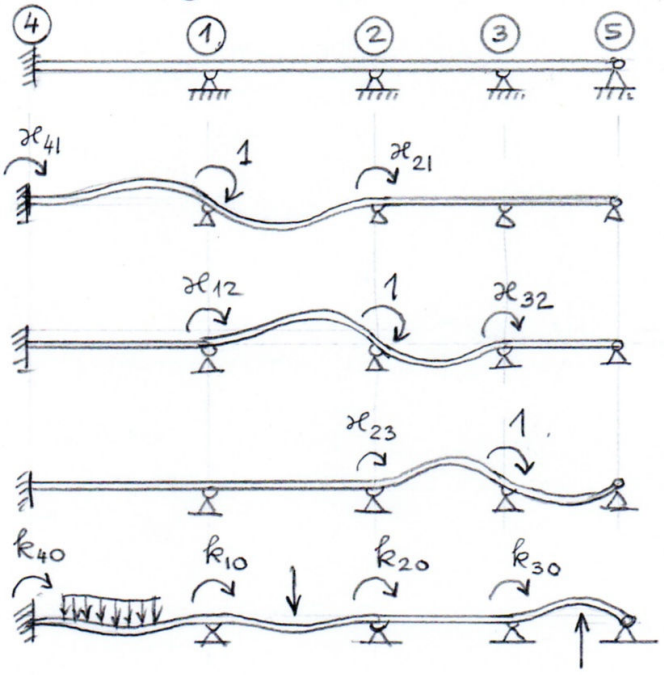
Postupak ima složeniju fizikalnu interpretaciju, a u praktičnoj provedbi ne donosi takvu prednost da bi ga se u okviru ovog prikaza trebalo razraditi.

$\mathcal{K}_{iD}$ je pripadni član desne strane.

Crossov postupak

Crossov postupak je iterativni postupak za rješavanje štapnih sistema metodom pomaka, a ima jednostavnu fizikalnu interpretaciju: u svakom koraku se odredjuje prirast samo jednog kinematskog parametra iz odgovarajućeg uvjeta ravnoteže. U Crossovom postupku se koristi poseban način zapisivanja na shemi samog sistema. Bit postupka čini rješavanje jednadžbi metode pomaka uz normiranje dopunskih djelovanja, a postupak za rješavanje je inkrementalna varijanta Gauss-Seidelovog postupka.

Crossov postupak se najčešće koristi samo za odredjivanje zaokreta. Prikazati će se na primjeru kontinuirane grede s nepomičnim zglobovima, kojoj su opterećeni samo štapovi.



Kao nedeformabilni elementi odabrati će se čvorovi na presjecima uz ležaje. Zbog toga su **prvo** numerirani ležaji uz koje su uvedeni čvorovi.

Pretpostavlja se da su ležaji takovi da omogućuju samo zaokrete čvorova (os rotacije na osi štapa).

Prikazana su pripadna stanja jediničnih dopunskih momenata.

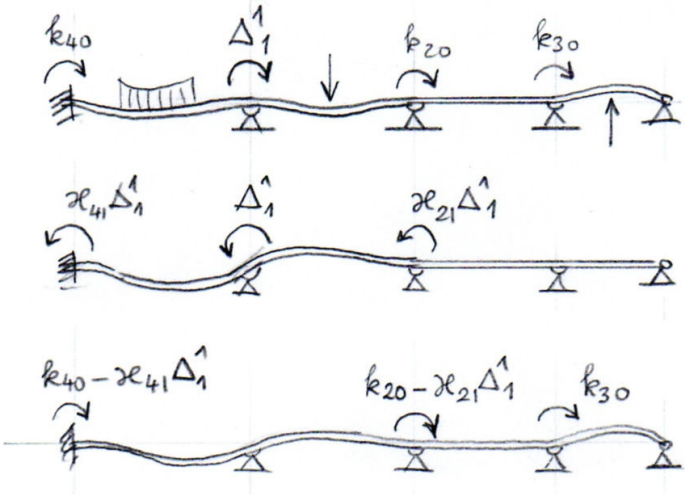
Postupak započinje odredjivanjem stanja pune upetosti. Dopunski momenti čvorova su označeni s k_{i0}.

U postupku će se dopunski momenti mijenjati, pa će se uvesti nova oznaka Δ_j^i, pri čemu je "i" redni broj iteracije, a "j" redni broj pripadne nepoznanice.

Postupak započinje zasebnim uravnotežavanjem prvog čvora. Ponovno je prikazano stanje pune upetosti a dopunski moment prvog čvora je označen s Δ_1^1. Ravnoteža čvora će se postići ako iščezne ukupni dopunski moment, pa će se stanju pune upetosti superponirati stanje zaokreta prvog čvora, takovo da dopunski moment bude upravo suprotan od onog u stanju pune upetosti.

Dobiva se prvo približno stanje

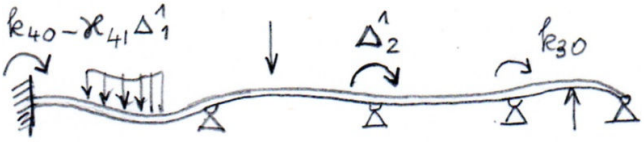
$\Delta_1^1 = k_{10}$



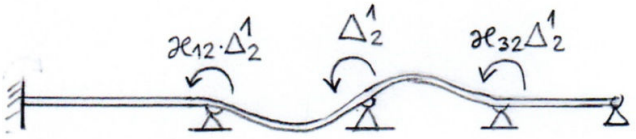
HWPE-85-357

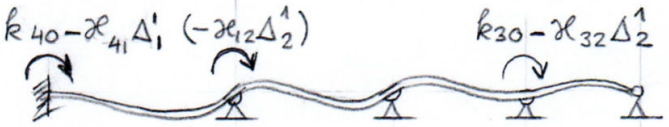
kod kojeg iščezava dopunski moment čvora 1. Pojavio se promijenjeni dopunski moment na čvoru 2 i spoju 4. Njihove veličine su izražeme razlikom jer su superponirana suprotna djelovanja.

$$\Delta_2^1 = k_{20} - \mathcal{R}_{21}\Delta_1^1$$



U slijedećem koraku se zasebno uravnotežava drugi čvor. Ponovo je prikazano prvo približno stanje, ali je dopunski moment drugog čvora označen s Δ_2^1. Ravnoteža čvora će se postići ako iščezne ukupni dopunski moment, pa će se prvom približnom stanju superponirati stanje zaokreta drugog čvora i to takovo, da dopunski moment bude upravo suprotan od onog u prvom približnom stanju.





Dobiva se drugo približno stanje kod kojeg iščezava dopunski moment čvora 2. Pojavio se novi dopunski moment na čvoru 1 i promijenjeni dopunski moment na čvoru 3.

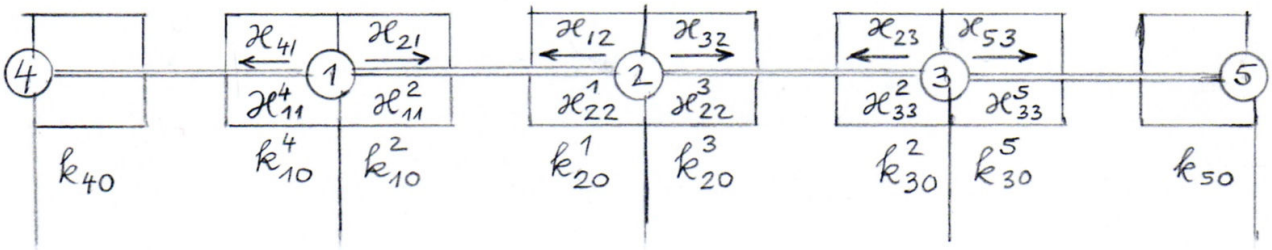
U slijedećem koraku će se uravnotežiti treći čvor, pa će se postupak nastaviti uravnotežavanjem prvog čvora itd.

Postupak se prekida kada dopunski momenti postanu zanemarljivo maleni po apsolutnom iznosu. Posljednje približno stanje se smatra rješenjem.

Princip Cross-ovog postupka se može prikazati modelski: ležaji su izvedeni tako, da se po potrebi može spriječiti njihovo okretanje, npr vijcima. Simulacija postupka započinje pridržavanjem svih čvorova. Tek sada se postavlja opterećenje i dobija stanje pune upetosti. Sada uredjaji za pridržavanje djeluju na gredu upravo s dopunskim momentima k_{io}. Otpuštanjem prvog čvora njemu se omogućuje rotacija i on zauzima ravnotežni položaj. Tako je dobiveno prvo približno stanje. Sada se ponovo pridržava prvi čvor, ali u zatečenom zaokrenutom položaju. U slijedećem koraku se otpušta drugi čvor i on zbog omogućene rotacije zauzima ravnotežni položaj. Tako je dobiveno drugo približno stanje.

Prednost Cross-ovog postupka leži i u izbjegavanju eksplicitnog odredjivanja nepoznanica; u svakom koraku se direktno izračunavaju prirasti momenata na krajevima štapova uz promatrani čvor.

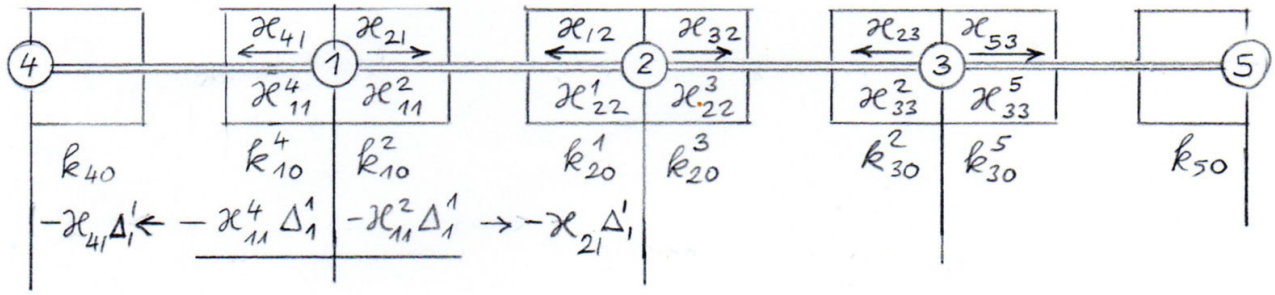
HWPL-85-358



Za ručnu provedbu Crossovog postupka koristi se shema sistema. Uz krajeve štapova u shemi predvidjaju se stupci u kojima će se zapisivati doprinosi momenata koji djeluju na krajeve štapova. Uz svaki čvor se zapisuju informacije o stanju jediničnog dopunskog momenta koje odgovara zaokretanju tog čvora. Kao zaglavlja stupaca upisuju se koeficijenti raspodjele za momente krajeva štapova koji se sastaju u tom čvoru. Iznad tih koeficijenata upisati će se koeficijenti za momente na suprotnim krajevima štapova i uz njih će se ucrtati strijelice usmjerene prema kraju štapa na koji se koeficijent odnosi.

Postupak započinje stanjem pune upetosti, pa će se u prve retke stupaca upisati momenti koji djeluju na krajeve štapova u stanju pune upetosti. Vidljivo je da nije ni potrebno zapisati ukupne dopunske momente koji djeluju na svaki čvor, iako će se oni u postupku koristiti.

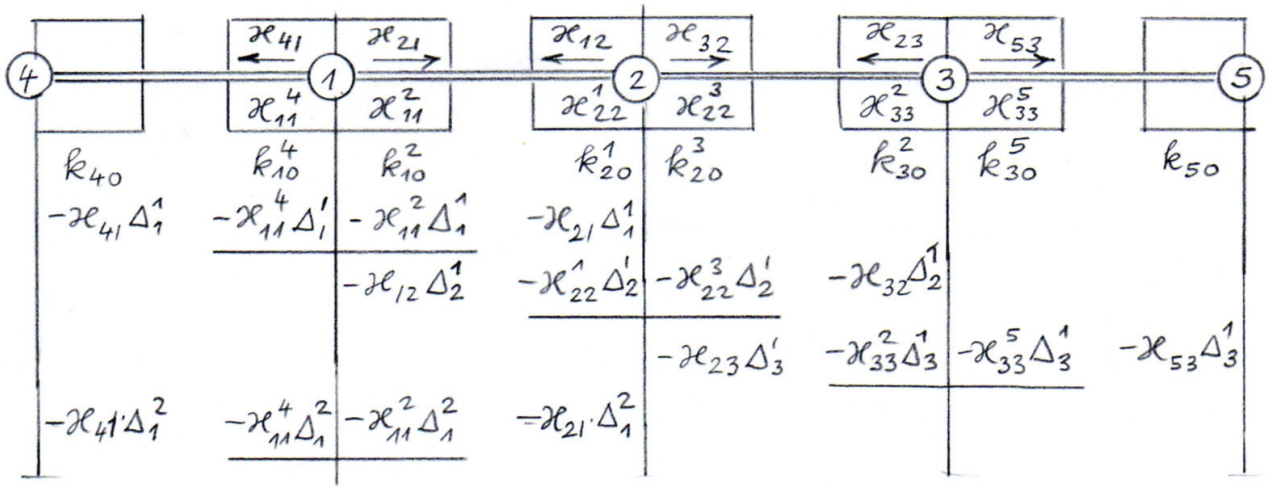
HWPK-85-359



U prvom koraku se uravnotežava prvi čvor. Sada se izračuna dopunski moment $\Delta^1_1 = k^4_{10} + k^2_{10}$. Stanje zaokreta čvora mora imati upravo suprotan dopunski moment. Koeficijenti raspodjele uz promatrani čvor se množe s $-\Delta^1_1$ i dobivene vrijednosti se upisuju u stupce ispod momenata pune upetosti. Ispod doprinosa momentima uz promatrani čvor povlači se crta koja označava da je taj čvor uravnotežen. Radi preglednosti se izmedju momenata koji od zaokreta nastaju na istom štapu mogu ucrtati strijelice.

$-\mathcal{K}_{12}\Delta^1_2$	$-\mathcal{K}^1_{22}\Delta^1_2$	$-\mathcal{K}^3_{22}\Delta^1_2$	$-\mathcal{K}_{32}\Delta^1_2$

U drugom koraku se uravnotežava čvor 2. Odredjuje se dopunski moment $\Delta^1_2 = k^1_{20} + k^3_{20} - \mathcal{K}_{21}\Delta'_1$ Stanje zaokreta čvora mora imati upravo suprotan moment. Sva četiri koeficijenta raspodjele se množe s $-\Delta'_2$ i dobivene vrijednosti se upisuju u odgovarajuće stupce. Ispod doprinosa momentima uz promatrani čvor povlači se crta.



$$\Delta_1^1 = k_{10}^4 + k_{10}^2$$

$$\Delta_2^1 = k_{20}^1 + k_{20}^3 - \mathcal{K}_{21}\cdot\Delta_1^1$$

$$\Delta_3^1 = k_{30}^2 + k_{30}^5 - \mathcal{K}_{32}\Delta_2^1$$

$$\Delta_1^2 = -\mathcal{K}_{12}\cdot\Delta_2^1$$

Na skici su prikazana četiri prva koraka iteracije po Crossu. Treći čvor se uravnotežava analogno drugom čvoru. Dopunski moment koji treba poništiti rotacijom označen je s Δ_3^1 i prikazan je izraz za njega.

Prikazano je i ponovno uravnotežavanje čvora 1. Kako je taj čvor već bio uravnotežen, treba poništiti zaokretanjem samo doprinose koji su se pojavili nakon uravnotežavanja, dakle samo one doprinose koji se nalaze ispod crte koja se povlači nakon uravnotežavanja.

Kada doprinosi momentima postanu zanemarljivo maleni postupak se prekida. Konačni momenti se dobivaju zbrajanjem pripadnih stupaca. Treba provesti kontrolu ravnoteže svakog čvora.

Ako postoji vanjski moment opterećenja koji djeluje na čvor postupak se može formalno provesti na isti način; proširiti će se samo izrazi za prvu iteraciju dopunskih momenata. Od momenata pune upetosti koji djeluju na krajeve treba odbiti vanjski moment opterećenja na čvor.

$$\Delta_1^1 = k_{10}^4 + k_{10}^2 - Z_1$$

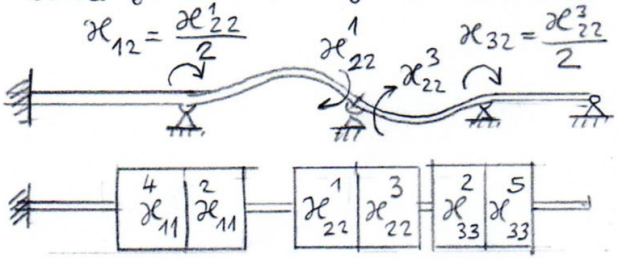
$$\Delta_2^1 = k_{20}^1 + k_{20}^3 - Z_2$$

$$\Delta_3^1 = k_{30}^2 + k_{30}^5 - Z_3$$

Preostali tok postupka potpuno odgovara onom koji je ranije prikazan. Nakon odredjivanja konačnog stanja treba provesti kontrolu za svaki čvor: zbroj doprinosa na krajevima uz čvor mora biti jednak vanjskom momentu opterećenja.

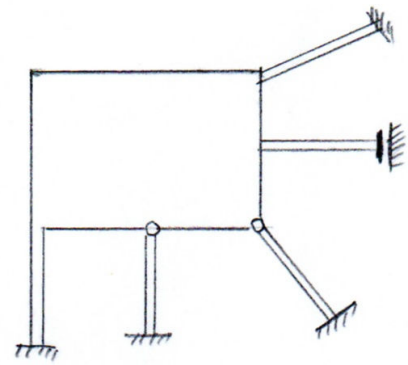
HWPK-85-360

Za sisteme s prizmatičnim štapovima (EI konstantan duž štapa) može se Crossov postupak uz zanemarivanje doprinosa poprečnih sila jednostavnije formulirati. U tom slučaju je moment na pridržanom kraju štapa jednak polovini momenta na zaokrenutom kraju štapa.



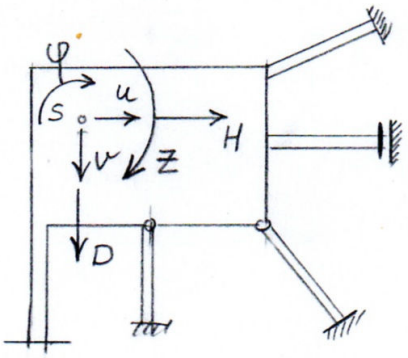
U tom slučaju se u zaglavlju sheme ne upisuju koeficijenti raspodjele za momente na suprotnim krajevima štapa.

Centar krutosti

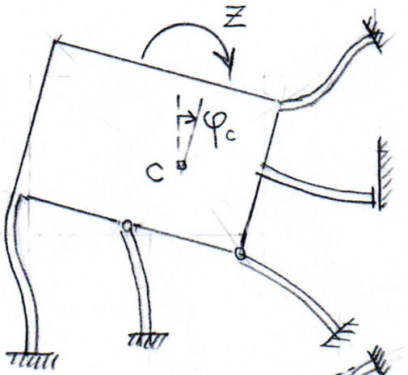


Promatra se nedeformabilno tijelo, koje je s podlogom spojeno elastičnim elementima. Sistem ima jednu ravninu simetrije. Na skici je prikazan presjek s tom ravninom.

Traži se rješenje prikazanog sistema po metodi pomaka, a za djelovanje opterećenja u ravnini; preciznije: za opterećenje kojemu rezultirajuća sila leži u ravnini, a rezultirajući moment je okomit na tu ravninu.

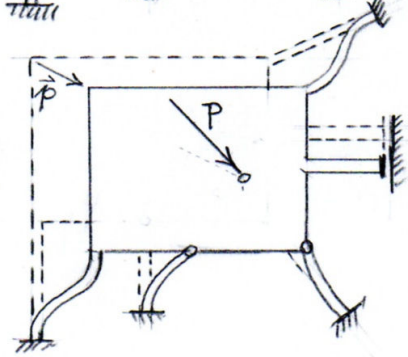


Pri rješavanju po metodi pomaka može se proizvoljno odabrati središte rotacije tijela i dva smjera translacije. Položaj tijela će se onda opisivati pomoću dvije translacije središta i jednom rotacijom oko središta, t.j s tri kinematska parametra koji su na skici označeni s u, v, φ.



Ako se rezultirajuća sila opterećenja rastavi na dvije komponente koje prolaze središtem rotacije i odgovarajući rezultirajući moment, mogu se na poznati način postaviti jednadžbe metode pomaka:

$$k_{11}u + k_{12}v + k_{13}\varphi = H$$
$$k_{21}u + k_{22}v + k_{23}\varphi = D$$
$$k_{31}u + k_{23}v + k_{33}\varphi = Z$$



Pri proizvoljno odabranom središtu rotacije biti će u pravilu svi koeficijenti k_{ij} različiti od nule. Uvijek se može odrediti središte i smjerovi translacije tako, da sistem bude dijagonalan.

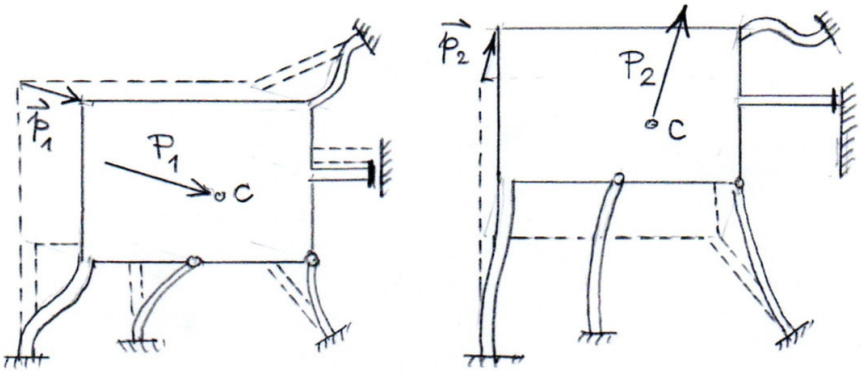
Ako na tijelo djeluje samo moment, ono će rotirati oko jedne točke koja će se

HWPK-95-361

nazvati "centar krutosti". Prikazan je na str.361 i označen s C.

Centar **krutosti** se ne mora nalaziti unutar tijela, ali se uvijek može zamisliti da je nedeformabilno tijelo prošireno do točke koja će pri rotaciji mirovati.

Ako na tijelo djeluje koncentrirana sila tako, da centar krutosti leži na pravcu njenog djelovanja, tijelo će se samo translatirati. U općem slučaju vektor translacije ne će biti paralelan s silom (skica na str.361.dolje).



U odnosu na tijelo mogu se odrediti dvije medjusobno okomite osi koje će se nazivati "glavne osi krutosti", a imati će slijedeće svojstvo:

Ako na tijelo djeluje sila paralelna s jednom od glavnih osi krutosti tako, da njen pravac prolazi centrom krutosti, tijelo će se samo translatirati paralelno istoj glavnoj osi.

HWPL-85-362

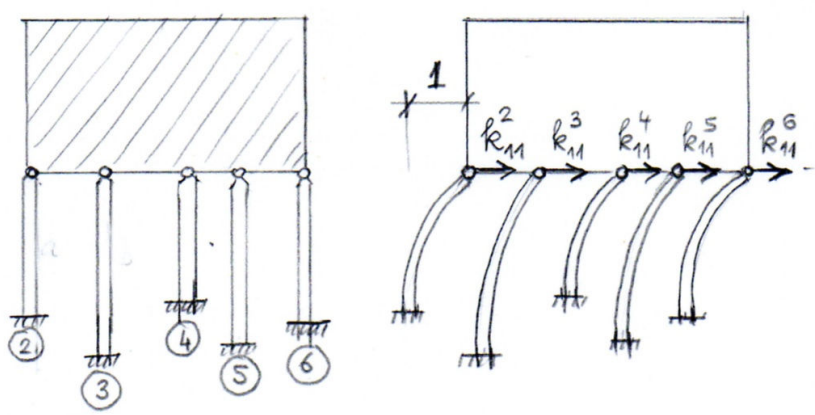
Slijedi da će jednadžbe metode pomaka postavljene za glavne osi krutosti i centar krutosti biti dijagonalne. Rezultirajuću silu opterećenja treba odrediti tako da prolazi centrom krutosti i rastaviti ju na komponente koje leže na glavnim osima krutosti.

Opći postupak za odredjivanje centra krutosti je jednostavan: Odabere se proizvoljna translacija i odredi rezultanta djelovanja elastičnih elemenata na tijelo. Isti postupak se ponavlja za jednu daljnju translaciju. U sjecištu rezultanti nalazi se **centar krutosti.**
Odredjivanje glavnih osi se ne će prikazivati.

Pogodno je uočiti analogiju izmedju elastičnog težišta i centra krutosti.

Primjeri odredjivanja centra krutosti

1) Nedeformabilni element zglobno spojen s paralelnim konzolama



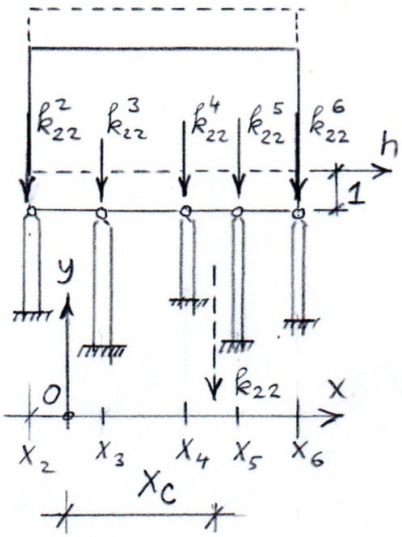
Promatra se translacija po pravcu odredjenom zglobovima. Poprečna sila na svaku konzolu je odredjena izrazom:

$$k_{11}^i = \frac{3K_i}{l_i^2}$$

Rezultanta dopunskih sila koje održavaju ravnotežu ovako translatiranog nedeformabilnog elementa leži takodjer na pravcu odredjenom zglobovima, a njena veličina za jedinični pomak iznosi:

$$k_{11} = \sum_{i=2}^{6} k_{11}^{i}$$

Kako je dobivena sila paralelna s translacijom, znači da je dobivena jedna glavna os krutosti, koja će se označiti s "h". Druga glavna os mora biti okomita na prvu.



Nadalje će se promatrati translacija okomita na prvu glavnu os. Pri jediničnoj translaciji se krajevi svih konzola pomiču po njihovim osima, pa je sila na pojedinu konzolu odredjena s:

$$k_{22}^{i} = L_i$$

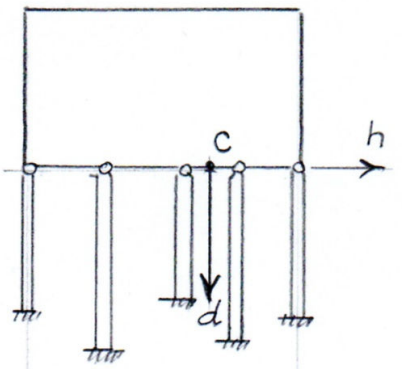
Dobiven je sistem paralelnih sila koji ima rezultantu. Veličina rezultante je odredjena izrazom:

$$k_{22} = \sum_{i=2}^{6} k_{22}^{i}$$

Pravac rezultante je odredjen težištem sistema paralelnih sila:

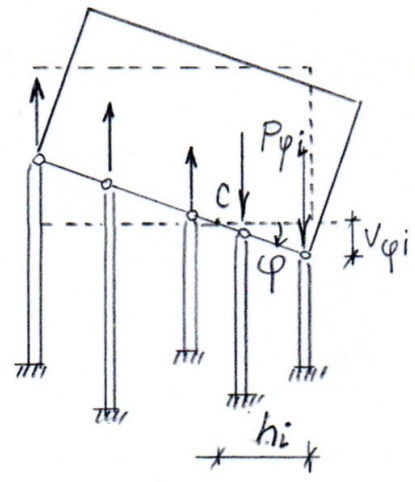
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i L_i}{k_{22}}$$

Za odredjivanje težišta uveden je pomoćni koordinatni sistem xy.



Kao što se očekivalo, i ova rezultanta je paralelna s translacijom, pa je tako odredjena i druga glavna os, koja će se označiti s "d". Na sjecištu dobivenih rezultanti nalazi se centar krutosti, označen s C.

Umnožak $x_i \cdot L_i$ će se nazivati statički moment aksijalne krutosti stupa, a pripadna suma će se nazivati ukupni statički moment aksijalnih krutosti stupova.



Treba još odrediti stanje sistema koje nastaje pri rotaciji oko centra krutosti.

Promatra se infinitezimalna rotacija, pa će se gibanje zglobova po kružnicama moći zamijeniti gibanjem po tangentama koje su odredjene početnim položajem. Svaki zglob se, prema tome giba po okomici na spojnicu početnog poločaja s centrom krutosti, a to znači da će se gibati po osi pripadne konzole. Udaljenost od centra označiti će se s"h_i". Pomak će se odrediti iz pravokutnog trokuta s katetama h_i, $v_{\varphi i}$.

HWPK-85-363

Kut φ je infinitezimalan pa se tangens može zamijeniti kutom u lučnoj mjeri. $v_{\varphi i} = h_i \cdot tg\varphi = h_i \cdot \varphi$

Uz pozitivan d_i i pozitivan kut φ dobiva se spuštanje zgloba, t.j. pomak koji odgovara pozitivnom smjeru v. Za negativne d_i dobiva se podizanje zgloba i negativna veličina sile, pa je vidljivo da su tim izrazom obuhvaćene sve sile u stanju rotacije. Veličina sile se odredjuje po izrazu:

$$P_{\varphi i} = L_i \cdot v_{\varphi i} = L_i \cdot h_i \cdot \varphi$$

Pokazati će se da su sve sile koje djeluju na krajeve štapova ekvivalentne koncentriranom momentu, čija će se veličina označiti s k_3. Istu veličinu i smisao mora imati i dopunski moment koji djeluje na nedeformabilni element i održava ravnpteža sistema. Ako se djelovanje svodi na moment moraju iščezavati dvije neparalelne komponente rezultirajućeg djelovanja. Odrediti će se komponente paralelne s osima h i d.

$$k_1 = \sum_2^6 P_{\varphi h i} = 0$$

$$k_2 = \sum_2^6 P_{\varphi d i} = \sum_2^6 P_{\varphi i} = \sum_2^6 L_i \cdot h_i \cdot \varphi = \left(\sum_2^6 L_i \cdot h_i\right)\varphi$$

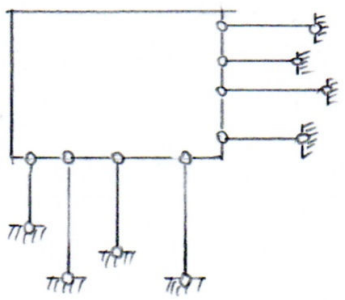
Sila k_2 je proporcionalna ukupnom statičkom momentu krutosti i to na sam centar krutosti, a on iščezava jer momenti sila na bilo koju točku s pravca djelovanja rezultante iščezavaju.

Vidljivo je da se djelovanje na nedeformabilni element svodi na koncentrirani moment, koji će se označiti s k_3.

$$k_3 = \sum_2^6 h_i \cdot P_{\varphi i} = \sum_2^6 L_i \cdot h_i^2 \cdot \varphi = \left(\sum L_i \cdot h_i^2\right) \cdot \varphi = k_{33}\varphi$$

Veza momenta i kuta je izražena pomoću koeficijenta k_{33}, koji je u ovom slučaju centralni moment tromosti aksijalnih krutosti.

2) Nedeformabilni element spojen s dvije grupe paralelnih zglobnih štapova.

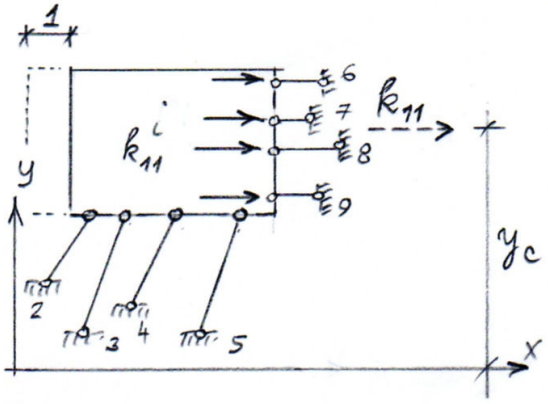


Promatra se samo specijalni slučaj sistema kod kojeg su grupe štapova medjusobno okomite, jer će se u tom slučaju direktno dobiti glavne osi krutosti.

Translacija paralelna s jednom grupom štapova izazvati će sile samo u toj grupi, jer je promjena dužine pojedinog štapa druge grupe mala veličina višeg reda koja na limesu iščezava.

Za opisivanje mehaničkog stanja uvesti će se koordinatni sistem xy.

HWPK-85-364

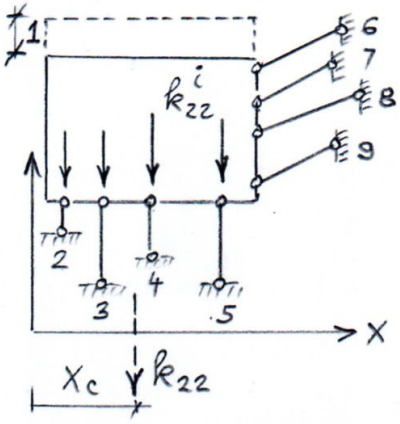


jediničnoj

Pri translaciji paralelnoj s osi x djeluju u zglobovima na štapove sile k_{11}^i, paralelne s translacijom Njihova rezultanta ima veličinu k_{11} a leži na paraleli s osi x koja je odredjena s y_c. Pripadni izrazi su:

$$k_{11} = \sum_{i=6}^{9} L_i \; ; \qquad y_c = \frac{\sum y_i L_i}{k_{11}}$$

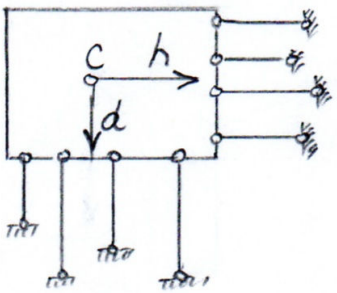
Sila k_{11} je paralelna s pripadnom translacijom pa je njenom pravcem odredjena prva glavna os tromosti.



Pri translaciji paralelnoj s osi y djeluju u zglobovima na štapove sile k_{22}^i koje su paralelne s translacijom. Njihova rezultanta ima veličinu k_{22}, a leži na paraleli s osi y koja je odredjena s x_c. Pripadni izrazi su:

$$k_{22} = \sum_{2}^{5} L_i \; ; \qquad X_c = \frac{\sum x_i L_i}{k_{22}}$$

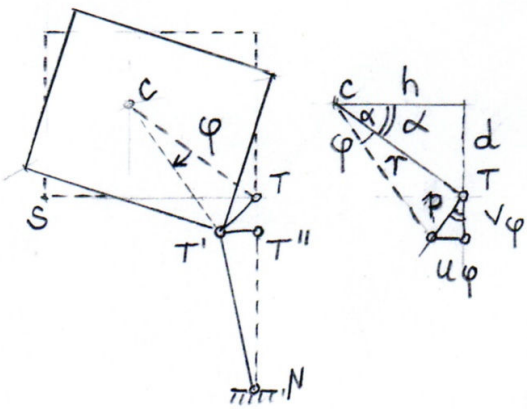
Sila k_{22} je paralelna s pripadnom translacijom pa je njenim pravcem odredjena druga glavna os tromosti.



Na sjecištu rezultanti dobivenih za dvije različite translacije nalazi se centar krutosti označen na skici s C. Glavne osi su označene s h i d.

Treba još odrediti stanje sistema koje nastaje pri rotaciji oko centra krutosti.

Radi preglednosti će se odnosi koji nastaju pri rotaciji promatrati na sistemu koji ima samo jedan štap spojen na uglu pravokutnog elementa.



Zglob T će se pomaknuti po kružnici čije je središte u centru krutosti C, i prijeći će u položaj T'. Promjena duljine priključenog štapa može se geometrijski odrediti tako, da se skraćeni štap zarotira oko nepomičnog zgloba N do početnog položaja. U tom bi slučaju kraj štapa bio u točki T''. Promjena duljine je odredjena dužinom T,T''. Na desnoj skici je prikazano pojednostavnjenje koje se može uvesti pri infinitezimalnim kutevima zaokreta. Pomak po kružnici zamijeniti će se translacijom po tangenti. Duljina translacije je odredjena izrazom:

HNPK-85-365

$$p = r \cdot \varphi$$

r je udaljenost od centra, a translacija "p" je okomita na spojnicu zgloba s centrom.

Umjesto rotacije oko zgloba N, može se u infinitezimalnim odnosima uvesti okomica na početni položaj, dakle na spojnicu T,N. Time je na osi štapa odredjena dužina v_φ, koja će se uvesti kao skraćenje štapa. Veza v_φ i p odrediti će se iz pravokutnog trokuta kojemu su v_φ i u_φ katete, a p je hipotenuza.

$$v_\varphi = p \cos\alpha$$

Uvrštavanjem izraza za p i supstitucijom $r \cdot \cos\alpha = h$ dobiva se:

$$v_\varphi = r \cdot \varphi \cdot \cos\alpha = (r \cdot \cos\alpha)\,\varphi = h \cdot \varphi$$

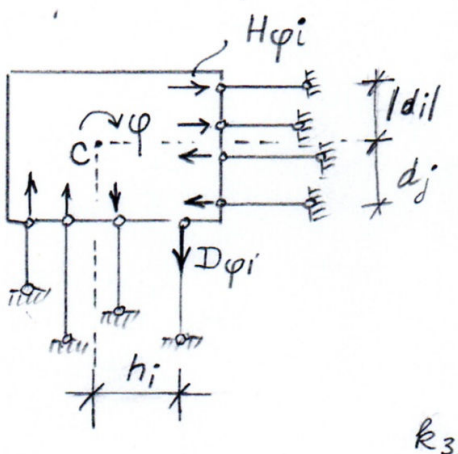
Promjena dužine štapa jednaka je projekciji pomaka zgloba na os štapa.

Projekcija infinitezimalne translacije (na os kroz početnu točku) koja zamjenjuje rotaciju jednaka je umnošku kuta i udaljenosti osi od centra rotacije.

Po analogiji bi promjena duljine štapa koji leži na pravcu odredjenom točkama T i S bila projekcija translacije p na taj pravac a to je u_φ, odredjen izrazom:

$$u_\varphi = d \cdot \varphi$$

HWPK-85-366



Pri rotaciji će se u štapovima paralelnim s osi h pojaviti sile:

$$H_{\varphi i} = -L_i \cdot d_i \cdot \varphi$$

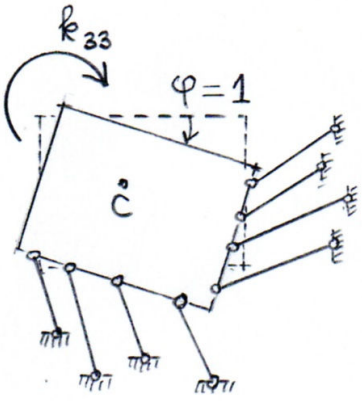
Na štapove paralelne s osi d će djelovati sile:

$$D_{\varphi i} = L_i \cdot h_i \varphi$$

Sve te sile su ekvivalentne jednom koncentriranom momentu:

$$k_{3.} = -\sum_{i=6}^{9} d_i \cdot H_{\varphi i} + \sum_{i=2}^{5} h_i \cdot D_{\varphi i} = k_{33} \cdot \varphi$$

$$k_{33} = \sum_{i=6}^{9} d_i^2 L_i + \sum_{i=2}^{5} h_i^2 \cdot L_i$$



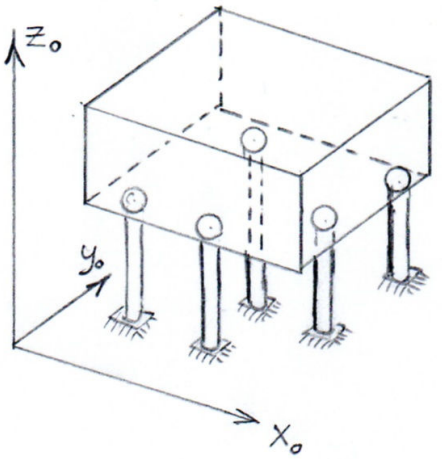
U ekvivalencijskoj formulaciji je k_{33} dopunski vanjski moment koji održava u ravnoteži nedeformabilni element zaokrenut za jedinični kut.

Dijagonalizacija jednadžbi metode pomaka u prostoru

Opće zakonitosti dijagonalizacije jednadžbi metode pomaka u prostoru su složene i ne će se ovdje uvoditi.

Prikazati će se samo jedan primjer, koji pretstavlja proširenje ranije uvedenih primjera. Kod tog primjera se pojavljuju neke zakonitosti koje se analogno pojavljuju u više važnih primjena: odredjivanje sila u diskretnim spojevima, približna analiza višekatnih objekata, te raspodjela napona duž poprečnog presjeka štapova.

1) Nedeformabilni blok zglobno spojen s paralelnim konzolama kružnog poprečnog presjeka.

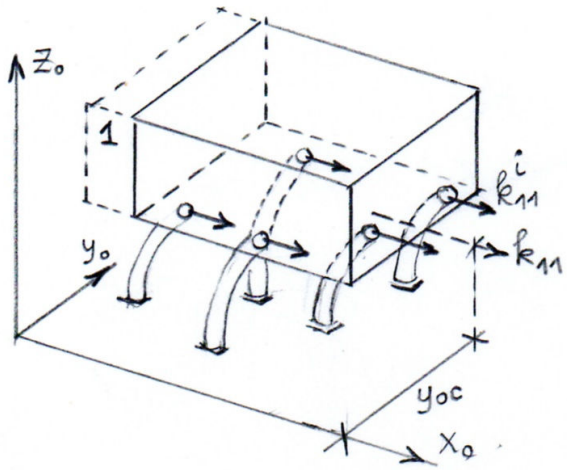


Promatra se samo specijalni slučaj: svi zglobovi leže u istoj ravnini, a svi stupovi su okomiti na tu ravninu.

Za opis sistema uvodi se osnovni desni pravokutni sustav x_o, y_o, z_o.

Traži se mehaničko stanje sistema pri djelovanju opterećenja na blok.

Postaviti će se rješenje po metodi pomaka; položaj bloka će se odrediti sa tri translacije i tri rotacije.

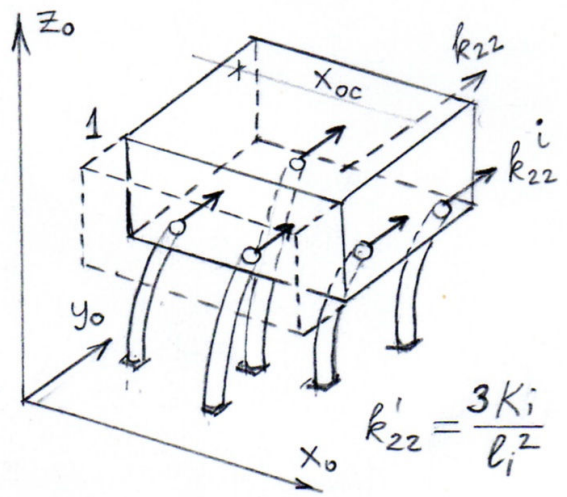


Pri jediničnoj translaciji paralelnoj s osi x_o djelovati će na svaku konzolu sila u zglobu koja je paralelna s osi x_o, i ima veličinu:

$$k_{11}^i = \frac{3K_i}{l_i^2}$$

Rezultanta dopunskih sila koje održavaju ovakovu translataciju bloka biti će jednaka zbroju svih sila koje djeluju na konzole: Veličina sile k_{11} i njena udaljenost y_{oc} od ravnine $x_o z_o$ odredjeni su izrazima:

$$k_{11} = \sum_{i=1}^{s} k_{11}^i \; ; \quad y_{oc} = \frac{\sum y_{oi} k_{11}^i}{k_{11}}$$

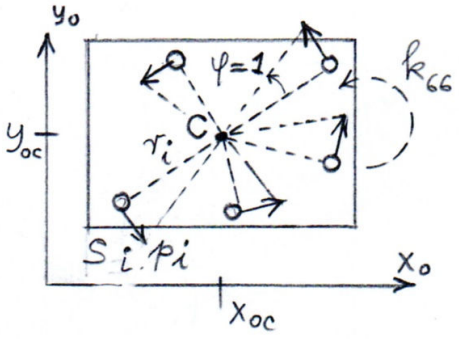


Analogna situacija nastaje pri translaciji paralelnoj s osi y_o Dopunska sila k_{22} koja održava ravnotežu bloka pri toj translaciji je rezultanta sila koje djeluju na konzole.

$$k_{22} = \sum_{i=1}^{s} k_{22}^i \; ; \quad x_{oc} = \frac{\sum x_{oi} \cdot k_{22}^i}{k_{22}}$$

HWPK-85-367

Na sjecištu pravaca sila k_{11} i k_{22} nalazi se centar poprečne krutosti koji će se označavati sa C.



Promatrati će se rotacija oko osi z_6 koja je paralelna s osi z_o a prolazi centrom poprečne krutosti.

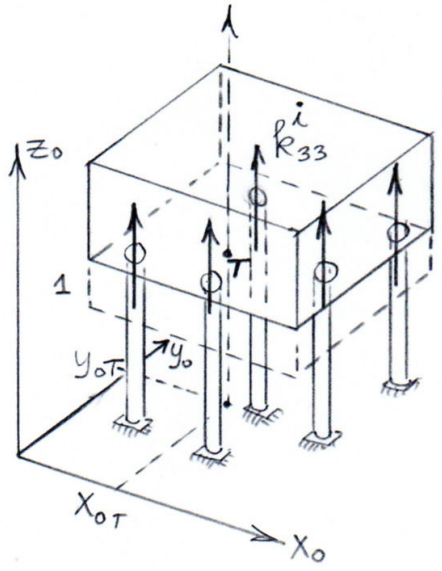
Na skici je prikazana ravnina u kojoj se nalaze zglobovi. S r_i su označene duži-ne odredjene centrom C i središtima zglobova.

Infinitezimalni pomaci p_i biti će okomiti na spojnice s centrom, a njihova veličina odredjena izrazom: $p_i = r_i \cdot 1$

Na svaku konzolu će djelovati sila koja leži na pravcu pomaka p_i a odredjena je konstantnom $k^i_{11} = k^i_{22}$. Veličina sile će se označiti sa S_{zi}. $S_i = k^i_{11} \cdot p_i = k^i_{11} \cdot r_i$

Može se pokazati da su sile koje djeluju na sve stupove ekvivalentne samo jednom koncentriranom momentu paralelnom s osi z_o. Taj moment održava ravnotežu bloka pri jediničnom zaokretu oko osi z_p i označiti će se s k_{66}.

$$k_{66} = \sum_{i=1}^{s} S_{zi} \cdot r_i = \sum_{i=1}^{s} k^i_{11} \cdot r_i^2$$



Pri jediničnoj translaciji paralelnoj s osi z_o t.j. paralelnoj s osima konzola, djelovati će na svaku konzolu sila koja leži na osi te konzole, a ima veličinu: $k^i_{33} = L_i$

Rezultanta dopunskih sila koje održavaju ovu translaciju biti će takodjer paralelna s osi z_o, a veličina k_{33} je odredjena s:

$$k_{33} = \sum_{i=1}^{s} k^i_{33} = \sum_{i=1}^{s} L_i$$

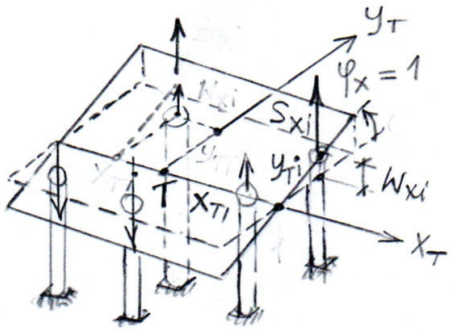
Pravac rezultante prolazi težištem sistema sila koje djeluju u zglobovima. To težište se nalazi u ravnini odredjenoj zglobovima i nazvati će se: centar uzdužne krutosti i označiti će se s T.

Položaj centra uzdužne krutosti je odredjen izrazima:

$$x_{oT} = \frac{\sum_{i=1}^{s} x_{oi} L_i}{k_{33}}; \qquad y_{oT} = \frac{\sum_{i=1}^{s} y_{oi} L_i}{k_{33}}$$

HKPK-85-368

Centar poprečne krutosti i centar uzdužne krutosti se ne moraju poklapati. Poklapaju se u specijalnom slučaju;ako su sve konzole jednako duge i imaju jednake mehaničke karakteristike.



Promatra se jedinična rotacija oko osi x_t paralelne s osi x. Os x_T prolazi centrom uzdužne krutosti T.

Na skici je zbog preglednosti prikazana samo ploha na kojoj leže zglobovi.

Infinitezimalni pomaci biti će okomiti na ravninu odredjenu s osi rotacije i središtem zgloba,a njihova veličina će biti proporcionalna s udaljenosti od osi i odredjena s izrazom: $w_{xi} = y_{Ti} \cdot 1$, a veličina sile: $S_{Xi} = y_{Ti} \cdot L_i$

Dobiva se sistem paralelnih sila za koji se može pokazati da se svodi na koncentrirani moment. Odrediti će se dvije komponente tog momenta: jedna paralelna s osi x_T, a druga paralelna s osi y_T. Veličina komponente paralelne s osi x_T označiti će se k_{xx} a biti će odredjena izrazom: $k_{XX} = \sum_{i=1}^{s} y_{Ti} \cdot S_{Xi} = \sum_{i=1}^{s} y_{Ti}^2 \cdot L_i$

Veličina momenta paralelnog s osi y_T označiti će se sa k_{yy}, a biti će odredjena izrazom: $k_{yX} = -\sum_{i=1}^{s} x_{Ti} \cdot S_{Xi} = -\sum_{i=1}^{s} x_{Ti} \cdot y_{Ti} \cdot L_i$

Pri jediničnoj rotaciji oko osi y_T nastaje analogna situacija kao pri rotaciji oko osi x_T. Ravnotežu bloka održava koncentrirani moment koji će se prikazati pomoću komponenti na osima x_T, y_T. Komponenta na osi x_T je odredjena izrazom:

$$k_{xy} = -\sum_{i=1}^{s} x_{Ti} \cdot y_{Ti} \cdot L_i$$

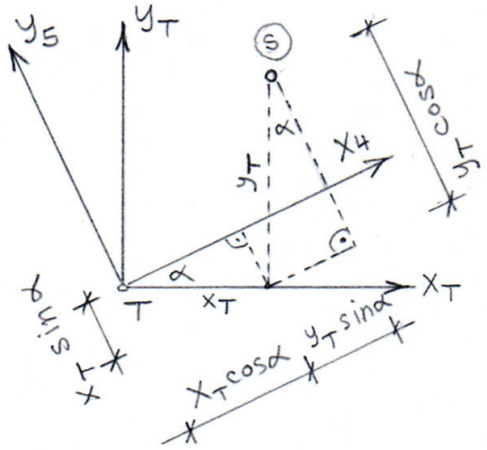
Komponenta na osi y_T je odredjena izrazom:

$$k_{yy} = \sum_{i=1}^{s} x_{Ti}^2 \cdot L_i$$

Vidljivo je da se u općem slučaju ne postiže ortogonalizacija odabranih stanja rotacije. Kako je ovaj slučaj potpuno analogan odredjivanju glavnih osi kod savijanja štapova, prikazati će se ovdje ortogonalizacija ili odredjivanje glavnih osi poprečne rotacije.

U ravnini u kojoj leže zglobovi traže se dvije osi x_4 i y_5 takove da se pri rotaciji oko jedne osi pojavljuje samo moment paralelan s tom osi.

HWPL-85-369



U ravnini $x_T y_T$ uvodi se novi koordinatni sistem $x_4 y_5$ čije ishodište leži u centru uzdužne krutosti, koji je označen s T. Položaj novog sistema odredjen je u sistemu $x_T y_T$ pomoću kuta α od osi x_T do osi x_4.

Kut α odrediti će se tako da za novi sistem iščezava komponenta momenta okomita na os rotacije.

Položaj nekog zgloba S u novom sistemu odrediti će se iz položaja u sistemu $x_t y_T$ pomoću odgovarajućih izraza. Na skici su prikazan dva pravokutna trokuta kojima su hipotenuze koordinate x_T i y_T a linearna kombinacija kateta daje tražene nove koordinate:

$$x_4 = x_T \cdot \cos\alpha + y_T \cdot \sin\alpha$$

$$y_5 = -x_T \sin\alpha + y_T \cdot \cos\alpha$$

Pri jediničnom zaokretu bloka oko osi x_4 održava ravnotežu dopunski koncentrirani moment, koji će se rastaviti na dvije komponente: prva, veličine k_{44} sa strijelicom paralelnom s osi x_4 i druga, veličine k_{54} sa strijelicom paralelnom s osi y_5. Izraz za k_{44} će se prikazati kasnije, kada će svi podaci za njegovo izračunavanje biti poznati.

Svrha uvodjenja novog sistema $x_4 y_5$ je ortogonalizacija stanja zaokreta, t.j. traži se kut α takav da iščezne k_{45}. U izrazu za k_{45} se pojavljuju nove koordinate koje će se izraziti pomoću početnih:

$$k_{45} = -\sum_{i=1}^{s} x_{4i} \cdot y_{5i} \cdot L_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^{s} (x_{Ti}\cos\alpha + y_{Ti}\sin\alpha)\cdot(-x_T\sin\alpha + y_T\cdot\cos\alpha) =$$

$$-\Big[-\Big(\sum_{i=1}^{s} x_{Ti}^2 L_i\Big)\cos\alpha\cdot\sin\alpha - \Big(\sum_{i=1}^{s} x_{Ti}\, y_{Ti}\cdot L_i\Big)\sin^2\alpha +$$

$$+\Big(\sum_{i=1}^{s} x_{Ti}\cdot y_{Ti}\cdot L_i\Big)\cos^2\alpha + \Big(\sum_{i=1}^{s} y_{Ti}^2\cdot L_i\Big)\cdot\cos\alpha,\sin\alpha =$$

$$= (k_{yy} - k_{xx})\cos\alpha\sin\alpha + k_{xy}\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Komponenta k_{45} koja učestvuje u održavanju ravnoteže pri rotaciji oko osi x_4 prikazana je pomoću momenata koji održavaju ravno-

HWPK-85-370

težu pri jediničnim rotacijama oko osi x_T i y_T. Pojavljuju se trigonometrijske funkcije kuta α koje se mogu izraziti kao jeenostavnije funkcije kuta 2α .

$$k_{45} = (k_{yy} - k_{xx}) \frac{\sin 2\alpha}{2} + k_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

Iz uvjeta iščezavanja k_{45} dobiva se direktno izraz za $tg\,2\alpha$:

$$(k_{yy} - k_{xx}) \frac{\sin 2\alpha}{2} + k_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 k_{xy}}{k_{xx} - k_{yy}}$$

Na taj način je odredjen kut α i s njime položaj glavnih osi poprečne rotacije: x_4 i y_5. Kako su momenti koji održavaju ravnotežu bloka pri jediničnim rotacijama oko osi x_T i y_T već odredjeni, onda će se pomoću njih izraziti i momenti koji održavaju ravnotežu bloka pri rotaciji oko glavnih osi.

Rotaciju oko glavne osi x_4 održavati će moment paralelan s tom osi, a veličine će mu biti k_{44}, odredjena izrazom:

$$k_{44} = \sum_{i=1}^{s} y_{5i}^2 \cdot L_i = \sum_{i=1}^{s} (-x_{Ti} \sin\alpha + y_{Ti} \cdot \cos\alpha)^2 \cdot L_i$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} x_{Ti}^2 L_i\right) \sin^2\alpha - \left(2 \sum x_{Ti} y_{Ti} L_i\right) \cos\alpha \cdot \sin\alpha +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{s} y_{Ti}^2 \cdot L_i\right) \cos^2\alpha$$

$$k_{44} = k_{xx} \cos^2\alpha + 2 k_{xy} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + k_{yy} \sin^2\alpha$$

Pri jediničnoj rotaciji oko osi y_5 održavati će ravnotežu bloka dopunski moment paralelan s osi y_5 čija će se veličina označavati s k_{55}, a biti će odredjena izrazom:

$$k_{55} = \sum_{i=1}^{s} x_{4i}^2 \cdot L_i = \sum_{i=1}^{s} (x_{Ti} \cos\alpha + y_{Ti} \sin\alpha)^2 \cdot L_i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} x_{Ti}^2 \cdot L_i\right) \cdot \cos^2\alpha + 2 \left(\sum_{i=1}^{s} x_{Ti} \cdot y_{Ti} L_i\right) \cos\alpha \cdot \sin\alpha +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{s} y_{Ti}^2 \cdot L_i\right) \cdot \sin^2\alpha$$

$$k_{55} = k_{xx} \sin^2\alpha - 2 k_{xy} \cos\alpha \sin\alpha + k_{yy} \cdot \cos^2\alpha$$

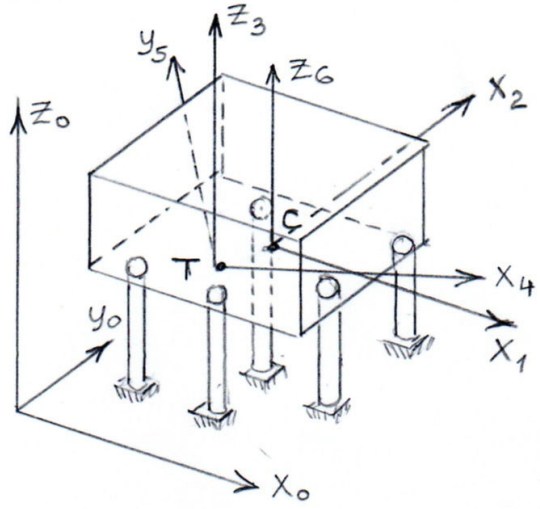
Postoji način da se trigonometrijske funkcije izraze pomoću veličina k_{xx}, k_{xy}, k_{yy} što vodi na čišće izraze, ali se u tom slučaju pojavljuju posebna pravila za pridruživanje novih veličina osima, pa se taj postupak ovdje ne će prikazivati.

HWPK-85-371

Zbrajanjem izraza za k_{44} i k_{55} dobiva se:

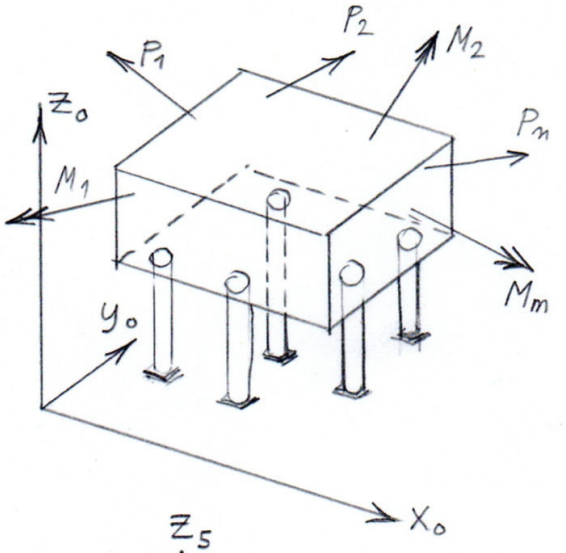
$$k_{44} + k_{55} = k_{xx} + k_{yy}$$

Zbroj komponenti dopunskih momenata paralelnih s odgovarajućim osima rotacije je konstantan za bilo koje dvije medjusobno okomite osi.



Prikazano je odredjivanje šest glavnih osi krutosti: tri glavne osi translacija i tri glavne osi rotacija.

Zbog simetričnosti konzola nije definiran položaj glavnih osi poprečne translacije x_1 i x_2; one leže u ravnini zglobova i prolaze centrom poprečne krutosti C. Odabrane su tako da budu paralelne s početnim osima x_o i y_o.



Zadano opterećenje na blok zamijeniti će se ekvivalentnom grupom od tri koncentrirane sile i tri koncentrirana momenta. Sile će ležati na osima x_1, y_2, z_3 a momenti će biti paralelni s osima x_4, y_5, z_6 i označavati će se $R_1, R_2, R_3, Z_4, Z_5, Z_6$. Ako se svo opterećenje prikaže pomoću koncentriranih sila P_i i koncentriranih momenata M_j slijedi:

$$P_1 = \sum_1^m P_{x_1 i} = \sum_1^n P_{x_o i}$$

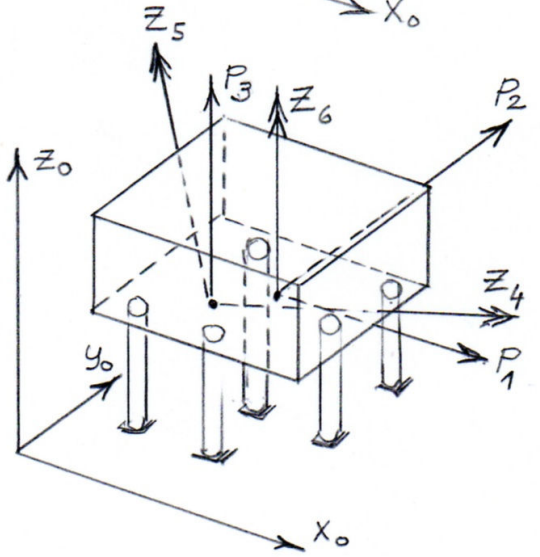
$$P_2 = \sum_1^m P_{y_2 i} = \sum_1^n P_{y_o i}$$

$$P_3 = \sum_1^m P_{z_3 i} = \sum_1^n P_{z_o i}$$

$$Z_4 = \sum_1^n y_{5i} \cdot P_{z_o i} + \sum_1^m M_{x_4 j}$$

$$Z_5 = -\sum_1^n x_{4i} P_{z_o i} + \sum_1^m M_{y_5 j}$$

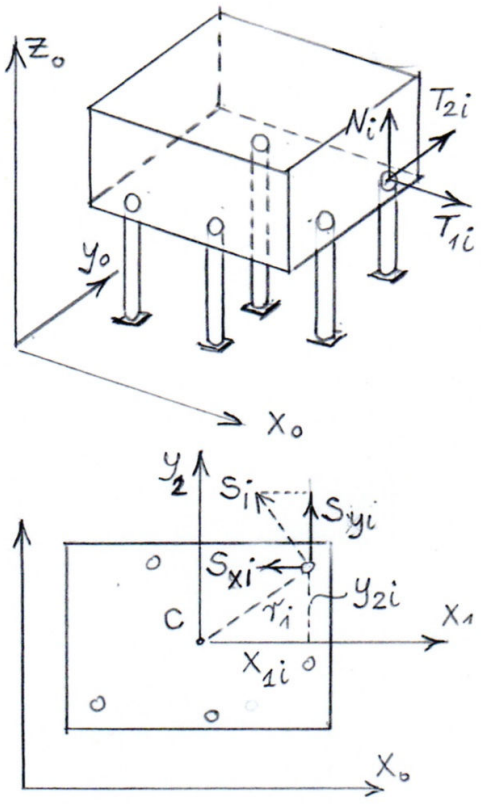
$$Z_6 = \sum_1^n (x_{1i} \cdot P_{y_o i} - y_{2i} \cdot P_{x_o i}) + \sum_1^m M_{z_6 j}$$



Svaka od uvedenih zamjenjujućih sila izazvati će translaciju paralelnu s odgovarajućom osi, dakle paralelnu s pripadnom silom:

$$u_1 = \frac{P_1}{k_{11}}; \quad v_2 = \frac{P_2}{k_{22}}; \quad w_3 = \frac{P_3}{k_{33}}$$

HWPK-85-372



Svaki od uvedenih zamjenjujućih momenata izazvati će rotaciju oko glavne osi s kojom je paralelan:

$$\varphi_4 = \frac{Z_4}{k_{44}}\,; \quad \varphi_5 = \frac{Z_5}{k_{55}}\,; \quad \varphi_6 = \frac{Z_6}{k_{66}}$$

Ukupno stanje dobiti će se superpozicijom parcijalnih stanja. Ukupna sila koja u zglobu djeluje na svaki štap prikazati će se sa tri komponente, paralelne s osima x_1, y_2, z_3. Veličine tih komponenti će se označiti T_{1i}, T_{2i}, N_i kao što je prikazano na skici.

Samo sile koje nastaju prilikom uzdužne rotacije, t.j. rotacije oko osi z_6 nisu paralelne s odabranim komponentama, pa ih treba rastaviti. Sila je kao i ranije označena s S_i, a veličine komponenti sa S_{xi} i S_{yi}. Iz sličnosti trokuta S_i, S_{xi}, S_{yi} s trokutom r_i, y_{2i}, x_{1i} dobiva se:

$$S_{xi} = \frac{y_{2i}}{r_i} S_i\,; \qquad S_{yi} = \frac{x_{1i}}{r_i} \cdot S_i$$

Za jedinični kut zaokreta oko osi z_6 veličina sile S_i je $k^i_{11} \cdot r_i$ pa će veličine komponenti iznositi:

$$S_{xi} = k^i_{11} \cdot y_{2i}\,; \qquad S_{yi} = k^i_{11} \cdot x_{1i}$$

Sila S_{xi} je prikazana sa strijelicom koja je suprotna od strijelice uz T_{1i} pa će taj doprinos sili T_{1i} biti negativan.

Sada se mogu postaviti izrazi za ukupna djelovanja na zglobove stupova:

$$T_{1i} = k^i_{11}\,(u_1 - y_{2i} \cdot \varphi_6)$$

$$T_{2i} = k^i_{11}\,(v_2 + x_{2i} \cdot \varphi_6)$$

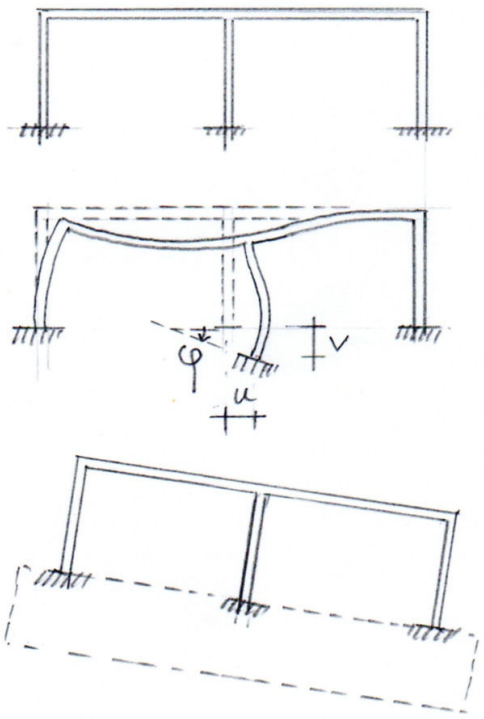
$$N_i = L_i \cdot (w_3 + y_{5i}\varphi_4 - x_{4i}\varphi_5)$$

HWPK-85-373

Prisilni pomaci i zaokreti spojeva s podlogom

U svim primjerima koji su dosada prikazivani pretpostavljalo se da je podloga nedeformabilna. Uvodjenje takove pretpostavke je strogo gledano, opravdano samo u manjem broju praktičnih slučajeva kao što je temeljenje na čvrstim stijenama ili nadogradjivanje na vrlo krute konstrukcije.

Kako uzimanje u obzir nedeformabilnosti podloge osjetno povećava opseg proračuna, dopušta se u odredjenim situacijama da se uvede pretpostavka o nedeformabilnosti, ali se mora provesti proračun konstrukcije za prisilni, unaprijed zadani pomak i/ili zaokret spojeva s podlogom.



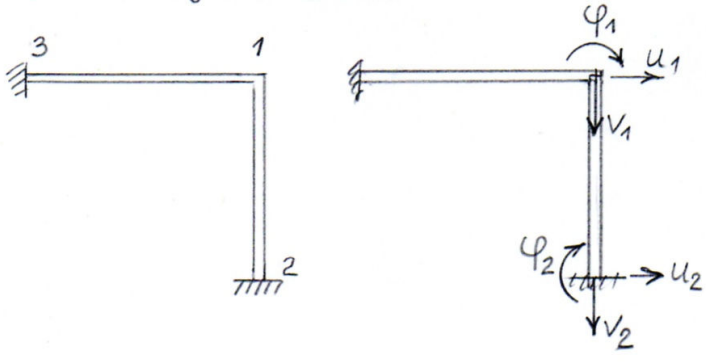
Konkretni podaci o prislinim pomacima i zaokretima odredjuju se u području koje se bavi konkretnim konstrukcijama: masivnim, metalnim, drvenim.

Na skicama je prikazan sistem u neopterećenom stanju i u stanju koje je nastalo od prisilnog pomaka i zaokreta jednog spoja s podlogom.

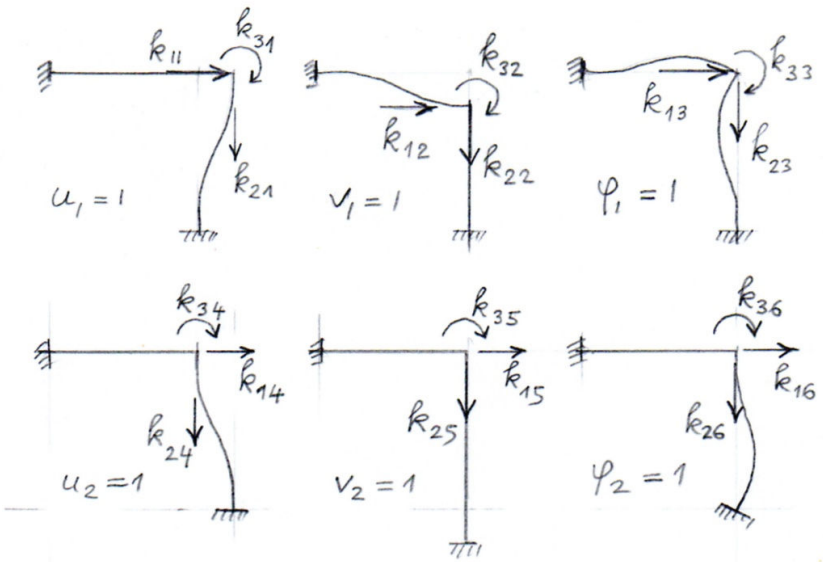
Ukoliko se dio podloge na kojem je promatrani sistem, pomiče kao kruto, nedeformabilno tijelo, to ne će izazvati promjenu mehaničkog stanja sistema koji je spojen s podlogom.

HWPK-85-374

U metodi pomaka se lako uvodi utjecaj prisilnih pomaka i zaokreta. Svaka komponenta prisilnog pomaka ili zaokreta uvodi se u postupak kao i nepoznati kinematski parametri. Jednadžbe metode pomaka se postavljaju na uobičajeni način. Doprinosi prisilnih pomaka i zaokreta se prenose na desnu stranu jednadžbi i one se rješavaju na uobičajeni način.



Postupak će se pokazati na jednostavnom primjeru: polu-okviru koji je kruto spojen s podlogom. Kao nedeformabilni element uvodi se čvor na mjestu loma osi (na skici označen s 1). Promatrati će se prisilni pomaci i zaokreti spoja 2, pa će se granični presjek prema podlozi uvesti kao drugi nedeformabilni element (na skici označen s 2).



Prikazana su jedinična stanja pomaka i zaokreta čvora i presjeka 2.

Dopunska djelovanja su ucrtana prema konvenciji predznaka metode pomaka: u konkretnom slučaju neke će veličine iščezavati, a neke će biti manje od nule.

Jednadžbe metode pomaka t.j. uvjeti ekvivalencije dopunskih djelovanja zadanim vanjskim djelovanjima na čvor, glase:

$$k_{11}u_1 + k_{12}v_1 + k_{13}\varphi_1 + k_{14}\cdot u_2 + k_{15}\cdot v_2 + k_{16}\varphi_2 = -k_{10} + H_1$$

$$k_{21}u_1 + k_{22}v_2 + k_{23}\varphi_1 + k_{24}u_2 + k_{25}\cdot v_2 + k_{26}\varphi_2 = -k_{20} + D_1$$

$$k_{31}u_1 + k_{32}v_2 + k_{33}\varphi_1 + k_{34}u_2 + k_{35}v_2 + k_{36}\varphi_2 = -k_{30} + Z_1$$

Kako su pomaci spoja 2 unaprijed zadani, odbiti će se njihovi doprinosi od lijeve i desne strane jednadžbi, pa će se dobiti oblik:

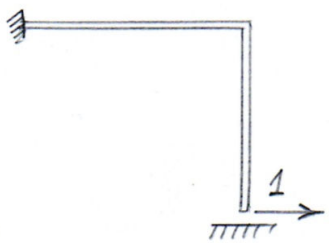
$$k_{11}u_1 + k_{12}v_1 + k_{13}\varphi_1 = -k_{10} - k_{14}\cdot u_2 - k_{15}\cdot v_2 - k_{16}\cdot\varphi_2 + H_1$$

$$k_{21}\cdot u_1 + k_{22}\cdot v_2 + k_{23}\cdot\varphi_1 = -k_{20} - k_{24}\cdot u_2 - k_{25}\cdot v_2 - k_{26}\cdot\varphi_2 + D_1$$

$$k_{31}\cdot u_1 + k_{32}\cdot v_2 + k_{33}\cdot\varphi_1 = -k_{30} - k_{34}\cdot u_2 - k_{35}\cdot v_2 - k_{36}\cdot\varphi_2 + Z_1$$

Rješavanje i odredjivanje konačnog stanja provodi se na uobičajeni način.

Rješenje sistema za koji su zadani prisilni pomaci i /ili zaokreti može se kontrolirati deformacionom kontrolom. Postupak je najjednostavniji ako se osnovni sistem za provedbu deformacione kontrole odabere tako, da prekidi omogućuju i one pomake i zaokrete koji su **na preodredjenom sistemu zadani.** Ako mjerno opterećenje čini sila ili moment koji odgovara prisilnom pomaku ili zaokretu, mora integralni izraz dati upravo taj pomak ili zaokret.



Za prikazani primjer odabran je osnovni sistem sa skice lijevo. Ukoliko se rezne sile prikazanog jediničnog stanja označe s m^D, t^D, n^D, glasiti će kontrolni izraz:

$$\int \frac{M m^D ds}{EI} + \int \frac{\alpha T \cdot t^D}{GF} ds + \int \frac{N n^D \cdot ds}{EF} = u_2$$

HWPK-85-375

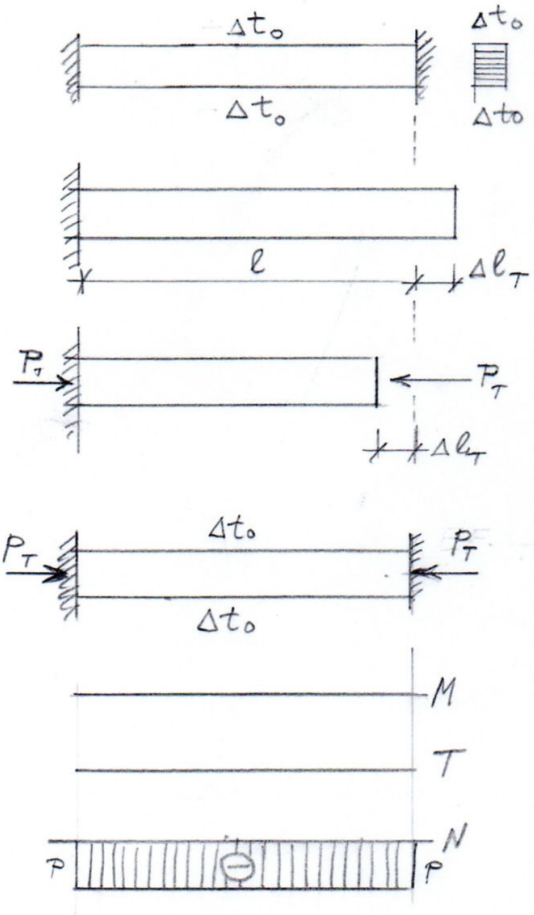
Promjena temperature

Promjena temperature nekih elemenata preodredjenog štapnog sistema izazvati će pojavu reznih sila, pa će se ovdje prikazati postupak proračunavanja preodredjenih sistema uz promjenu temperature.

Postupak će se provesti metodom pomaka i to za najjednostavniji slučaj: štapovi su prizmatični, promjena je jednaka za sve presjeke istog štapa, a raspored promjene duž presjeka je linearan.

Za metodu pomaka treba odrediti stanja pune upetosti koja nastaju pri promjeni temperature. Promatrati će se nekoliko slučajeva.

a) Obostrano kruto spojen štap pri konstantnoj promjeni temperature.



Promjena temperature će se prikazati dijagramom definiranim na poprečnom presjeku. Kod ravnih štapova se promatraju promjene koje su konstantne duž okomice na ravninu, pa je dovoljno prikazati presjek dijagrama s ravninom štapa. Pri konstantnoj promjeni duž presjeka biti će promjena konstantna za cijeli štap. Slučaj obostrano kruto spojenog štapa će se riješiti **neformalno po metodi sila.**

Ako se zamisli da je na desnom kraju uveden prekid, štap se može slobodno promijeniti pod djelovanjem temperature: pri pozitivnoj promjeni će se izdužiti za $\Delta\ell_T$. Izduženje je odredjeno izrazom:

$$\Delta\ell_T = \alpha_T \cdot \Delta t_0 \cdot \ell$$

Pri čemu je α_T koeficijent termičkog istezanja karakterističan za svaki materijal.

Treba odrediti silu P_t pod čijim djelovanjem će se štap upravo skratiti za $\Delta\ell_T$. Superpozicijom stanja istezanja i stanja zasebnog djelovanja sile P_t dobiva se rješenje.

Veza sile i pomaka uvedena je u metodi pomaka:

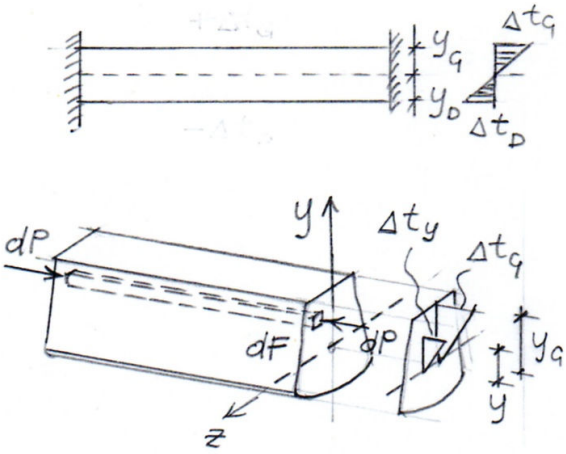
$$P_T = \frac{EF}{\ell} \cdot \Delta\ell_T = \frac{EF}{\ell} \cdot \alpha_T \cdot \Delta t_0 \cdot \ell = EF \cdot \alpha_t \cdot \Delta t_0$$

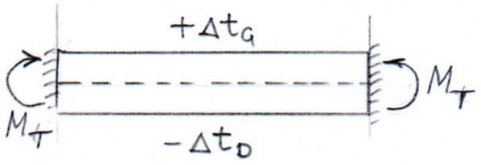
Bitno je uočiti da sila ne ovisi o duljini štapa. Jasno je da prikazani slučaj obuhvaća i smanjivanje temperature koje će se uvesti s negativnim predznakom, pa će negativna veličina P_t značiti vlačnu silu koja djeluje na krajeve štapa.

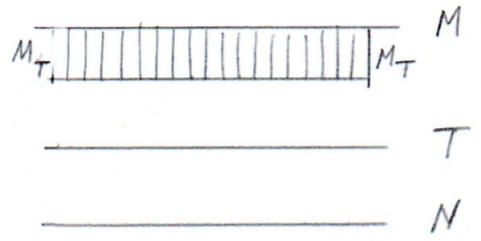
Na skicama su prikazani dijagrami reznih sila za stanje pune upetosti uz konstantnu promjenu temperature.

HW PK-85-376

b) Obostrano kruto spojen štap pri težišnoj linearnoj promjeni temperature.







Promjena temperature je linearno rasporedjena po presjeku, ali tako da u težištu nema promjene temperature. Isto će tako promjena iščezavati za sve točke koje se nalaze na okomici na ravninu sistema koja prolazi težištem.

Taj će se slučaj izvesti iz prethodnog. Promjena temperature je zadana u točki G čija je koordinata y_G.

U proizvoljnoj točki čija je koordinata y promjena temperature će biti Δt_y i odrediti će se iz sličnosti trokuta:

$$\Delta t_y = \frac{\Delta t_G}{y_G} \cdot y$$

Za neizmjerno tanki dio štapa odredjen točkom y može se pretpostaviti da je promjena temperature konstantna pa se on nalazi u istom stanju kao i obostrano upet štap pri konstantnoj promjeni. Odrediti će se pripadna sila dP:

$$dP = E\,dF \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t_G}{y_G} \cdot y$$

Doprinos svih infinitezimalnih štapova koji čine zadani štap odrediti će se plošnim integralom. Najprije će se odrediti rezultanta:

$$R = \int_F dP = E \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t_G}{y_G} \int_F y\,dF = 0$$

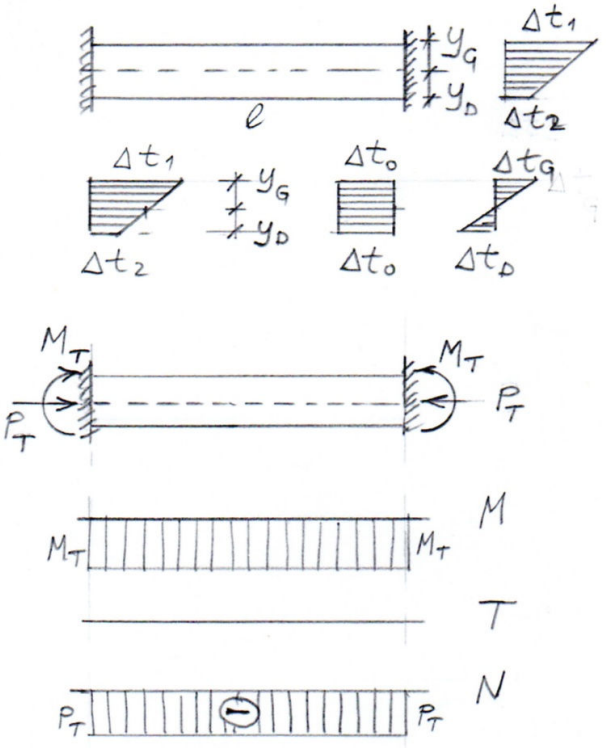
Rezultanta iščezava jer se ishodište y nalazi u težištu. Prema tome će se djelovanje na krajevima kruto spojenog štapa svoditi na koncentrirane momente čije veličine će se odrediti pomoću momenta oko osi z.

$$M_T = \int y\,dP = E \cdot \alpha_t \frac{\Delta t_G}{y_G} \int y^2 dF = E \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t_G}{y_G} \cdot I_{zz}$$

Momenti koji održavaju stanje kruto spojenog štapa pri težišnoj lineranoj promjeni temperature proporcionalni su momentu tromosti poprečnog presjeka na težišnu os i ne ovise o dužini štapa.

HWPK-85-377

c) Obostrano kruto spojen štap pri proizvoljnoj linearnoj promjeni temperature.



Opći slučaj linearne promjene rastaviti će se na dva stanja: stanje konstantne promjene i stanje težišne linearne promjene temperature. Podaci se odredjuju iz geometrijskih odnosa dijagrama.

$$\Delta t_o = \frac{\Delta t_1 \cdot y_D + \Delta t_2 \cdot y_G}{y_D + y_G}$$

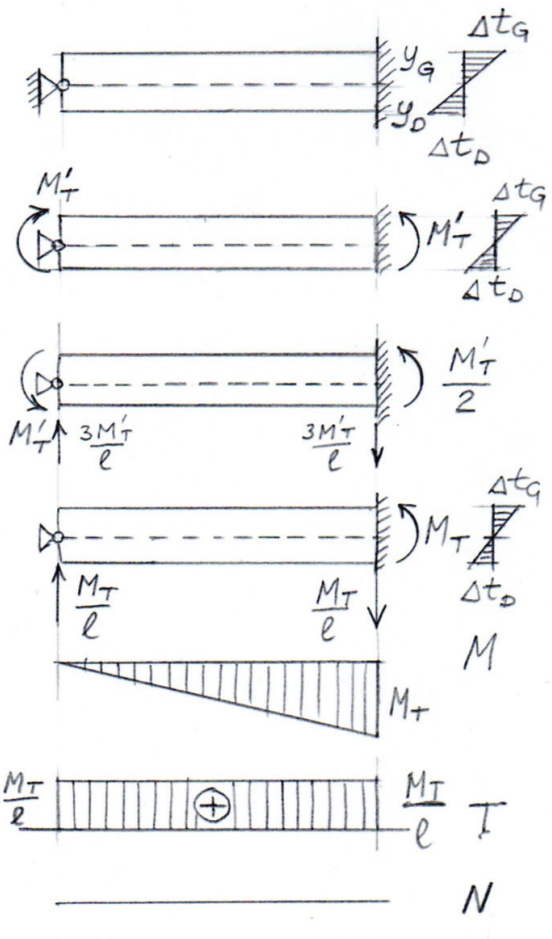
$$\Delta t_G = \Delta t_1 - \Delta t_o$$

$$P_T = E \cdot F \cdot \alpha_t \cdot \Delta t_o$$

$$M_T = E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t_G}{y_G}$$

7.V.86 HWPK-85-378

d) Štap spojen zglobno na jednom a kruto na drugom kraju.



Štap spojen zglobno na jednom, a kruto na drugom kraju ponaša se pri konstantnoj promjeni temperature jednako kao obostrano kruto spojeni štap (slučaj a).

Stanje koje nastaje pri težišnoj linearnoj promjeni temperature izvesti će se neformalno metodom pomaka.

Zamišlja se da na presjek uz zglob djeluje moment M_T' tako da se štap nalazi u istom stanju kao obostrano kruto spojen.

Tom stanju će se superponirati stanje u kojemu na presjek uz zglob djeluje suprotan moment veličine M_T' Pri tome se na kruto spojenom kraju pojavljuje moment $M_T'/2$

U konačnom stanju se na kruto spojenom kraju pojavljuje moment M_T koji je 50% veći od momenta za obostrano kruto spojen štap:

$$M_T = \frac{3 M_T'}{2} = \frac{3 E I \cdot \alpha_T \Delta t_G}{2 y_G}$$

Poprečna sila se odredjuje iz uvjeta ravnoteže: $T = M_T/\ell$

Inženjerska metoda pomaka

Inženjerska metoda pomaka je približna verzija metode pomaka u kojoj se zanemaruju promjene dužine štapova, a može se primijeniti samo na sisteme kod kojih su rotacije nedeformabilnih elemenata moguće bez promjene dužine štapova i kod kojih se sve uzdužne sile u štapovima mogu izračunati isključivo iz suma projekcija sila koje djeluju na nedeformabilne elemente.

Nepoznanice inženjerske metode pomaka su zaokreti svih nedeformabilnih elemenata, priraštaji uzdužnih sila u svim štapovima, kao i oni nezavisni pomaci koji su mogući bez promjene duljine štapnih elemenata.

U većini praktičnih slučajeva se može zasebno postaviti upravo toliko jednadžbi koliko ima nepoznatih kinematskih parametara i to na taj način da se u njima i pojavljuju samo ti parametri, pa se te jednadžbe mogu zasebno riješiti. Te jednadžbe sadrže momentne uvjete svih nedeformabilnih elemenata, a u nekim slučajevima i linearne kombinacije nekih jednadžbi projekcija sila.

Nakon zasebnog rješavanja prve grupe jednadžbi, određuju se iz preostalih priraštaji uzdužnih sila. U većini slučajeva je shema članova uz priraštaje uzdužnih sila trokutna, pa se iz svake jednadžbe može odrediti po jedna nepoznanica. Zbog toga se taj dio postupka često i ne smatra rješavanjem jednadžbi.

Prednost inženjerske metode pomaka leži u manjem broju jednadžbi koje se simultano rješavaju.

Nedostatak metode je ograničena primjenjivost, gubitak točnosti zbog zanemarivanja promjene duljine štapova i u nekim slučajevima; pojava složenih jediničnih stanja.

Iako je iz definicije jasno ograničenje primjene inženjerske metode pomaka, pogodno je da se uvede definirani postupak za prepoznavanje štapnih sistema sa stanovišta primjene inženjerske metode pomaka.

Postupak će se uvesti samo za štapne sisteme koji se po metodi pomaka rješavaju uvođenjem krutih čvorova, dakle beskonačno malih nedeformabilnih elemenata.

U tom slučaju je pitanje mogućnosti određivanja uzdužnih sila samo iz uvjeta projekcija sila koje djeluju na čvorove potpuno jednako pitanju o mogućnosti određivanja sila u zglobnim štapovima rešetki isključivo iz uvjeta ravnoteže zglobnih čvorova.

Zbog toga će se zadanom štapnom sistemu pridružiti zamišljena rešetka koja iz zadanog sistema nastaje tako da se svi kruti čvorovi zamijene zglobnim čvorovima. Ta rešetka će se nazivati "pridružene rešetka". U njoj će se spojevi spodlogom koji ne omogućiju rotaciju zamijeniti s odgovarajućim zglobovima.

HWPK-85-379

Poznato je da se sve sile u štapovima rešetke mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže kod odredjenih rešetki i kod rešetki koje su mehanizmi u užem smislu, pa će se štapni sistemi sa stanovišta primjenjivosti inženjerske metode pomaka dijeliti na tri skupa:

a) Nerješivi; to su sistemi kojima je pridružena rešetka preodredjena ili je pridružena rešetka mehanizam koji sadrži preodredjenost.

b) Nepomični; to su sistemi kojima je pridružena rešetka odredjena. Kao kinematski parametri se pojavljuju samo zaokreti čvorova koji se mogu zasebno odrediti samo iz momentnih jednadžbi svih čvorova.

c) Pomični; to su sistemi kod kojih je pridružena rešetka mehanizam u užem smislu. Kao kinematski parametri se osim svih zaokreta čvorova pojavljuju i nezavisni pomaci koji su mogući bez promjene duljine štapova. Momentne jednadžbe nisu dovoljne za odredjivanje svih kinematskih parametara, pa se odabiru takove linearne kombinacije jednadžbi projekcija da se u njima pojavljuju samo kinematski parametri.

HWPK-85-380

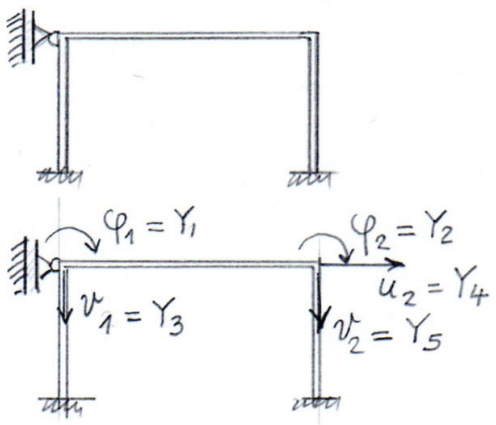
Rješavanje nepomičnih sistema

Nepomični štapni sistemi su oni kod kojih se zamjenom krutih čvorova zglobnima dobiva odredjena rešetka (pridružena rešetka je odredjena). Kao kinematski parametri se pojavljuju samo zaokreti čvorova koji se mogu zasebno odrediti iz momentnih jedandžbi svih čvorova.

Iz sume projekcija čvorova, odnosno iz ekvivalentnih jedandžbi mogu se odrediti svi prirasti uzdužnih sila.

Ako je pridružena rešetka ulančena biti će shema članova uz prirast uzdužnih sila trokutna, pa će se iz svake jednadžbe moći direktno odrediti po jedna nepoznanica uz uvrštavanje prethodno odredjenih nepoznanica.

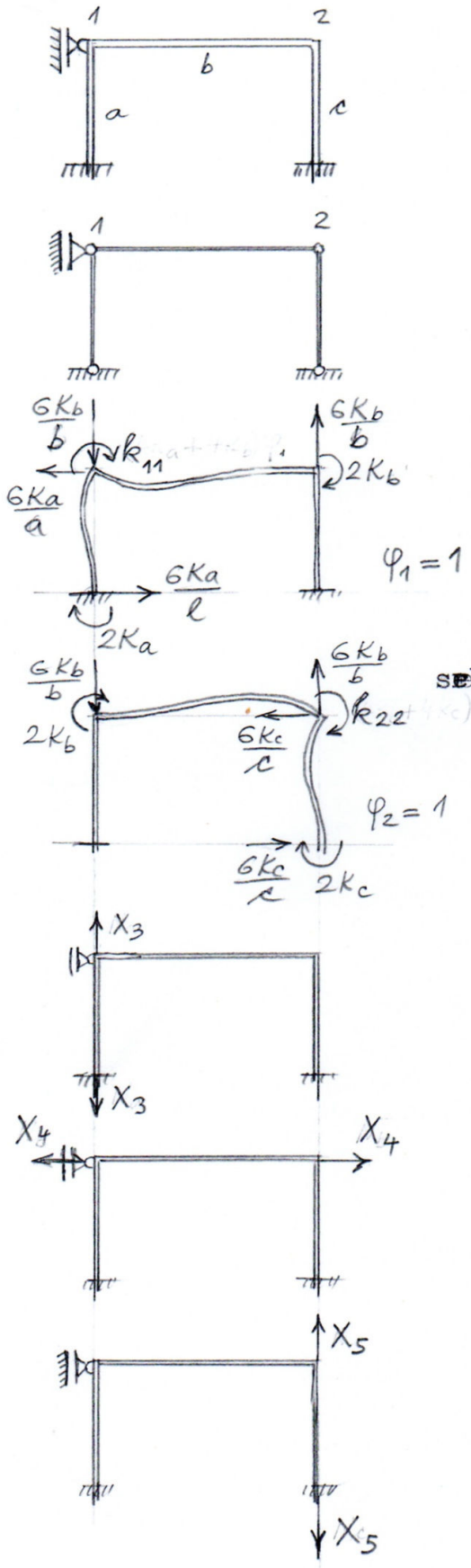
Postupak će se prikazati na jednostavnim primjerima.



Promatra se pravokutni okvir s jednim poljem. Stupovi su kruto spojeni s podlogom i greda je spojena s podlogom s kliznim zglobom.

Sistem je 4 puta preodredjen; za rješenje po metodi sila trebalo bi riješiti 4 simultane jednadžbe.

Prikazan je početak rješenja po metodi pomaka: treba uvesti pet kinematskih parametara, koji su označeni na dva načina. Numeracija jedinstvene oznake će biti potrebna i kod rješe-



nja po inženjerskoj metodi pomaka. Radi preglednosti je ponovno prikazan zadani sistem, a uz njega i pridružena rešetka; vidljivo je da je ta rešetka ulančena: čvor 1 je spojen kliznim zglobom i štapom"a", a čvor 2 je spojen štapovima "b" i "c".

Uz pretpostavku o nepromjenjivosti duljina štapova su čvorovi nepomični, pa kao kinematski parametri preostaju samo zaokreti čvorova.

Prikazana su jedinična stanja zaokreta. U njima se pojavljuju kinematski parametri φ_1 i φ_2.

Preostale tri nepoznanice su prirasti uzdužnih sila u štapovima, čije su veličine označene s X_3, X_4, X_5. Prikazana su zasebna djelovanja tih sila. Najlakše je zamisliti da su prikazana djelovanja na krajnje presjeke štapova, a intuitivno se mogu prihvatiti i kao dopunska djelovanja za ekvivalencijsku formulaciju.

Rješenje sistema dobiva se kao linearna kombinacija prikazanih jediničnih i zasebnih djelovanja. Uvjeti ravnoteže čvorova postaviti će se prema numeraciji jedinstvenih oznaka nepoznanica za metodu pomaka; dakle najprije momentne jednadžbe čvorova.

$$k_{11}\varphi_1 + 2K_b\varphi_2 = -k_{10} + Z_1$$

$$2K_b\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 = -k_{20} + Z_2$$

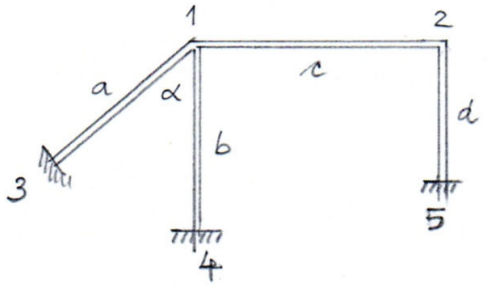
$$\frac{6K_b}{b}\varphi_1 + \frac{6K_b}{b}\varphi_2 - X_3 = -k_{30} + D_1$$

$$-\frac{6K_c}{c}\varphi_2 + X_4 = -k_{40} + H_1$$

$$-\frac{6K_b}{b}\varphi_1 - \frac{6K_b}{b}\varphi_2 - X_5 = -k_{50} + D_2$$

Vidljivo je da se simultano moraju riješiti samo prve dvije jednadžbe. Dobiveni zaokreti uvrstiti će se preostale jednadžbe, iz kojih se lako odredjuju prirasti uzdužnih sila X_i.

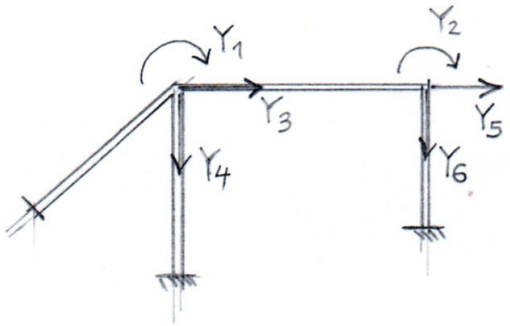
HWPK-95-381



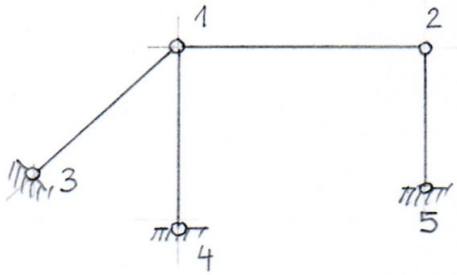
Kao drugi primjer za nepomični sistem odabran je pravokutni okvir s priključenim kosnikom.

Sistem je 6 puta preodredjen; pri rješavanju po metodi sila trebalo bi riješiti šest simultanih jednadžbi.

Za rješavanje po metodi pomaka uvode se dva kruta čvora: jedan na grananju (na skici:1)i drugi na lomu osi (na skici: 2).

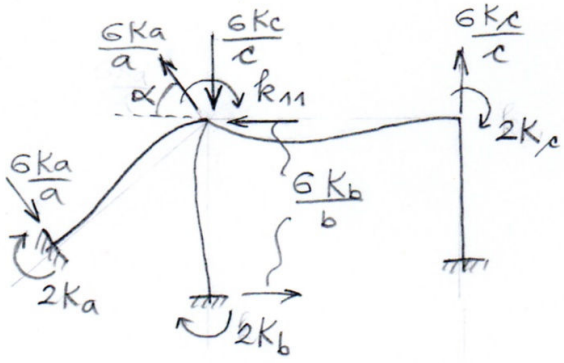


Radi jedinstvenog obilježavanja članova jednadžbi, kao i radi usporedbe s inženjerskom metodom uvesti će se kinematski parametri Y_i pomoću kojih bi se postavilo rješenje prema osnovnoj formulaciji metode pomaka. To bi rješenje vodilo na sistem od 6 jednadžbi.



Za rješenje po inženjerskoj metodi pomaka treba uvesti pridruženu rešetku, za koju se lako vidi da je ulančena pa prema tome i odredjena, što znači da je zadani sistem nepomičan.

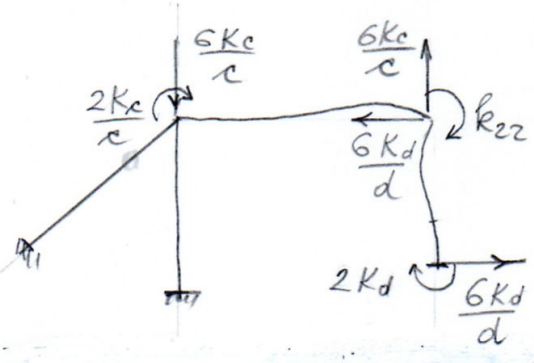
Kod nepomičnih sistema su kinematski parametri samo zaokreti čvorova: ovdje će se označiti s φ_1 i φ_2 .



Prikazana su stanja jediničnih zaokreta. Na osnovu njih se mogu postaviti momentni uvjeti za čvorove:

$$(4K_a + 4K_b + 4K_c)\,\varphi_1 + 2K_c\,\varphi_2 = -k_{10} + Z_1$$

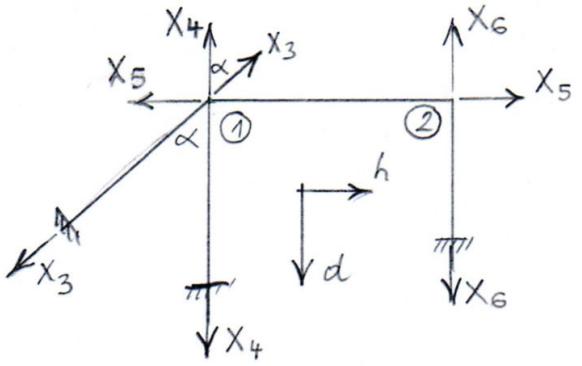
$$2K_c\,\varphi_1 + (4K_c + 4K_d)\,\varphi_2 = -k_{20} + Z_2$$



Rješavanjem tih jednadžbi odredjuju se kutevi φ_1 i φ_2 pa se mogu odrediti poprečne sile koje djeluju na krajeve štapova.

Prirasti uzdužnih sila odrediti će se iz preostalih uvjeta ravnoteže čvorova.

HWPK-85-382



Djelovanja svih prirasta uzdužnih sila na krajeve štapova prikazana su na istoj skici.

Postaviti će se suma projekcija na os h i d za čvor 1, te suma projekcija na os h i d za čvor 2.

Numeracija sila pune upetosti odgovara numeraciji pomaka Y_i .

$$\left(-\frac{6K_a}{a}\cos\alpha-\frac{6K_b}{b}\right)\varphi_1 \qquad +\sin\alpha\cdot X_3 \qquad -X_5 = -k_{30}+H_1$$

$$\left(-\frac{6K_a}{a}\sin\alpha+\frac{6K_c}{c}\right)\varphi_1+\frac{6K_c}{c}\varphi_2 \qquad -\cos\alpha\, X_3 - X_4 = -k_{40}+D_1$$

$$-\frac{6K_d}{d}\varphi_2 \qquad +X_5 = -k_{50}+H_2$$

$$-\frac{6K_c}{c}\varphi_1-\frac{6K_c}{c}\varphi_2 \qquad -X_6 = -k_{60}+D_2$$

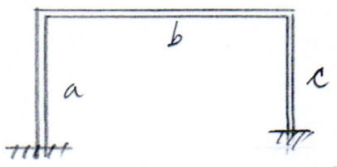
Zbog ulančenosti pridružene rešetke može se u svakom koraku odrediti po jedna nepoznanica: iz treće jednadžbe se direktno odredjuje X_5, iz četvrte X_6, nakon uvrštavanja X_5 u prvu jednadžbu odredjuje se X_3 i konačno nakon uvrštavanja X_3 u drugu jedandžbu odredjuje se X_4.

Supepozicija se provodi na poznati način: stanju pune upetosti pribrajaju se stanja zasebnih zaokreta i stanje prirasta uzdužnih sila. Crossov postupak je pogodan za rješavanje nepomičnih sistema.

Rješavanje pomičnih sistema

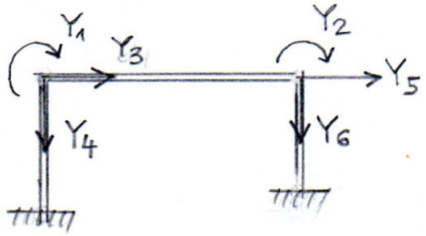
Pomični štapni sistemi su oni kod kojih se zamjenom krutih čvorova zglobovima dobiva mehanizam u užem smislu. Kao kinematski parametri se pojavljuju zaokreti svih čvorova i svi nezavisni pomaci koji su mogući bez promjene duljine štapova.
Za nezavisno odredjivanje svih kinematskih parametara treba osim svih momentnih jednadžbi čvorova uvesti i toliko linearnih kombinacija jednadžbi projekcija koliko ima nezavisnih pomaka.

Postupak će se prikazati na jednostavnim primjerima.



Promatra se pravokutni okvir s jednim poljem. Stupovi su kruto spojeni s podlogom.

Sistem je tri puta preodredjen; za reješenje po metodi sila treba riješiti tri jednadžbe.



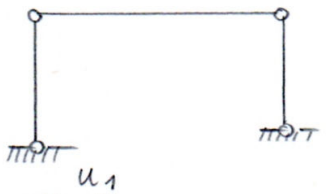
Za rješavanje po metodi pomaka uvode se dva kruta čvora: na oba loma osi.

Radi jedinstvenog obilježavanja članova jednadžbi i usporedbe s ostalim načini-

HWPK-85-383

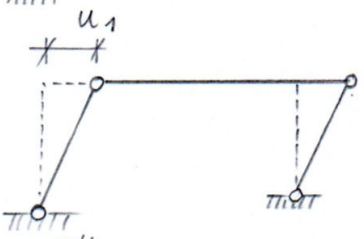
ma rješavanja uvesti će se kinematski parametri za osnovnu formulaciju metode pomaka. Potrebna su dva zaokreta i četiri translacije, pa bi rješenje vodilo na sistem od 6 jednadžbi. Za postavljanje točnog rješenja u smislu štapne statike metdoda sila je u ovom slučaju bitno efikasnija.

Rješenje po inženjerskoj metodi pomaka biti će konkurentno rješenju po metodi sila.

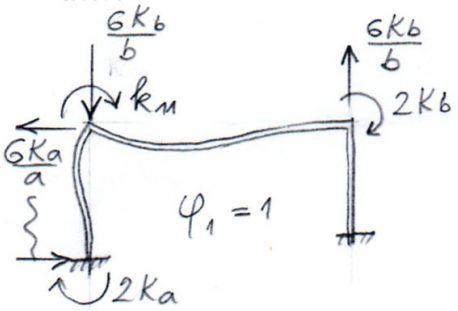


Za rješenje po inženjerskoj metodi pomaka treba uvesti pridruženu rešetku.

Vidljivo je da je pridružena rešetka mehanizam u užem smislu.

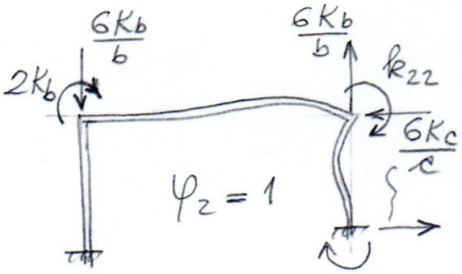


Za potpuno odredjivanje položaja pridružene rešteke u ravnini treba zadati još jedan podatak: ovdje je odabran pomak u_1 čvora 1. Taj pomak će biti nepoznati kinematski parametar inženjerske metode pomaka.

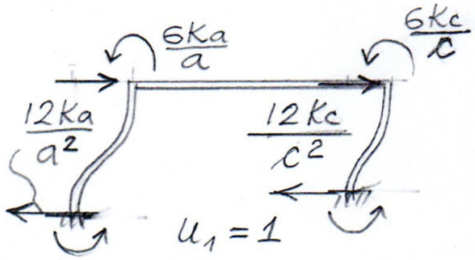


Za rješenje treba postaviti tri jedinična stanja: dva stanja jediničnih zaokreta i jedno stanje pomaka.

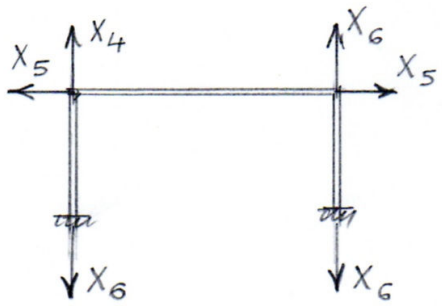
Jedinična stanja zaokreta su postavljena na poznati način i pojavljuju se u istom obliku i u osnovnoj formulaciji metode pomaka.



Stanje jediničnog nezavisnog pomaka u inženjerskoj metodi pomaka se može povezati s jediničnim stanjima osnovne formulacije. Zbog uvedene pretpostavke o nepromjenjivosti duljina štapova mora se uz pomak u_1 u ovom sistemu pojaviti i pomak $u_2 = u_1$.



Značí da je dobiveno stanje pomaka superpozicija jediničnih stanja $u_1 = 1$ i $u_2 = 1$ iz osnovne formulacije metode pomaka.



Djelovanje svih prirasta uzdužnih sila prikazano je na istoj skici jer se utjecaji pojedinih nepoznanica ne preklapaju i u superpoziciji se svi zajedno mogu promatrati kao jedno parcijalno stanje.

HWPK-85-384

Jednadžbe inženjerske metode pomaka postavljaju se na potpuno isti način kao i jednadžbe osnovne formulacije: promatra se ravnoteža čvorova ili ekvivalencija dopunskih sila zadanim vanjskim silama.

Kinematski parametri Y_i uvedeni su na početku i radi preglednog postavljanja jednadžbi i označavanja doprinosa stanja pune upetosti koje je dakako jednako u obje formulacije.

Jednadžbe će se prikazati tabelarno, a u prvom stupcu će biti skica sistema s simbolom rotacije ili vektorom, koji simboliziraju momentnu jednadžbu odnosno jednadžbu projekcija.

	φ_1	φ_2	u_1	X_4	X_5	X_6	DESNA STRANA
I	k_{11}	$2K_b$	$-\frac{6K_a}{a}$	0	0	0	$-k_{10}+Z_1$
II	$2K_b$	k_{22}	$-\frac{6K_c}{c}$	0	0	0	$-k_{20}+Z_2$
III	$-\frac{6K_a}{a}$	0	$\frac{12K_a}{a^2}$	0	-1	0	$-k_{30}+H_1$
IV	$\frac{6K_b}{b}$	$\frac{6K_b}{b}$	0	-1	0	0	$-k_{40}+D_1$
V	0	$-\frac{6K_c}{c}$	$\frac{12K_c}{c^2}$	0	$+1$	0	$-k_{50}+H_2$
VI	$-\frac{6K_b}{b}$	$-\frac{6K_b}{b}$	0	0	0	-1	$-k_{60}+D_2$

Vidljivo je da se kinematski parametri pojavljuju izolirano samo u prvoj i drugoj jednadžbi, a u svim perostalima pojavljuju se i prirasti uzdužnih sila X_i. U ovom specijalnom slučaju se lako postavlja još jedna daljnja jednadžba u kojoj se pojavljuju samo kinematski parametri: zbrajanjem jednadžbi III i V dobiti će se jednadžba u kojoj se ne pojavljuju X_i. Ta će se jednadžba označiti s III′. Prema tome treba simultano riješiti sistem jednadžbi:

$$\text{I};\quad k_{11}\varphi_1 + 2K_b\varphi_2 - \frac{6K_a}{a}u_1 = -k_{10}+Z_1$$

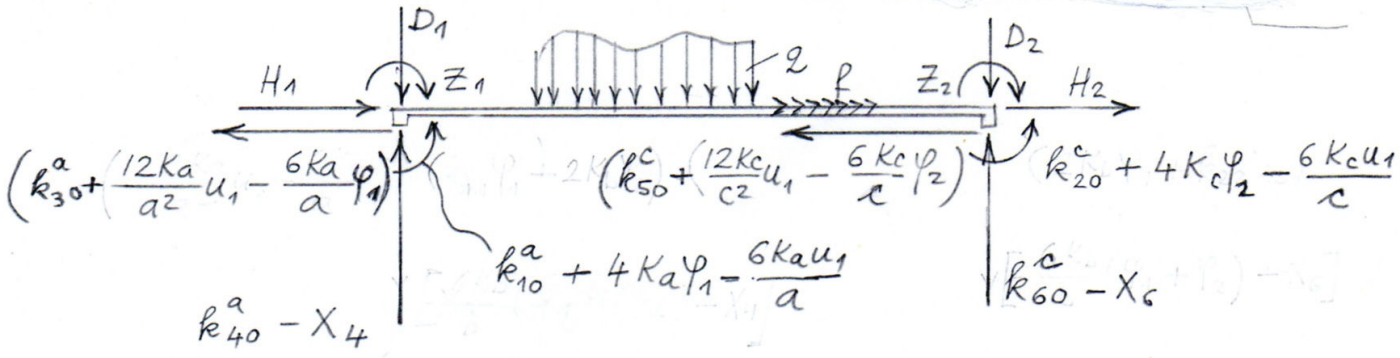
$$\text{II};\quad 2K_b\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 - \frac{6K_c}{c}u_1 = -k_{20}+Z_2$$

$$\text{III}';\quad -\frac{6K_a}{a}\varphi_1 - \frac{6K_c}{c}\varphi_2 + \left(\frac{12K_a}{a^2}+\frac{12K_c}{c^2}\right)u_1 = -k_{30}-k_{50}+H_1+H_2$$

Dobivene vrijednosti za φ_1, φ_2 i u_1 uvrstiti će se u jednadžbe IV, V, VI iz kojih se direktno dobivaju prirasti uzdužnih sila.

HWPK-85-385

U ovom specijalnom slučaju može se jednadžba III´interpretirati i kao jedan od uvjeta ravnoteže grede zajedno s čvorovima.



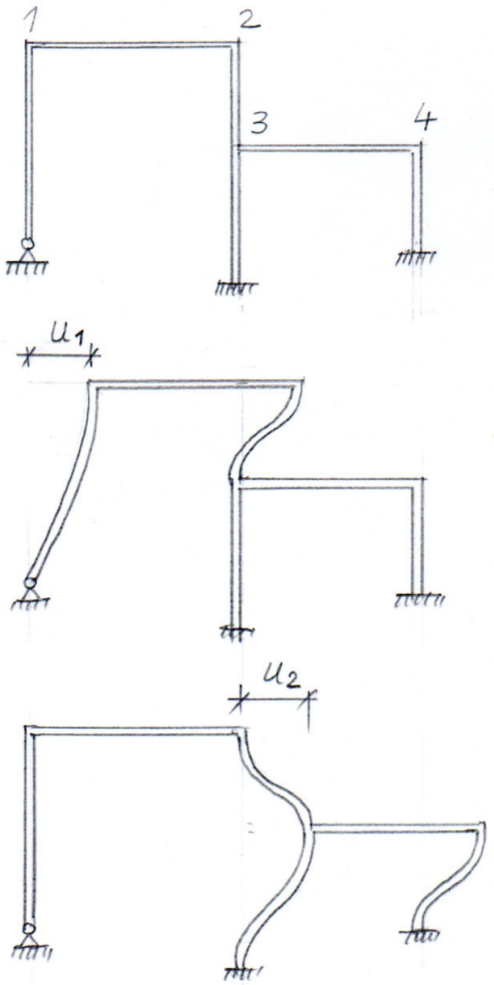
Na skici je greda prikazana u nešto većem mjerilu nego na prethodnim skicama. Direktno djelovanje na gredu je simbolički pri kazano distribuiranim djelovanjima q i f.

Iz uvjeta iščezavanja sume projekcija svih sila na os h dobiva se:

$$-\frac{6Ka}{a}\varphi_1-\frac{6Kc}{c}\varphi_2+\left(\frac{12Ka}{a^2}+\frac{12Kc}{c^2}\right)u_1=-k^a_{30}-k^c_{50}+L_{RH}+H_1+H_2$$

Pri tome je L_{Rh} projekcija rezultirajuće sile opterećenja na štap na os "h" koja mora biti jednaka negativnim doprinosima sila k^b_{30} i k^b_{50} koje održavaju stanje pune upetosti grede.

HWPK-85-386



Na skici je prikazan primjer pomičnog sistema kod kojeg su za rješenje po inženjerskoj metodi potrebna dva nezavisma pomaka.

Prirodno je da se rješenje postavi tako da se uvedu 4 čvora, koji su na skici označeni s 1,2,3,4. Za svaki čvor se u inženjerskoj metodi pomaka uvodi po jedan nepoznati zaokret.

Za rješenje su nadalje potrebna i dva stanja pomaka koja su prikazana na skicama.

Prema tome, rješavanje po inženejrskoj metddi pomaka vodi na sistem od šest jednadžbi iz kojih će se odrediti svi kinematski parametri.

U_z poznate kinematske parametre jednostavno se odredjuju prirasti uzdužnih sila u štapovima; iz preostalih šest uvjeta suma projekcija za čvorove.

Točno rješenje po metodi pomaka vodi na sistem od 12 linearnih jednadžbi.

Odabrani sistem je pet puta preodredjen pa za točno rješenje po metodi sila treba riješiti sistem od pet jednadžbi.

Za slični primjer kod kojeg su svi stupovi kruto spojeni trebalo bi po metodi sila riješiti šest jednadžbi, dakle isti broj kao i kod inženjerske metode kod koje su ipak zanemareni utjecaji uzdužnih sila na pomake. Jednostavno proširenje Crossovog postupka koje obuhvaća i pomične sisteme postoji, ali loše konvergira.

Grupiranje nepoznatih pomaka i zaokreta

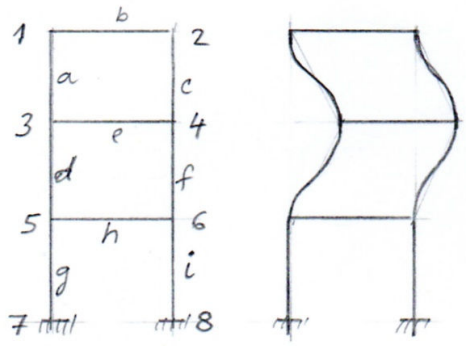
U osnovnoj formulaciji metode pomaka rješenje se postavlja kao linearna kombinacija stanja pune upetosti i stanja jediničnih pomaka i/ili jediničnih zaokreta. U nekim slučajevima se efikasnost metode može povećati ako se umjesto jediničnih stanja uvedu osnovna stanja koja moraju biti linearno nezavisna.

U svakom osnovnom stanju može se pojaviti pogodna kombinacija pomaka i zaokreta čvorova.

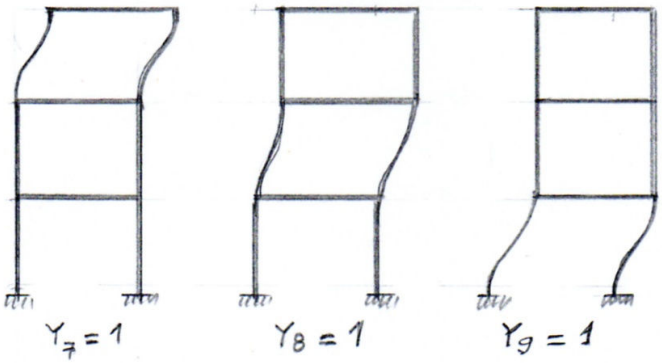
Nepoznanice u tom slučaju nisu više pojedini pomaci i zaokreti nego faktori koji odredjuju doprinos pojedinog osnovnog stanja rješenju.

Kao primjer odabran je najjednostavniji slučaj primjene grupiranja, koji se primjenjuje kod proračuna višekatnih okvira pomoću inženjerske metode pomaka.

HWPK-85-387

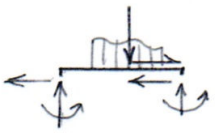


Prikazan je trokatni okvir s jednim poljem. Za rješenje po inženjerskoj metodi uvodi se šest stanja zakreta čvorova i tri stanja pomaka. U osnovnoj formulaciji će se u svakom stanju pomaka po jedna greda pomaknuti za 1. Na skici je za primjer prikazan pomak druge grede. Pri tome svaki pomak aktivira stupove dvaju katova. Pomaci se mogu grupirati tako, da se u svakom stanju pomaka aktiviraju samo stupovi jednog kata. U prvom stanju pomaka koje će se pridružiti nepoznanici Y_7 pomaknuta je samo gornja greda.

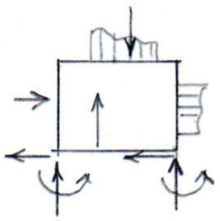


U stanju pomaka uz nepoznanicu Y_8 pomaknute su za isti pomak gornja i srednja greda.

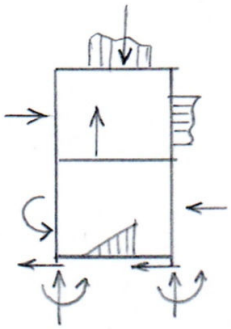
U stanju pomaka za nepoznanicu Y_9 pomaknute su za isti pomak sve tri grede. Time je postignuta ortogonalizacija stanja pomaka.



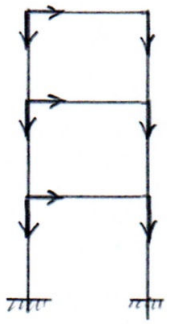
Sistem jednadžbi će sadržavati sume momenata svih čvorova i po jednu jednadžbu za svako stanje pomaka koja se dobiva zbrajanjem suma projekcija za odgovarajuće čvorove.



Prva od tih jednadžbi dobiva se zbrajanjem projekcija na os "h" za čvorove 1 i 2, a može se u ovom specijalnom slučaju dobiti i iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila koje djeluju na podsistem: čvorovi 1,2 i greda "b"(skica)



Druga jednadžba iz te grupe dobiva se zbrajenjem projekcija na os "h" za čvorove 1,2,3,4, a može se ovdje dobiti i iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila koje djeluju na podsistem: čvorovi: 1,2,3,4 i štapovi: a,b,c,e(skica)



Treća jednadžba iz te grupe dobiva se zbrajanjem projekcija na os "h" za čvorove 1,2,3,4,5,6, a može se ovdje dobiti i iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila koje djeluju na podsistem; koji sadrži čvorove 1 do 6 i štapove a,b,c,d,e,f,h.(skica).

Preostaje još 9 nezavisnih uvjeta ravnoteže: projekcije na os "d" za sve čvorove i projekcije na os "h" za po jedan čvor svake grede. Iz tih jednadžbi se mogu odrediti prirasti uzdužnih sila. Uvjeti su simbolički prikazani na skici pomoću strijelica uz čvorove.

HWPK-85-388

Statička kondenzacija

U postupku statičke kondenzacije svodi se rješavanje zadanog sistema na linearnu kombinaciju niza rješenja jednostavnijih sistema dobivenih iz zadanog sistema. U principu se jednostavniji sistem može riješiti ili po metodi sila ili po metodi pomaka, ali će se ovdje prikazati samo slučaj isključivog korištenja metode pomaka.

U najjednostavnijem slučaju statičke kondenzacije dijeli se skup kinematskih parametara na na dva podskupa:

a) Osnovni kinematski parametri pomoću kojih se iz rješenja jednostavnijih sistema dobiva rješenje zadanog

b) Pomoćni kinematski parametri koji se odredjuju pri rješavanju jednostavnijih sistema.

Jednostavniji sistemi se dobivaju iz zadanog tako,da se za osnovne parametre uvedu pogodne konstantne vrijednosti.

Postavlja se toliko zasebnih rješenja koliko ima osnovnih parametara i to tako da je u svakom rješenju samo jedan osnovni parametar zadan različito od nule, a svi preostali iščezavaju.

Sistem se zasebno rješava za djelovanje opterećenja, a da pri tome iščezavaju svi osnovni parametri.

U svim opisanim rješenjima koriste se za odredjivanje pomoćnih kinematskih parametara samo odgovarajući uvjeti ravnoteže, dok oni koji odgovaraju osnovnim parametrima ostaju nezadovoljeni.

Daljnji postupak u kojemu se odredjuju osnovni kinematski parametri potpuno odgovara metodi pomaka, jedino se umjesto jednostavnih jediničnih stanja pojavljuju rješenja jednostavnijih sistema.

Skicirati će se samo jedan primjer primjene statičke kondenzacije: proračun pomičnih sistema u inženjerskoj metodi pomaka.

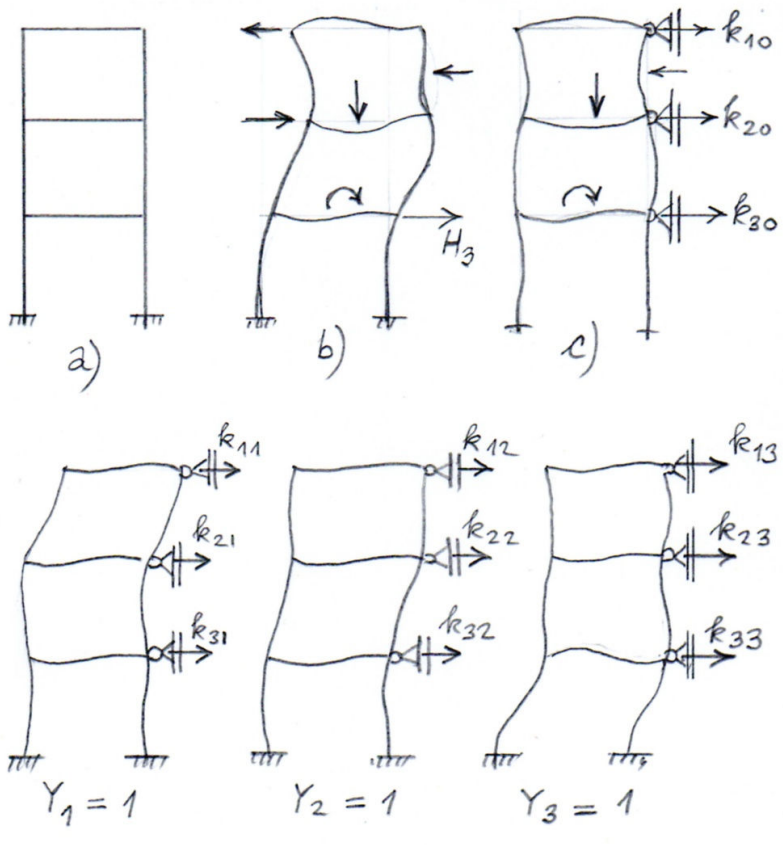
Pri tome će se kao osnovni kinematski parametri odabrati nezavisni pomaci, a pomoćni kinematski parametri će biti zaokreti svih čvorova. Postupak se može shvatiti i na slijedeći način:

Rješenje pomičnog sistema svodi se na linearnu kombinaciju niza pripadnih nepomičnih sistema; na jedan od tih sistema djeluje opterećenje, svi preostali su neopterećeni, ali se na svakom od njih pojavljuje po jedan konstantni nezavisni pomak.

Radi preglednosti se često uvode i pomoćni ležaji koji održavaju nepomičnost sistema pri odredjivanju pomoćnih parametara t.j. za okreta.

Odredjivanje osnovnih kinematskih parametara svodi se u toj interpretaciji na poništavanje sila u uvedenim ležajima.

HWPL-85-389



Traži se rješenje pomičnog okvira prikazanog na skici a). Rješenje za zadano opterećenje je simbolički prikazano na skici b).

Sistem će se riješiti kao nepomičan, što je slikovito prikazano uvodjenjem pomoćnih spojeva u kojima će se od opterećenja pojaviti sile k_{10}, k_{20}, k_{30}.

Treba još riješiti toliko zasebnih nepomičnih sistema koliko ima nezavisnih pomaka. Ti sistemi su neopterećeni, ali se na svakom pojavljuje po jedan konstantni pomak ili grupa konstantnih pomaka. Svako od tih stanja odgovara jediničnom

osnovnom kinematskom parametru Y_i.

Rješenje se dobiva kao linearna kombinacija stanja u kojem se pojavljuje opterećenje i stanja konstantnih pomaka pomnoženih sa odgovarajućim nepoznatim parametrima, koji se odredjuju iz uvjeta da sile u pomoćnim spojevima budu jednake silama opterećenja u odgovarajućim točkama.

$$k_{10} + k_{11} \cdot Y_1 + k_{12} \cdot Y_2 + k_{13} \cdot Y_3 = H_1$$

$$k_{20} + k_{21} \cdot Y_1 + k_{22} \cdot Y_2 + k_{23} \cdot Y_3 = H_2$$

$$k_{30} + k_{31} \cdot Y_1 + k_{32} \cdot Y_2 + k_{33} \cdot Y_3 = H_3$$

Nakon rješavanja dobivenog sistema jednadžbi, koji ne mora biti simetričan, odredjuje se superpozicijom konačno stanje.

Formalno gledano je dobiven nepomični sistem s takvim prisilnim pomacima da se u pomoćnim spojevima pojavljuju upravo one sile koje su zadane na traženom pomičnom sistemu, što znači da se oba sistema nalaze u istom mehaničkom stanju i da je dobiveno rješenja zadanog sistema za zadano opterećenje.

Prikazani postupak grupiranja je pogodan za primjenu Crossovog postupka: svi pomoćni sistemi su formalno nepomični pa se lako rješavaju po Crossu.

Efikasni iterativni postupci su za rješavanje pomičnih okvira zasnovani upravo na suprotnoj koncepciji: zaokreti su osnovni parametri, a pomaci su pomoćni. Prikazivanje tih postupaka prelazi okvire ovog uvoda.

HWPK-85-390

Osnovno o naponskim i deformacionim poljima

Općenito

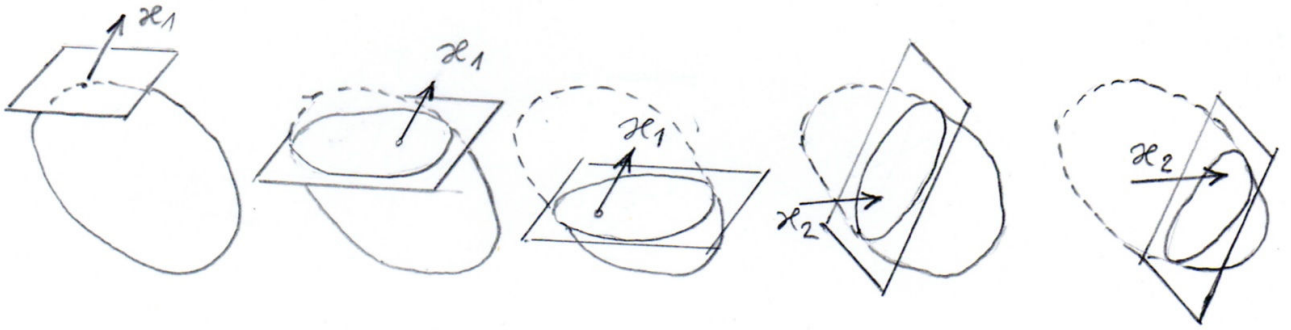
Dokaz sigurnosti konstrukcije sadrži dokaz sigurnosti od sloma, koji u materijalu nastupa kada sile izmedju čestica dosegnu neku graničnu vrijednost.

U kontinuumu se umjesto sila izmedju čestica uvode distribuirane unutarnje sile. Ukupnu informaciju o unutarnjim silama u kontinuumu čini naponsko polje koje se u općem slučaju obično prikazuje pomoću šest funkcija od tri varijable. Za uvodjenje tog načina prikazivanja naponskog polja treba najprije analizirati zakonitosti nekih specijalnih slučajeva naponskih polja.

Homogeno naponsko polje

Homogeno naponsko polje je specijalni slučaj stanja tijela koje se nalaziu ravnoteži bez volumenskih sila, a karakterizira ga konstantan vektor ukupnog napona za sve točke zamišljenih ravnih presjeka koje su paralelne s bilo kojom zadanom ravninom, kao i za sve točke oplošja čije su tangencijalne ravnine paralelne s istom ravninom.

HWPK-85-391



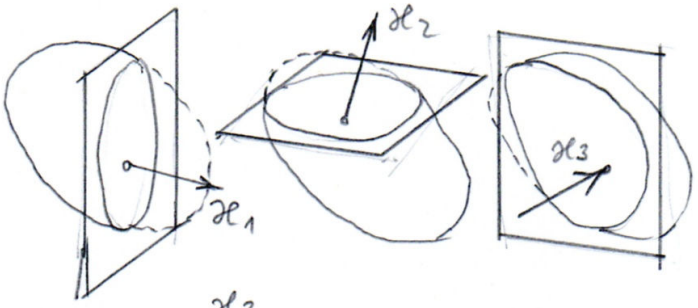
Na skicama je simbolički prikazano isto tijelo uz koje je definirana jedna tangencijalna ravnina na vanjsku plohu i dva zamišljena presjeka koji su paralelni s tom plohom. U točki tangiranja kao i u svim točkama prikazanih presjeka vektor ukupnog napena je konstantan. Isto će vrijediti za svaku točku konture i presjeke paralelne bilo kojoj ravnini. Kao primjer prikazana su još dva paralelna presjeka istog tijela u kojima će vektor ukupnog napona biti konstantan, ali, u općem slučaju, različit od onog koji se pojavio u prvom nizu presjeka.

Homogeno naponsko polje je idealizacija, jer se djelovanje volumenskih sila ne može isključiti, ali postoje praktični slučajevi u kojima se naponsko stanje sa zadovoljavajućom točnosti može smatrati homogenim.

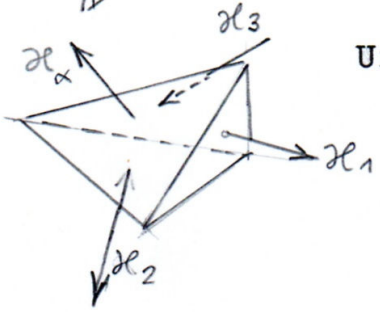
Iako ukupni naponi na različitim ravninama mogu biti različiti, njihova medjusobna veza ne može biti potpuno proizvoljna.

Promatrati će se tri ravnine čije su normale nekomplanarne. Ako su poznati vektori ukupnog napona na tim ravninama homoge-

nog polja napona, onda su potpuno odredjeni vektori ukupnih napona za sve moguće ravnine. Na skici je prikazano tijelo koje se nalazi u homogenom stanju napona. Prikazana su tri različita ravna presjeka za koje se pretpostavlja da bjihove normale nisu komplanarne.



Vektori ukupnih napona su poznati za svaku točku u svakom presjeku.



Unutar promatranog tijela se može zamisliti tetraedar čije su tri stranice paralelne s ravninama na kojima su poznati vektori ukupnog napona, a četvrta stranica je proizvoljno odabrana. Djelovanje napona na svaku stranicu može se zamijeniti rezultantom koja prolazi težištem stranice. Vidljivo je da se vektori ukupnih napona na tri odabrane ravnine ne mogu odabrati proizvoljno, jer se proizvoljno djelovanje ne može uravnotežiti samo jednom silom koja prolazi sredinom četvrte stranice. Odredjivanje uvjeta koje moraju zadovoljavati vektori napona na tri odabrane ravnine bilo bi na ovaj način složeno.

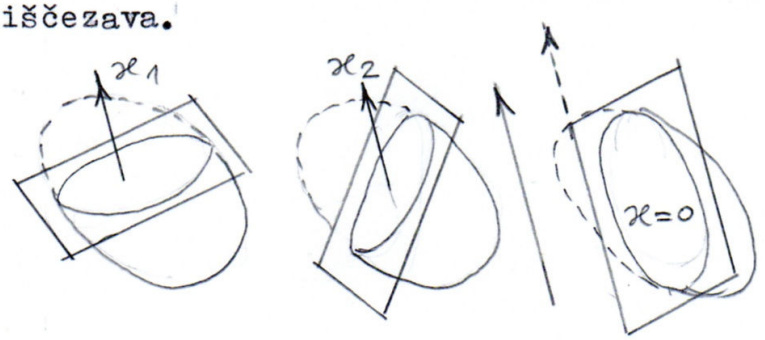
HWPK-35-392

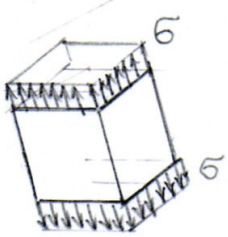
Najpregledniji način za odredjivanje broja podataka koji se mogu nezavisno pojaviti u homogenom stanju napona je promatranje ravnoteže kvadra koji je zamišljen unutar zadanog tijela.

Opći slučaj homogenog stanja će se prikazati kao superpozicija jednostavnijih slučajeva koji će se posebno analizirati.

Jednoosno homogeno polje napona.

Jednoosno homogeno polje napona karakterizira os čiji je položaj vezan za promatrano tijelo. Vektor ukupnog napona je za bilo koju ravninu presjeka paralelan s karakterističnom osi, a za ravnine paralelne s karakterističnom osi ukupni napon iščezava.



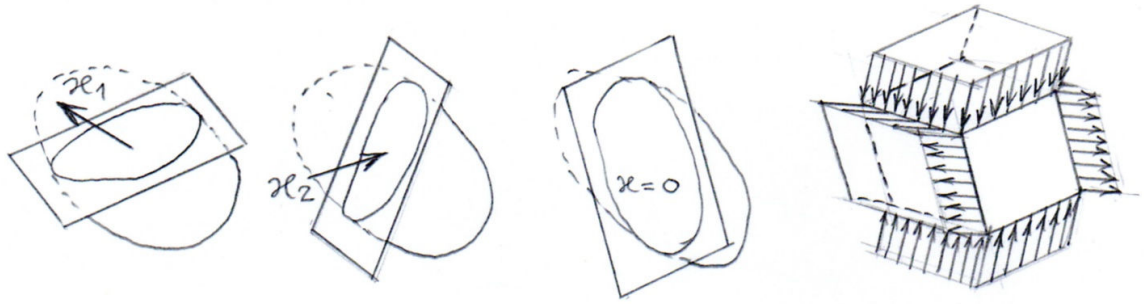


Jednoosno homogeno polje napona se najjednostavnije prikazuje na kvadru kojemu su četiri brida paralelna s karakterističnom

osi. Na dvije stranice koje su okomite na karakterističnu os djeluje okomiti ukupni napon čija se veličina označava s σ. U tom smislu je jednoosno stanje odredjeno s jednim nezavisnim skalarom.

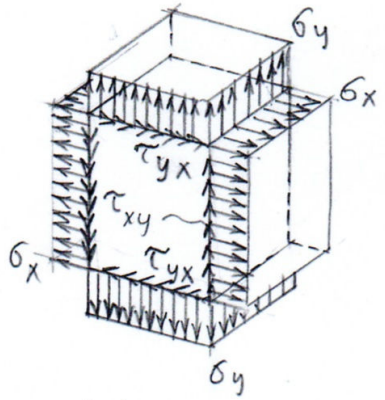
Dvoosno homogeno polje napona

Dvoosno homogeno polje napona karakterizira ravnina čiji je položaj vezan za promatrano tijelo. Vektor napona je za bilo koju ravninu presjeka paralelan s karakterističnom ravninom, a za ravnine presjeka koje su paralelne s karakterističnom ravninom ukupni napon iščezava.



HAJPK-85-393

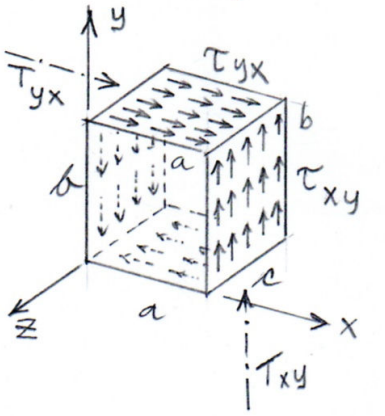
Dvoosno polje homogenog napona se najjednostavnije prikazuje na kvadru kojemu su dvije stranice paralelne s karakterističnom ravninom. Na tim stranicama ukupni napon iščezava. Vektori ukupnog napona na preostalim stranicama su zavisni.



Zakonitost koja povezuje djelovanja na stranicama kvadra u dvoosnom homogenom polju napona najlakše se prikazuju, ako se ukupni naponi rastave na normalne i posmične.

Uz kvadar se obično definira desni pravokutni koordinatni sustav xyz.

Normalni naponi dobivaju indeks osi s kojom su paralelni.



Posmični naponi se označavaju s dva indeksa: prvi označava normalu na ravninu u kojoj djeluju, a drugi označava os s kojom je napon paralelan.

Posmični naponi moraju na paralelnim stranicama djelovati u suprotnim smjerovima zbog zadovoljavanja sume projekcija njihovih rezultanti. Ukupno posmično djelovanje mora činiti suprotne spregove zbog zadovoljavanja sume momenata.

Doprinosi normalnih napona očito zadovoljavaju uvjete ravnoteže, pa treba još samo odrediti vezu izmedju veličina posmičnih napona koji se pojavljuju na stranicama. Radi preglednosti je kvadar posebno skiciran uz isključivo djelovanje posmičnih napona.

Identično su zadovoljeni svi uvjeti ravnoteže osim momenta oko osi z, kojemu doprinose samo djelovanja na dvije stranice. Rezultante posmičnih napona na te dvije stranice su ucrtane, a njihove veličine su odredjene s:

$$T_{xy} = \tau_{xy} \cdot b \cdot c \,; \qquad T_{yx} = \tau_{yx} \cdot a \cdot c$$

Uvjet iščezavanja sume momenata oko osi z glasi:

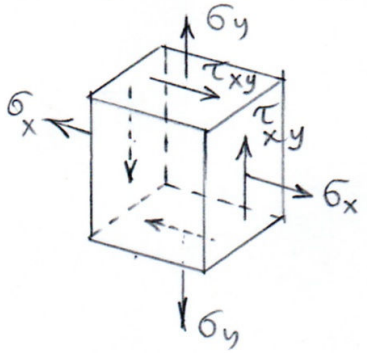
$$a \cdot T_{xy} - b \cdot T_{yx} = 0$$

Nakon uvrštavanja izraza za veličine rezultanti lako se dobiva:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Posmični naponi na okomitim presjecima su po veličini jednaki.

Specijalni slučaj dvoosnog stanja napona u kojemu na kvadru djeluju samo posmični naponi naziva se čisti posmik.



Opći slučaj dvoosnog homogenog polja napona može se prikazati kao superpozicija dvaju okomitih jednoosnih polja i jednog polja čistog posmika.

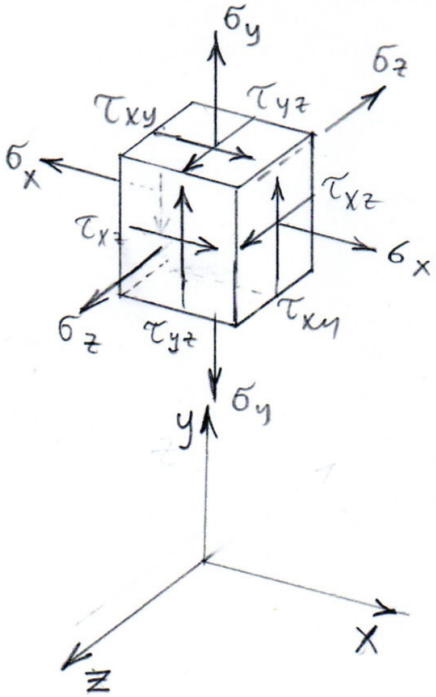
U tom smislu je dvoosno polje napona odredjeno s tri nezavisna skalara.

Zbog preglednosti se homogeno stanje napona prikazuje samo s jednom strijelicom naponske komponente za svaku plohu umjesto naponskim dijagramom. Takav prikaz može navesti na pogrešan postupak u kojemu se naponi poistovjećuju sa silama.

HWPK-85-394

Troosno homogeno polje napona

Troosno homogeno polje napona je opći slučaj homogenog polja.



Najjednostavnije se prikazuje na nekom kvadru kao superpozicija triju okomitih jednoosnih stanja i triju odgovarajućih stanja čistog posmika.

U tom smislu je troosno homogeno polje napona odredjeno s šest nezavisnih skalara.

Naponi se uglavnom prikazuju u tehničkoj notaciji, koja je primijenjena i u ovom dijelu.

Normalni naponi se prikazuju uz strijelice koje odgovaraju vanjskoj normali, pa pozitivni σ znači zatezanje t.j. vlak.

Za prikazivanje posmičnih napona treba posebno definirati smjerove.

U specijalnom slučaju prikazivanja homogenog polja na kvadru definiraju se svi smjerovi pomoću jednog

koordinatnog sustava po jednostavnom pravilu:

Ako strijelica uz σ odgovara pozitivnom smjeru koordinatne osi, onda će i strijelice uz posmike odgovarati pozitivnim smjerovima preostalih osi.

Ako strijelica uz σ odgovara smjeru negativne koordinatne osi onda će i strijelice uz posmične napone odgovarati negativnim smjerovima preostalih osi.

Naponi u proizvoljnoj ravnini homogenog naponskog polja.

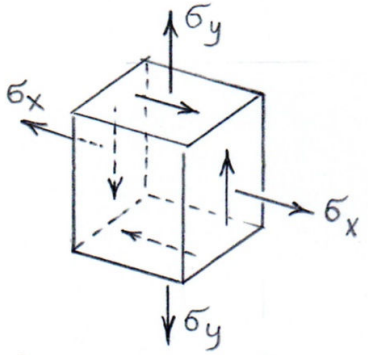
Ako je homogeno polje napona zadano, npr. djelovanjima na stranicama kvadra, mogu se iz uvjeta ravnoteže odrediti naponi na bilo kojem zamišljenom ravnom presjeku, odnosno u bilo kojoj točki proizvoljnog presjeka za koju je definirana tangencijalna ravnina.

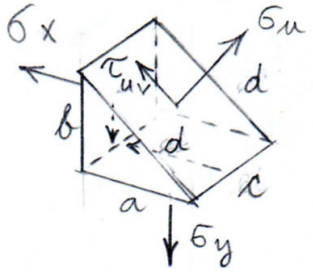
Naponi u traženoj ravnini se obično prikazuju pomoću tri komponente paralelne s odabranim okomitim osima.

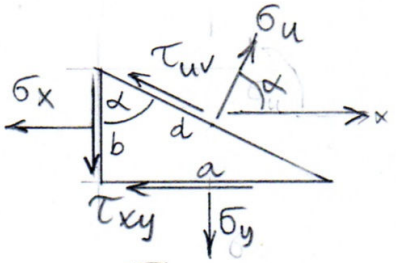
slika!

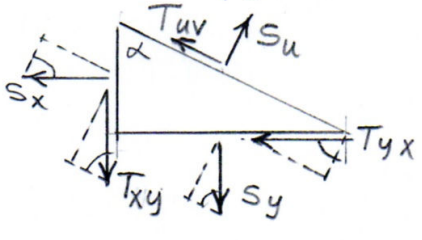
Ovdje će se prikazati samo specijalni slučaj odredjivanja napona za dvoosno homogeno polje napona, pri čemu će ravnina presjeka biti okomita na karakterističnu ravninu dvoosnog homogenog polja napona.

HWPK-85-395









Zadano je proizvoljno dvoosno homogeno polje napona i to pomoću djelovanja na kvadru uz koji je odabran koordinatni sistem xyz. Karakteristična ravnina je ravnina xy.

Iz tog kvadra će se zamišljeno isjeći trostrana prizma čije su baze paralelne s ravninom xy, jedna stranica paralelna s ravninom xz, a jedna daljnja je paralelna s ravninom yz. prostala stranica je proizvoljno odabrana paralelno s osi z. Položaj te stranice odredjen je normalom koja s osi x zatvara kut α .

Duljine bridova su označene s a,b,c,d.

Radi pregledmosti je prikazana projekcija prizme na ravninu xy.

Traže se naponi u ravnini čija normala u zatvara kut α s osi x. Uz normalu definirana je i os v, prema kojoj je odabran smjer posmičnog napona τ_{uv} .

σ_u i τ_{uv} će se odrediti iz uvjeta ravnoteže, pa treba odrediti rezultante za pojedine komponente napona na svim plohama.

Kako su naponi konstantni, rezultante se dobivaju kao umnošci napona i pripadne površine.

$$S_x = \sigma_x \cdot b \cdot c\,; \qquad S_y = \sigma_y \cdot a \cdot c \qquad S_u = \sigma_u \cdot c \cdot d$$

$$T_{xy} = \tau_{xy} \cdot b \cdot d\,; \qquad T_{yx} = \tau_{xy} \cdot a \cdot c \qquad T_{uv} = \tau_{uv} \cdot c \cdot d$$

Rezultante T_{uv} i S_u će se odrediti iz uvjeta iščezavanja suma projekcija svih sila na osi u i v. Na skici su ucrtani trokuti koji odredjuju projekcije poznatih sila S_x, S_y, T_{xy}, T_{yx}.

$$S_u = S_x \cos\alpha + S_y \sin\alpha + T_{xy} \sin\alpha + T_{yx} \cdot \cos\alpha$$

$$T_u = -S_x \sin\alpha + S_y \cos\alpha + T_{xy} \cos\alpha - T_{yx} \cdot \sin\alpha$$

Nakon uvrštavanja izraza za rezultante i dijelenja lijevih i desnih strana izraza s dc, dobiva se:

$$\sigma_u = \sigma_x \frac{b}{d} \cos\alpha + \sigma_y \frac{a}{d} \sin\alpha + \tau_{xy} \frac{b}{d} \sin\alpha + \tau_{xy} \frac{a}{d} \cdot \cos\alpha$$

$$\tau_{uv} = -\sigma_x \frac{b}{d} \sin\alpha + \sigma_y \frac{a}{d} \cos\alpha + \tau_{xy} \frac{b}{d} \cos\alpha - \tau_{xy} \frac{a}{d} \sin\alpha$$

Omjeri duljina bridova baze su trigonometrijske funkcije, pa se nakon sredjivanja dobiva:

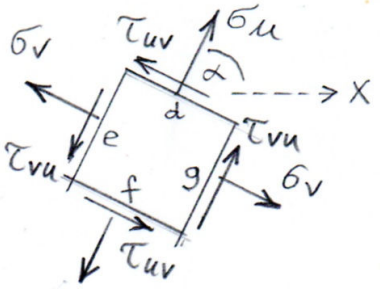
$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\,\tau_{xy} \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$\tau_{uv} = (-\sigma_x + \sigma_y) \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \tau_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Izrazi se pojednostavnjuju ako se uvedu trigonomterijske funkcije dvostrukog kuta α.

$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{uv} = (-\sigma_x + \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$



Često se pojavljuje potreba, da se odrede naponi u dvije medjusobno okomite ravnine zadanog homogenog polja napona. Na taj način su odredjeni naponi na stranicama novog kvadra koji je zamišljeno isječen iz zadanog kvadra.

Naponi na stranici "e" će se dobiti iz prikazanih izraza ako se uvrsti odgovarajući kut. Pogodno je da se taj kut izrazi pomoću kuta normale stranice "d", t.j. kut normale stranice "e" je $\alpha + \pi/2$

Iz formalnih razloga je strijelica uz posmični napon na stranici "e" ucrtana u istom odnosu prema normali kao i na stranici "d". Zbog toga je i veličina označena različito; τ_{vu}. Iz ranijih razmatranja je poznato da mora vrijediti $\tau_{vu} = -\tau_{u,v}$.

HNPK-85-396

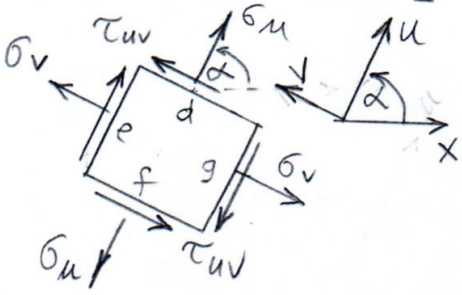
$$\sigma_v = \sigma_x \cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + \sigma_y \sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + \tau_{xy} \sin 2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tau_{vu} = (-\sigma_x + \sigma_y)\frac{1}{2}\sin 2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + \tau_{xy}\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

Nakon uvrštavanja izraza koji povezuju odgovarajuće trigonometrijske funkcije dobiva se:

$$\sigma_v = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - 2\tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{vu} = (\sigma_x - \sigma_y)\frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau_{xy}\cos 2\alpha = -\tau_{uv}$$



Nadalje će se strijelice uz napone i uz kvadre koji su isječeni iz zadanih tijela ucrtavati prema ranije utvrdjenoj konvenciji: uz normalne napone čiji smjerovi odgovaraju pozitivnim osima odgovarati će i smjer uz posmični napon pozitivnoj osi.

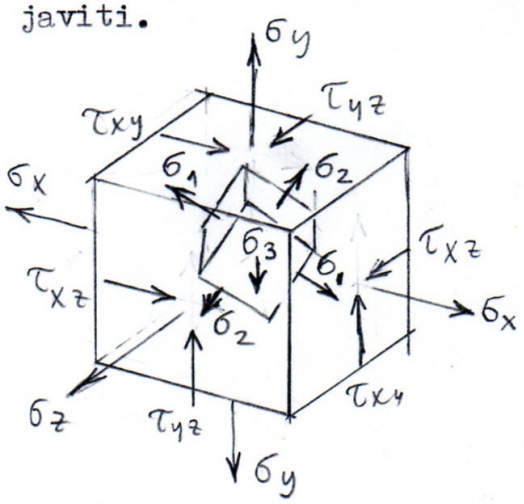
Treba dakako uočiti da smjerovi djelovanja napona ucrtani uz kvadar ne definiraju koordinatni sustav.

Lako se može provjeriti da će rezultati za stranice "f" i "g", t.j. za kuteve $\alpha+\pi$ i $\alpha+\frac{3\pi}{2}$ odgovarati stvarnoj situaciji.

HNPK-85-397

Glavni naponi

U homogenom polju napona mogu se odrediti tri medjusobno okomite ravnine na kojima iščezavaju posmični naponi. Normale na te ravnine uvode se kao glavne osi promatranog homogenog polja napona. Pripadni normalni naponi nazivaju se glavni naponi promatranog homogenog polja napona. Nadalje je jedan od tri glavna napona najveći normalni napon koji se u promatranom homogenom polju napona može pojaviti, a jedan daljnji glavni napon je najmanji normalni napon koji se u tom polju može pojaviti.



Prema tome unutar svakog tijela koje se nalazi u homogenom polju napona može se zamisliti kvadar u takovom položaju da na njegove stranice djeluju samo normalni naponi.

Postupak za odredjivanje glavnih osi i napona prikazati će se samo za specijalni slučaj dvoosnog homogenog polja napona.

Izrazi za napone u proizvoljnom presjeku dvoosnog polja napona su poznati. Izraz za τ_{uv} će se izjednačiti s nulom i tako dobiti uvjet za odredjivanje kuta α_q.

$$0 = (-\sigma_x + \sigma_y)\frac{\sin 2\alpha_q}{2} + \tau_{xy}\cdot\cos 2\alpha_q$$

Iz gornjeg izraza se direktno dobiva:

$$tg\,2\alpha_q = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Deriviranjem izraza za normalni napon po kutu α i izjednačavanjem s nulom dobiva se isti izraz.

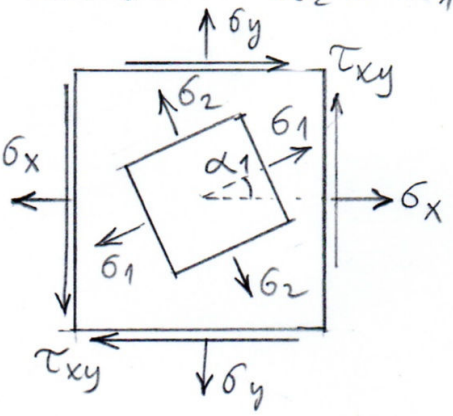
Jednadžbu zadovoljavaju kutevi $\alpha_q = \alpha_1 + k\cdot\frac{\pi}{2}$; $k = 1, 2, 3, \ldots$

Za odredjivanje položaja kvadra dovoljno je odrediti najmanji kut α_1 koji zadovoljava jednadžbu. Pripadni normalni naponi odrediti će se prema izrazima za normalne napone:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2\alpha_1 + \sigma_y \sin^2\alpha_1 + \tau_{xy}\sin 2\alpha_1$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2\alpha_1 + \sigma_y \cos^2\alpha_1 - \tau_{xy}\sin 2\alpha_1$$

Pri tome je kut izmedju strijelice koja odredjuje σ_2 i osi x odredjen s: $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$



Unutar kvadra čije je naponsko polje dvoosno homogeno, može se zamisliti kvadar sa stranicama okomitim na karakterističnu ravninu dvoosnog polja u takovom položaju da na te stranice djeluju samo normalni naponi.

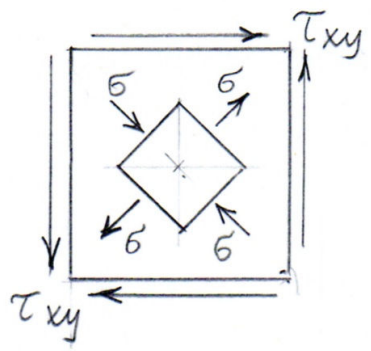
Iz izraza za glavne napone mogu se eliminirati trigonometrijske funkcije, ali to prelazi okvire ovog prikaza.

Zbroj veličina normalnih napona za bilo koje dvije okomite ravnine u homogenom polju napona je invarijantan. Tako se provjerava da vrijedi:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_u + \sigma_v = \sigma_1 + \sigma_2$$

Uočenu zakonitost treba svakako iskoristiti za kontrolu pri odredjivanju glavnih napona.

Glavni naponi za stanje čistog posmika



Tangens dvostrukog kuta je neizmjeran, pa slijedi da je dvostruki kut $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ t.j. $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$.

Iz izraza za glavne napone se dobiva:

$$\sigma_1 = \tau_{xy}\,; \qquad \sigma_2 = -\tau_{xy}$$

Za stanje čistog posmika su glavni naponi jednaki po apsolutnom iznosu: jedan je vlačan a drugi tlačan. Na skici su ucrtani stvarni

HWPE-85-398

smjerovi, i uvedena je veličina $\sigma = \tau_{xy}$.

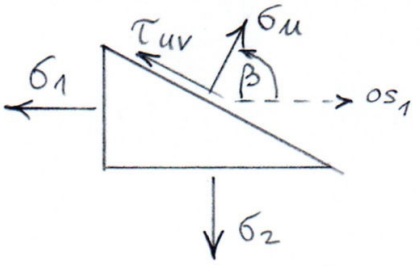
Kako je posmično djelovanje teško ostvariti eksperimentalno, mogu se zakonitosti stanja čistog posmika proučavati na uzorcima koji su istovremeno podvrgnuti pritisku i okomitom rastezanju.

Maksimalni posmični napon

Za istraživanje zakonitosti naponskih polja potrebno je odrediti i maksimalne posmične napone koji se mogu pojaviti u općem homogenom stanju napona.

Ovdje će se prikazati samo specijalni slučaj odredjivanja maksimalnog posmičnog napona za opće dvoosno polje napona.

Postupak se najlakše provodi ako se najprije odrede glavni naponi. U odnosu na glavne osi će se odrediti ravnine u kojima su posmični naponi maksimalni.



Zamišlja se kvadar čije su stranice paralelne s glavnim osima, a iz njega je isječena trostrana prizma. Jedna stranica prizme je odredjena normalom "u" koja s prvom glavnom osi zatvara kut β. izrazi su analogni općim izrazima izvedenim za $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Naponi na stranici čija normala zatvara kut β su:

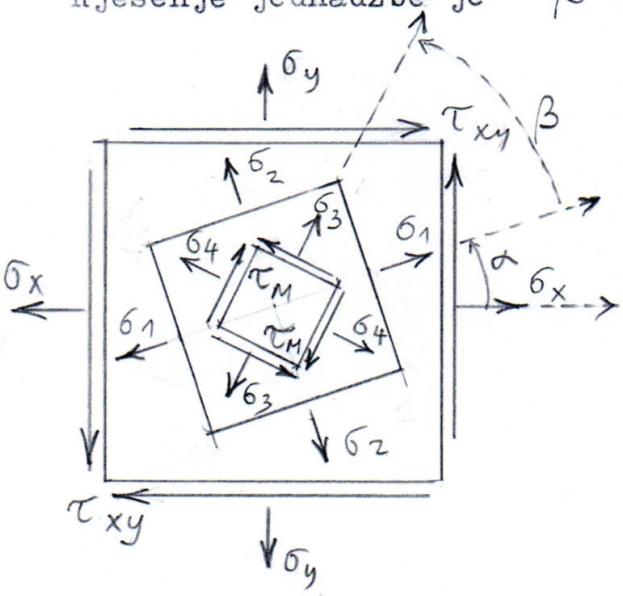
$$\sigma_u = \sigma_1 \cos^2\beta + \sigma_2 \sin^2\beta$$

$$\tau_{uv} = (-\sigma_1 + \sigma_2)\frac{\sin 2\beta}{2}$$

Deriviranjem izraza za τ_{uv} po kutu β i izjednačavanjem tog izraza s nulom dobiva se uvjet za odredjivanje kuta normale uz čiju ravninu je posmični napon maksimalan

$$0 = (-\sigma_1 + \sigma_2)\cos 2\beta$$

Rješenje jednadžbe je $\beta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ znači da se maksimalni posmični naponi pojavljuju u ravnini koja s glavnim osima zatvara kut od $\frac{\pi}{4}$ i u ravnini koja je okomita na prvu ravninu.



Veličina maksimalnog posmičnog napona i pripadnih normalnih napona su odredjeni izrazima:

$$\tau_{3,4} = \tau_{MAX} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

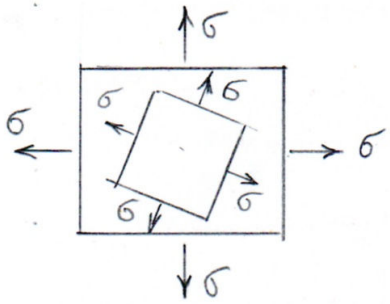
$$\sigma_3 = \sigma_4 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

HWPK-85-399

Na skici je simbolički prikazan cijeli postupak odredjivanja karakterističnih podataka o dvoosnom homogenom polju napona. Na najveći kvadar djeluju naponi σ_x , σ_y , τ_{xy}. Unutar prvog kvadra definiran je kvadar na čijim stranicama djeluju glavni naponi, a unutar drugog je kvadar na čijim stranicama djeluju maksimalni posmični naponi s pripadnim normalnim naponima.

Dakako da se glavni naponi ne pojavljuju samo na stranicama ucrtanog kvadra nego na svim ravninama koje su paralelne s stranicama tog kvadra, a analogno vrijedi i za ravnine paralelne sa stranicama najmanjeg kvadra.

Stanje čistog pritiska odnosno zatezanja



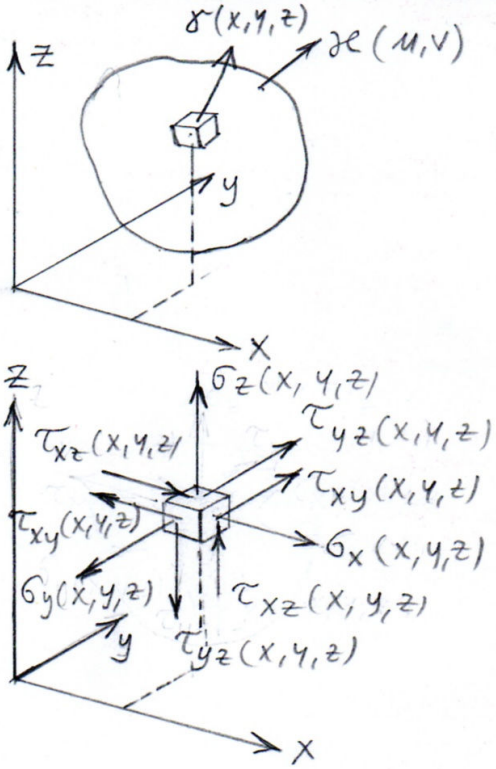
Ako se u dvije okomite ravnine dvoosnog homogenog polja napona pojavljuju samo jednaki normalni naponi, onda se i u bilo kojoj drugoj ravnini pojavljuje samo jedanki normalni napon. Ta se zakonitost dobiva iz izraza za napone u proizvoljnoj ravnini.

Takovo stanje napona se naziva stanje čistog pritiska odnosno čistog zatezanja; u njemu nisu definirane glavne osi, može se reći i da je svaka os glavna os, a posmični naponi identično iščezavaju.

HWPK-85-400

Nehomogeno polje napona

U općem slučaju kada na tijelo proizvoljnog oblika djeluju proizvoljne volumenske sile i plošne sile na oplošju tako, da tijelo bude u ravnoteži, pojaviti će se nehomogeno polje napona.



Nehomogeno polje napona opisuje se na osnovi pretpostavke, da se polje u neizmjerno maloj okolini svake točke tijela može smatrati homogenim.

Ovdje će se za opis polja koristiti samo pravokutni koordinatni sistem. U tom slučaju se oko svake točke (x,y,z) zamišlja infinitezimalni kvadar čije su stranice paralelne s koordinatnim ravninama. Komponentni naponi koji djeluju na te stranice su funkcija položaja.

Na skici su prikazana samo djelovanja na vidljive stranice.

Takovo prikazivanje naponskog polja omogućuje odredjivanje napona u bilo kojoj točki nekog presjeka, ako je za tu točku definirana tangencijalna ravnina.

Natraj način je opće naponsko polje prikazano, kao što je i ranije najavljeno, pomoću šest funkcija od tri varijable.

Analizom uvjeta ravnoteže može se pokazati, da se svih šest funkcija ne može pojaviti nezavisno. Isto se tako može pokazati da poznavanje djelovanja na oplošju i funkcije volumenskih sila nije u općem slučaju dovoljno za odredjivanje svih šest funkcija koje odredjuju naponsko polje.

Te zakonitosti se mogu izvesti iz uvjeta ravnoteže infinitezimalnog elementa, ali se za ta razmatranja mora pretpostaviti da se polje napona u okolišu točke koju sadrži element mijenja linearno.

14. V. 86

Linearno promjenjivo polje napona

Promatra se polje napona u kojemu su sve funkcije komponentnih napona odredjene izrazima tipa:

$$\phi(x,y,z) = \phi_0 + \phi_1 \cdot \frac{x}{a} + \phi_2 \cdot \frac{y}{b} + \phi_3 \cdot \frac{z}{c}$$

Izraz za $\sigma_x(x,y,z)$ će prema tome glasiti:

$$\sigma_x(x,y,z) = \sigma_{x0} + \sigma_{x1} \cdot \frac{x}{a} + \sigma_{x2} \cdot \frac{y}{b} + \sigma_{x3} \cdot \frac{z}{c}$$

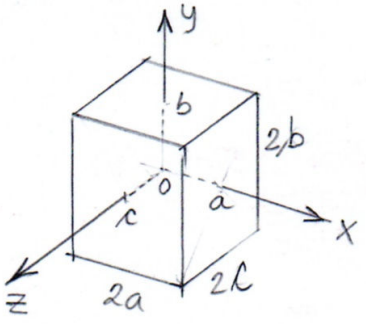
Izrazi za preostale komponente će biti analogni.

HWPK-85-401

Ovim izrazima su odredjeni naponi unutarnjih sila kao i djelovanja na vanjskoj plohi. Ako tangencijalna ravnina u promatranoj točki vanjske plohe nije paralelna s ravninama xy, xz, yz onda se naponi na vanjskoj plohi odredjuju iz uvjeta ravnoteže infinitezimalnog tetraedra.

Na promatrano tijelo djelovati će i konstantna volumenska sila, odredjena u svakoj točki s tri komponente: γ_{x0}, γ_{y0}, γ_{z0}

Iz uvjeta ravnoteže će se odrediti veze izmedju parametara u izrazima za napone i komponenti volumenske sile.

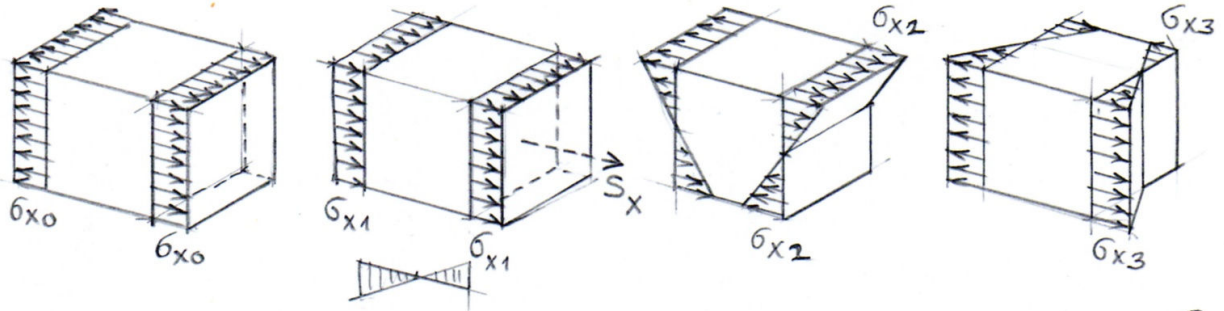


Uvjeti će se moći pregledno postaviti ako se promatra ravnoteža kvadra u čijem središtu se nalazi ishodište koordinatnog sistema. Duljine bridova kvadra će biti: 2a, 2b, 2c, a odabrane su zato da se pojave jednostavni izrazi za napone na plohama. Npr, σ_x će na plohi $x = a$ biti:

$$\sigma_x(a,y,z) = \sigma_{x0} + \sigma_{x1}$$

Uvjeti ravnoteže za odabrani kvadar će se promatrati u osnovnoj formulaciji. Pokazati će se da je dovoljno promatrati komponente koje doprinose projekciji na os x, jer će se izrazi za preostale osi moći postaviti analogno.

Zbog preglednosti će se grafički prikazati doprinosi svakog pribrojnika zasebno.



Na skicama su prikazana linearno promjenjiva polja napona σ_x, koja zajedno daju opće linearno promjenjivo polje napona σ_x.

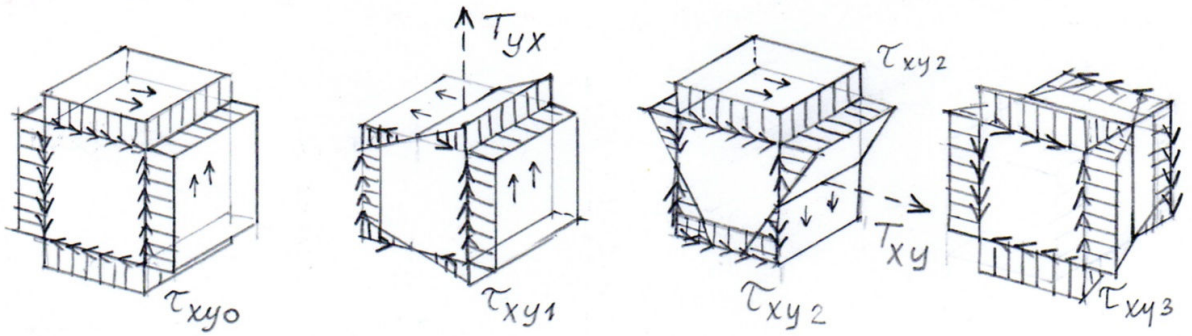
Prvi član pretstavlja jednoosno [illegible] zatezanje i zadovoljava uvjete ravnoteže.

Drugi član pretstavlja linearnu promjenu duž osi x; uz kvadar je ppikazan i dijagram. To stanje ne zadovoljava uvjete ravnoteže i ekvivalentno je koncentriranoj sili koja leži na osi x:

$$S_x = 8 \cdot \sigma_{x1} \cdot b \cdot c$$

Treći član pretstavlja linearnu promjenu duž osi y. Svaki infinitezimalni sloj paralelan s ravninom y=0 se nalazi u homogenom stanju napona; jednoosnom zatezanju ili jednoosnom pritisku, pa je svaki sloj u ravnoteži i cijelo stanje zadovoljava uvjete ravnoteže, a to se lako provjerava i integralno: Tijela napona su četiri jednake trostrane prizme; dvije i dvije rezultante su suprotne sile.

Četvrti član je analogan trećem i zadovoljava uvjete ravnoteže.



Na skicama su prikazana četiri člana linearno promjenjivog polja napona τ_{xy}, koje dakako uključuje i homogeno polje. Prvi član pretstavlja polje čistog posmika t.j. homogeni član.

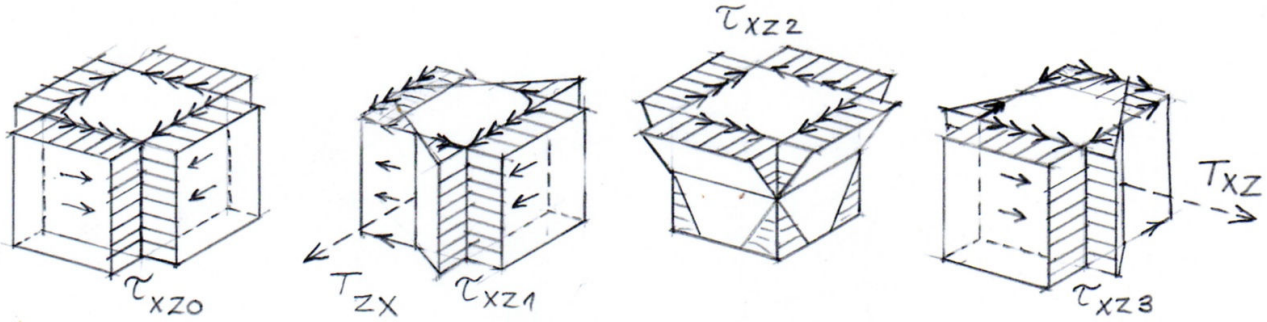
Drugi član pretstavlja linearnu promjenu duž osi x. To stanje ne zadovoljava uvjete ravnoteže i ekvivalentno je koncentriranoj sili koja leži na osi y:

$$T_{yx} = 8 \cdot \tau_{xy1} \cdot b \cdot c$$

Treći član pretstavlja linearnu promjenu duž osi y. To stanje ne zadovoljava uvjete ravnoteže i ekvivalentno je koncentriranoj sili koja leži na osi x: $T_{xy} = 8 \cdot \tau_{xy2} \cdot a \cdot c$

HWPK-85-402

Četvrti član pretstavlja linearnu promjenu duž osi z. Svaki sloj paralelan s ravninom z=0 se nalazi u stanju čistog posmika, pa je svaki sloj u ravnoteži i cijelo stanje zadovoljava uvjete ravnpteže, a to se lako može provjeriti i integralno: tijela napona su osam jednakih trostranih prizmi, a njihove rezultante čine četiri sprega, od kojih se dva i dva uravnotežavaju.



Na skicama su prikazan četiri člana linearno promjenjivog polja napona τ_{xz}, koje je potpuno analogno polju τ_{xy}.

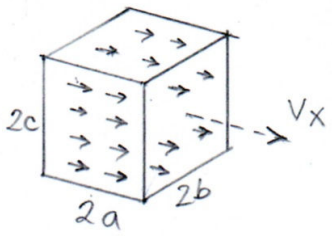
Prvi i treći član zadovoljavaju uvjete ravnoteže, a drugi i treći ih ne zadovoljavaju i svaki od njih je ekvivalentan jednoj sili:

$$T_{zx} = 8 \cdot \tau_{xz1} \cdot b \cdot c$$

$$T_{xz} = 8 \cdot \tau_{xz3} \cdot a \cdot b$$

U preostalih 12 članova linearno promjenjivog polja napona ne pojavljuje se ekvivalencija s silama na osi x.

Vidljivo je da sve sile kojima su pojedina stanja ekvivalentna leže na koordinatnim osima, što znači da su sume momenata oko tih osi već zadpvoljene.



Na promatrani kvadar djeluje i konstantna volumenska sila. Projekciji na os x će doprinijeti samo odgovarajuća komponta γ_{xo}. Djelovanje konstantne volumenske sile na kvadar biti će statički ekvivalentno koncentriranoj sili koja leži na osi x:

$$V_x = 8 \cdot \gamma_{xo} \cdot a \cdot b \cdot c$$

Sada se može postaviti uvjet iščezavanja sume projekcija svih sila na os x:

$$S_x + T_{xy} + T_{xz} + V_x = 0$$

Nakon uvrštavanja izraza za sile dobiva se:

$$8 \cdot \sigma_{x1} \cdot b \cdot c + 8 \cdot \tau_{xy2} \cdot a \cdot c + 8 \cdot \tau_{xz3} \cdot a \cdot b + 8 \cdot \gamma_{xo} \cdot a \cdot b \cdot c = 0$$

Pogodno je da se izraz podijeli s volumenom kvadra $8 \cdot a \cdot b \cdot c$, pa se dobiva:

$$\frac{\sigma_{x1}}{a} + \frac{\tau_{xy2}}{b} + \frac{\tau_{xz3}}{c} + \gamma_{xo} = 0$$

HWPE-85-403

U uvjetu ravnoteže za linearno promjenjivo naponsko polje pojavljuju se koeficijenti linearnih članova . Pogodno je uočiti geometrijsku interpretaciju: to su koeficijenti nagiba pripadnih naponskih dijagrama. Po analogiji se mogu postaviti i preostale dvije sume projekcija, pa će tri uvjeta ravnoteže linearno promjenjivog naponskog polja glasiti:

$$\frac{\sigma_{x1}}{a} + \frac{\tau_{xy2}}{b} + \frac{\tau_{xz3}}{c} + \gamma_{x0} = 0$$

$$\frac{\tau_{xy1}}{a} + \frac{\sigma_{y2}}{b} + \frac{\tau_{yz3}}{c} + \gamma_{y0} = 0$$

$$\frac{\tau_{xz1}}{a} + \frac{\tau_{yz2}}{b} + \frac{\sigma_{z3}}{c} + \gamma_{z0} = 0$$

Preostala tri uvjeta su identično zadovoljena.

Navedene jednadžbe su nezavisne. Za svaku se tri podatka mogu odabrati proizvoljno, a četvrti je odredjen jednadžbom.

Npr. mogu se proizvoljno odabrati sve informacije o naponima, a iz jednadžbi će se onda odrediti konstantne volumenske sile koje održavaju ravnotežu.

HWPE-85-404

Diferencijalni uvjeti ravnoteže kontinuuma.

Na osnovi uvjeta ravnoteže linearno promjenjivog stanja napona skicirati će se obrazloženje za postavljanje diferencijalnih uvjeta ravnoteže kontinuuma.

Tijelo će se nalaziti u ravnoteži ako se svaki njegov dio nalazi u ravnoteži, pa će se uvjeti ravnoteže postaviti za infinitezimalni kvadar. Intuitivno se može prihvatiti da će se proizvoljne funkcije naponskih komponenti moći na infinitezimalnom području zamijeniti linearnim funkcijama.

Ako se funkcije linearno- promjenjivog stanja napona parcijalno deriviraju dobiti će se:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\sigma_{x1}}{a}; \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{x2}}{b}; \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = \frac{\sigma_{x3}}{c}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\tau_{xy1}}{a}; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\tau_{xy2}}{b}; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \frac{\tau_{xy3}}{c}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\tau_{xz1}}{a}; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\tau_{xz2}}{b}; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\tau_{xz3}}{c}$$

Za preostale tri funkcije mogu se postaviti analogni izrazi. Vidljivo je da se uvjeti ravnoteže mogu izraziti pomoću parcijalnih derivacija:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \gamma_{x0} = 0$$

Za proučavanje linearno promjenjivog polja napona na konačnom području uvodjenje derivacija nije bitno: one su konstantne za cijelo područje, ali za izražavanje odnosa na neizmjerno malom kvadru potrebno je da se te derivacije uvedu i one su u općem slučaju funkcije položaja.

U općem slučaju je i volumenska sila funkcija položaja pa će za ravnotežu infinitezimalnog kvadra biti mjerodavna odgovarajuća funkcijska vrijednost $\gamma_x(x,y,z)$.

Prema tome se kao diferencijalni uvjet ravnoteže kontinuuma dobiva sistem od tri parcijalne diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \gamma_x(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \gamma_y(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \gamma_z(x,y,z) = 0$$

Sva naponska polja koja zadovoljavaju diferencijalne uvjete zadovoljavati će dakako i integralne uvjete ravnoteže, koji su već ranije prikazani.

Iz dobivenog sistema mogu se odrediti tri funkcije.

U najjednostavnijem slučaju poznata su sve funkcije naponskih komponenti, a iz uvjeta ravnoteže se odredjuju volumenske sile koje održavaju ravnotežu.

Za praktične potrebe je važan obrnuti zadatak: poznate su volumenske sile(npr. težina) i poznata su djelovanja na oplošju, pa treba odrediti funkcije naponskih komponenti. Vidljivo je da se svih šest funkcija ne može odrediti samo pomoću uvjeta ravnoteže, pa taj zadatak ima u nekom smislu svojstvo preodredjenosti.

Za rješavanje zadatka odredjivanja naponskih funkcija moraju se uvesti dodatni uvjeti koji će se dobiti promatranjem polja pomaka.

HWPK-85-405

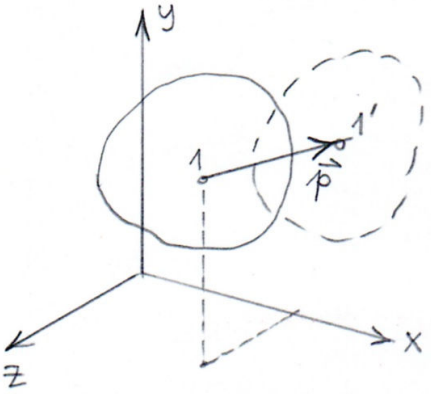
Pomaci i deformacije

Polje pomaka

U mehanici kontinuuma proučavaju se pomaci dijelova materije koji nastaju pri gibanju, ili su rezultat promjene uvjeta u kojima se promatrani dio materije nalazi.

Statička razmatranja se zasnivaju na pretpostavci da se tokom opterećivanja promatrani dio materije deformira, dakle pomiče, te da nakon opterećivanja, pod nepromjenjivim opterećenjem, miruje. U tom se slučaju ističu dva položaja: početni neopterećeni i konačni, pod opterećenjem. Analogno ponašanje se pretpostavlja i pri djelovanju promjene temperature.

Ovdje će se za opisivanje polja pomaka upotrijebiti koordinate početnih položaja točaka promatranog dijela materije.



U početnom položaju će neka točka promatranog dijela materije imati koordinate x,y,z.(na skici označena s 1).

Pomaknuti položaj je odredjen vektorom p koji je funkcija položaja. Početak vektora je u početnom položaju, a šiljak u pomaknutom. Vektor je odredjen koordinatama u,v,w koje su funkcije položaja:

$$\vec{p}(x,y,z) = u(x,y,z)\vec{i} + v(x,y,z)\vec{j} + w(x,y,z)\vec{k}$$

Prema tome će koordinate točke u pomaknutom položaju biti:

$$x' = x + u(x,y,z); \quad y' = y + v(x,y,z); \quad z' = z + w(x,y,z)$$

Polje deformacija

Deformacija je kvalitativno definirana kao promjena oblika i/ili promjena volumena promatranog dijala materije. Ovdje će se uvesti veličine pomoću kojih se deformacije odredjuju i kvantitativno.

Pomaci dijela materije ne izazivaju uvijek i deformacije.

Ukoliko se prilikom pomicanja ne mijenjaju udaljenosti izmedju bilo kojeg para tpčaka promatranog dijela materije, onda je tokom pomicanja taj dio ostao nedeformiran.

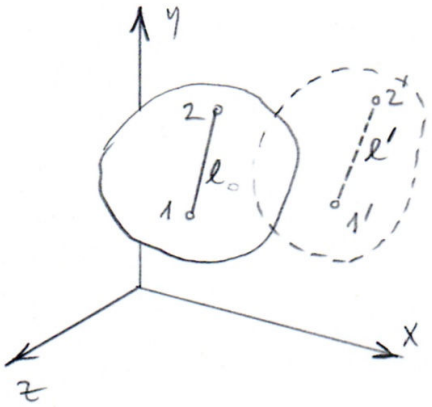
Za opis deformacije materije prikazane česticama, dakle diskretno, promatraju se promjene udaljenosti čestica.

Za ppis deformacije kontinuuma pogodno je uvesti dvije nove veličine: uzdužnu deformaciju i posmičnu deformaciju.

Kako se u ovom prikazu promatraju samo tijela u krutom agregatnom stanju, navoditi će se umjesto "dio materije" samo:"tijelo".

HWPK-85-406

Uzdužna deformacija



Na dijelu materije koji se nalazi u početnom položaju odabiru se dvije točke: 1,2.

Na pomaknutom tijelu će se te točke naći u položajima 1',2'.

Njihova udaljenost na početnom položaju će se označiti s l_0, a udaljenost u pomaknutom položaju s l'.

Razlikovati će se apsolutna i relativna uzdužna deformacija.

Aposlutna uzdužna deformacija je promjena udaljenosti dvaju točaka na tijelu.

$$\Delta l = l' - l_0$$

Za izricanje zakonitosti koje povezuju polje pomaka i naponsko polje pogodno je da se uvede relativna uzdužna deformacija.

Relativna uzdužna deformacija je omjer apsolutne uzdužne deformacije i početne udaljenosti točaka(označava se malim grčkim slovom epsilon: ε).Kraće se naziva i "dilatacija"

$$\varepsilon_{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Razlikovati će se prosječna relativna uzdužna deformacija i relativna uzdužna deformacija u točki.

Prosječna relativna uzdužna deformacija se pridružuje konačnoj dužini.

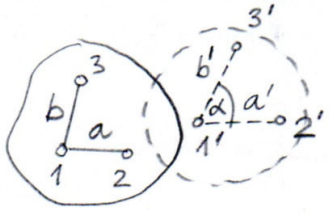
Relativna uzdužna deformacija u točki ili samo:"relativna uzdužna deformacija" se pridružuje infinitezimalnoj dužini koja je paralelna s odabranom osi. Indeks uz oznaku deformacije se odnosi na odabranu os.

$$\varepsilon_x = \lim_{l \to 0} \frac{\Delta l}{l}$$

U općem slučaju je relativna uzdužna deformacija funkcija položaja. Za razne smjerove iste točke moguće su različite relativne uzdužne deformacije.

Relativna posmična deformacija

Aposlutna posmična deformacija se ne definira.



Za odredjivanje posmične deformacije odabire se na tijelu jedna osnovna točka i dvije pomoćne i to tako, da spojnice pomoćnih točaka s osnovnom budu medjusobno okomite.

Na pomaknutom poločaju treba ustanoviti kut izmedju pomaknutih spojnica odabranih točaka.

HWPK-85-407

Relativna posmična deformacija je razlika pravog kuta i kuta kojeg spojnice promatranih točaka zatvaraju u pomaknutom položaju. Kraće se naziva i "klizanje"

$$\varepsilon_{ab} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Razlikovati će se prosječna relativna posmična deformacija i relativna posmična deformacija u točki.

Prosječna relativna posmična deformacija se pridružuje konačnim dužinama.

Relativna posmična deformacija u točki ili samo: "relativna posmična deformacija" se pridružuje okomitim infinitezimalnim dužinama koje su paralelne s dvije odabrane okomite osi. Indeksi uz oznaku deformacije odnose se na te dvije osi.

$$\varepsilon_{xy} = \lim_{\substack{a\to 0 \\ b\to 0}} \varepsilon_{ab}$$

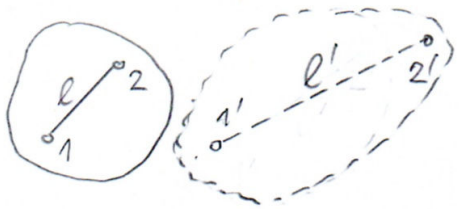
U općem slučaju je relativna posmična deformacija funkcija položaja. Za razne parove okomitih osi moguće su u istoj točki različite relativne posmične deformacije.

HWPE-8c-408

Deformacije pri infinitezimalnim pomacima

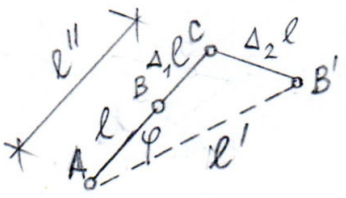
Izrazi za deformacije u općem obliku nisu elementarni. Uz ograničenje na infinitezimalne pomake izrazi se bitno pojednostavnjuju a mogu se zadovoljavajućom točnosti primijeniti na konstrukcije kod kojih se pojavljuju vrlo mali pomaci.

Relativna uzdužna deformacija



Na tijelu u početnom položaju odabrana je dužina ℓ s krajnjim točkama 1,2.

Na pomaknutom položaju tijela se krajevi dužine nalaze na 1′,2′, a dužina je označena s ℓ'.



Radi odredjivanja razlike duljina nanijeti će se paralele s ℓ i ℓ' iz točke A. Krajevi paralelnih dužina nalaziti će se u B i B′. Točka B′će se projicirati na pravac odredjen dužinom ℓ i ta projekcija će se označiti s C. Dužina B′C će se označiti s $\Delta_2\ell$, a dužina BC sa $\Delta_1\ell$. Dužina Ac će se označiti ℓ''. Dobivem je pravokutni trokut $\ell'', \Delta_2\ell, \ell'$. Kateta $\Delta_2\ell$ tog trokuta je infinitezimalna, a preostale dvije stranice su konačne. Zbog toga je i kut nasuprot infinitezimalne katete; φ infinitezimalan. Veza duljina ℓ'' i ℓ' je odredjena izrazom:

$$\ell'' = \ell' \cdot \cos\varphi$$

Cosinus infinitezimalnog kuta se za malu veličinu višeg reda razlikuje od jedinice, pa se može uzeti:

$$\ell'' = \ell'$$

Pri infinitezimalnim pomacima je duljina pomaknute dužine jednaka njezinoj projekciji na pravac odredjen početnom dužinom.

Zbog toga će i apsolutna uzdužna deformacija u tom slučaju biti jednaka razlici duljina projekcije pomaknute dužine i početne dužine:

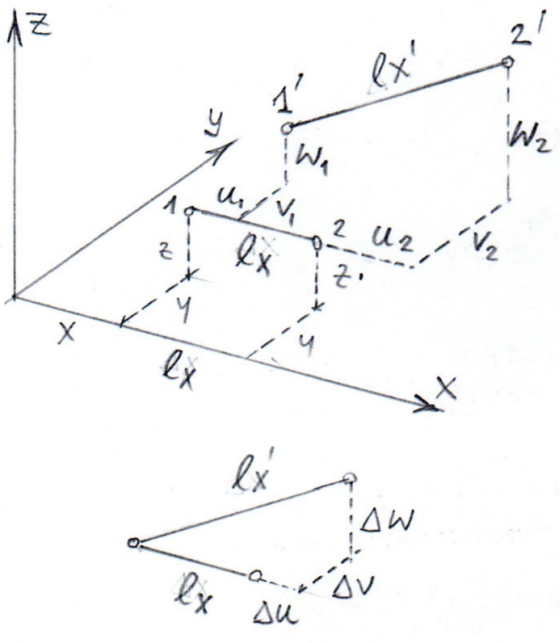
$$\Delta\ell = \ell' - \ell = \ell'' - \ell = \Delta_1 \ell$$

Time je odredjena i relativna uzdužna deformacija:

$$\varepsilon_\ell = \frac{\Delta_1 \ell}{\ell}$$

Pri odredjivanju relativne uzdužne deformacije u točki promatra se limes prosječne deformacije, ako početna dužina teži nuli. U tom slučaju će dužine koje se promatraju biti infinitezimalne, a pripadne promjene pomaka će od njih biti manje za red veličine, pa će vrijediti ustanovljeni odnosi.

Ako su funkcije infinitezimalnih pomaka u,v,w zadane u pravokutnom koordinatnom sistemu najlakše je odrediti relativne uzdužne deformacije u točki za paralele s koordinatnim osima.



Na tijelu u početnom položaju odabrana je dužina ℓ_x, s krajnjim točkama 1,2. Pomaknuti položaj je pznačen s ℓ_x', a odgovarajuće krajnje točke s 1′,2′.

Na odgovarajući način su označe-ne i komponente vektora pomaka.

Dužine ℓ_x' i ℓ_x će se usporediti tako da se paralelne dužine nanesu iz iste točke, koja je označena s A. Preostali krajevi su označeni s B i B′.

Medjusobni položaj B i B′je odredjen razlikama komponenata pomaka dviju točaka, koje su odredjene izrazima:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = u(x+\ell_x, y, z) - u(x, y, z)$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = v(x+\ell_x, y, z) - v(x, y, z)$$

$$\Delta w = w_2 - w_1 = w(x+\ell_x, y, z) - w(x, y, z)$$

Dužine Δv i Δw su okomite na ℓ_x pa dužina $\ell_x + \Delta u$ pretstavlja projekciju pomaknute dužine na pravac početne, t.j. Δu je apsolutna uzdužna deformacija.

HWPK-85-409

Relativna uzdužna deformacija za dužinu ℓ_x je odredjena izrazom:

$$\varepsilon_{\ell_x} = \frac{\Delta u}{\ell_x}$$

Relativna uzdužna deformacija u smjeru x za točku x,y,z je odredjena limesom deformacije za dužinu ℓ_x , kada ℓ_x teži nuli:

$$\varepsilon_x = \lim_{\ell_x \to 0} \frac{\Delta u}{\ell_x} = \lim_{\ell_x \to 0} \frac{u(x+\ell_x, y, z) - u(x, y, z)}{\ell_x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Pokazano je, da je za infinitezimalne pomake relativna uzdužna derivacija u točki jednaka parcijalnoj derivaciji komponente pomaka koja odgovara smjeru deformacije po koordinati paralelnoj sa smjerom deformacije.

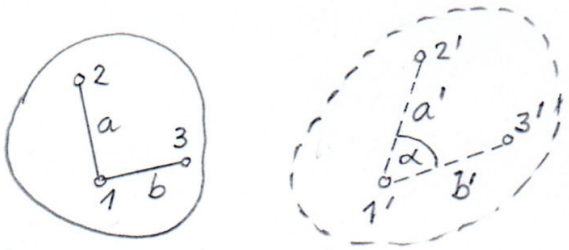
Analogno se odredjuju relativne uzdužne deformacije u točki za smjerove y i z:

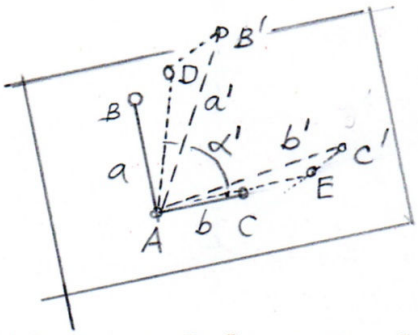
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

HWPK-85-410

Relativna posmična deformacija





Na tijelu u početnom položaju odabrane su točke 1,2,3 tako da spojnice 1,2 i 2,3 zatvaraju pravi kut. Spojnice će se označiti s a i b.

Na pomaknutom položaju se odabrane točke nalaze na mjestima 1′,2′ i 3′, a dužine a i b prelaze u a′i b′.

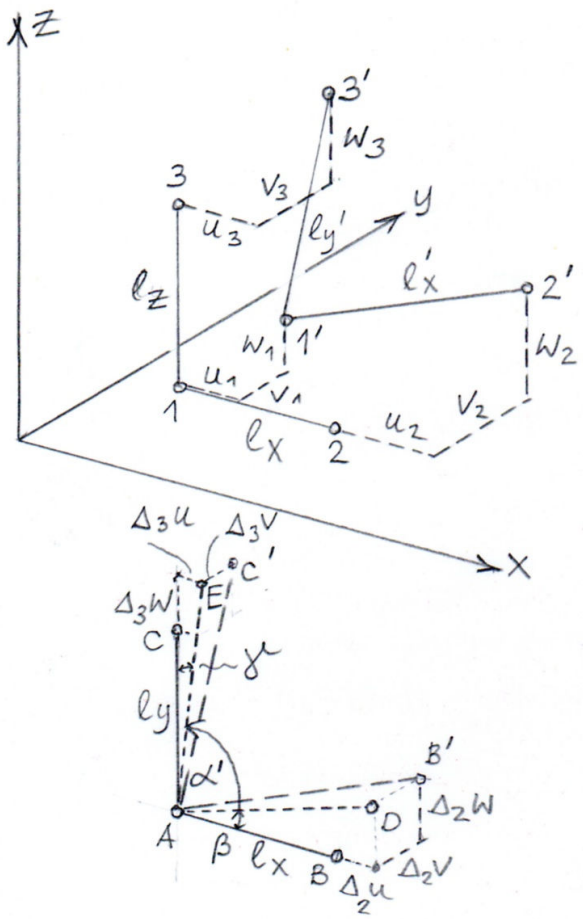
Radi odredjivanja kuta izmedju pomaknutih dužina nanijeti će se iz točke A paralele s početnim položajem dužina i tako odrediti krajevi B i C. Iz točke A će se nanijeti i paralele s pomaknutim dužinama a′i b′i tako odrediti krajevi B′i C′.

Točkama A,B,C je odredjena ravnina koja je paralelna s početnim dužinama. Na tu ravninu će se projicirati krajevi prenesenih pomaknutih dužina B′i C′. Tako su odredjene točke D i E.

Dužine AE i AD zatvaraju kut α' . Kut α' se (uz infinitezimalne pomake) od kuta α kojeg zatvaraju pomaknute dužine razlikuje za infinitezimalnu veličinu pa vrijedi:

$$\varepsilon_{ab} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha'$$

Ako su funkcije infinitezimalnih pomaka u,v,w zadane u pravokutnom koordinatnom sistemu yxz, najlakše će se odrediti relativne posmične deformacije u točki za smjerove paralelne s koordinatnim osima.



Na tijelu u početnom položaju odabrane su dužine l_x i l_z, odredjene točkama 1,2,3. Pomaknuti položaji točaka su označeni s 1',2',3', a pomaknuti položaji dužina sa l_x' i l_z'.

Na odgovarajući način su označene i projekcije vektora pomaka.

Za odredjivanje kuta treba pomaknute dužine projicirati na ravninu odredjenu početnim dužinama.

Radi boljeg uočavanja potrebnih odnosa nanijeti će se paralele sa svim dužinama iz točke A.

U točku A će se nanijeti krajevi koji odgovaraju krajevima 1 i 1', a preostali krajevi će se označiti s B i C, odnosno B'i C'.

Medjusobni položaj točke B i B' odredjen je razlikama veličina-komponenti vektora pomaka, koji su odredjeni izrazima:

$$\Delta_2 u = u(x+l_x, y, z) - u(x, y, z)$$
$$\Delta_2 v = v(x+l_x, y, z) - v(x, y, z)$$
$$\Delta_2 w = w(x+l_x, y, z) - w(x, y, z)$$

Medjusobni položaj točaka C i C'odredjen je razlikama odgovarajućih veličina komponenti vektora pomaka, koji su odredjene izrazima:

$$\Delta_3 u = u(x, y, z+l_z) - u(x, y, z)$$
$$\Delta_3 v = v(x, y, z+l_z) - v(x, y, z)$$
$$\Delta_3 w = w(x, y, z+l_z) - w(x, y, z)$$

Projekcije točaka B'i C'na ravninu odredjenu početnim dužinama su točke D i E. Medjusobni položaj točaka B i D odredjuju $\Delta_2 u$, $\Delta_2 w$ a medjusobni položaj zočaka C i E odredjuju $\Delta_3 u$, $\Delta_3 w$.

Zbog infinitezimalnih pomaka može se relativna posmična deformacija odrediti pomoću kuta α' kojeg zatvaraju stranice AD i AE.

Kut izmedju l_x i l_z je pravi, pa se α' može odrediti prema:

HWPK-85-411

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma$$

Kut β se može odrediti iz pravokutnog trokuta ADF:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\Delta_2 w}{l_x + \Delta_2 u}$$

Kut β je infinitezimalan pa je arctg u lučnoj mjeri jednak tangensu: Osim toga se infinitezimalni $\Delta_2 u$ može zanemariti prema l_x pa se dobiva:

$$\beta = \frac{\Delta_2 w}{l_x}$$

Analogno se kut γ može odrediti prema:

$$\gamma = \frac{\Delta_3 u}{l_z}$$

Zbroj kuteva β i γ upravo daje traženu relativnu posmičnu deformaciju:

$$\varepsilon_{l_x, l_y} = \frac{\pi}{2} - \alpha' = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right) = \beta + \gamma = \frac{\Delta_2 w}{l_x} + \frac{\Delta_3 u}{l_z}$$

Relativna posmična deformacija za smjerove x i z u točki xyz je odredjena limesom izraza za dužine l_x i l_z, kada te dužine teže k nuli:

$$\varepsilon_{xz} = \lim_{l_x \to 0} \frac{\Delta_2 w}{l_x} + \lim_{l_y \to 0} \frac{\Delta_3 u}{l_y}$$

$$\varepsilon_{xz} = \lim_{l_x \to 0} \frac{w(x+l_x, y, z) - w(x,y,z)}{l_x} + \lim_{l_z \to 0} \frac{u(x, y, z+l_z) - u(x,y,z)}{l_z}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Pokazano je da je relativna posmična deformacija u točki jednaka zbroju parcijalne derivacije komponente pomaka paralelne s prvim smjerom po drugom smjeru i parcijalne derivacije po prvom smjeru komponente pomaka paralelne s drugim smjerom.

Analogno se odredjuju i relativne posmične deformacije u točki za smjerove xy i yz:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

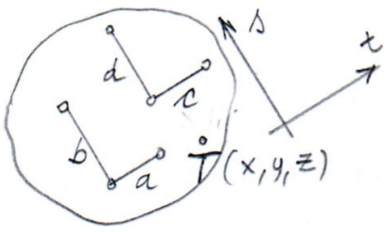
Pokazati će se da je sa šest funkcija $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ potpuno odredjeno polje deformacija pri infinitezimalnim pomacima.

HWPK-85-412

Homogeno polje deformacija

U homogenom polju deformacija su relativne deformacije za iste smjerove u svim točkama konstantne.

Prema tome su u homogenom polju deformacija prosječne relativne deformacije za sve medjusobno paralelne dužine, konstantne.



Na skici je prikazano tijelo čiji oblik nije bitan. Odabrane su proizvoljne, medjusobno okmite osi s i t. Na tijelu je označena proizvoljna točka T (x,y,z) i dužine a i b paralelne s osima s,t, te dužine c i d paralelne s osima s,t.

Ako je polje deformacija homogeno mora vrijediti:

$$\varepsilon_s(x,y,t) = \varepsilon_a = \varepsilon_c$$

$$\varepsilon_t(x,y,z) = \varepsilon_b = \varepsilon_d$$

$$\varepsilon_{s,t}(x,y,z) = \varepsilon_{ab} = \varepsilon_{cd}$$

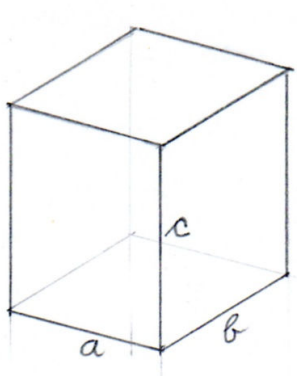
Polje deformacija će biti homogeno, ako su pomaci linearne funkcije pravokutnih koordinata.

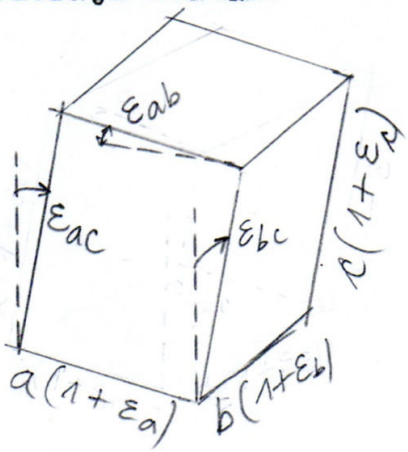
Za homogeno polje deformacija vrijedi:

Točke koje na početnom položaju tijela leže na paralelnim ravninama ležati će i u pomaknutom položaju na medjusobno paralelnim ravninama (koje ne moraju biti paralelne s svojim početnim položajima).

Homogeno polje deformacija je potpuno odredjeno s tri relativne uzdužne deformacije za nekomplanarne smjerove i tri relativne posmične deformacije za tri grupe od po dvije medjusobno okomite dužine, ali takove da njihove normale nisu komplanarne.

Homogeno polje deformacija se najpreglednije prikazuje na tijelu koje je u početnom položaju kvadar.

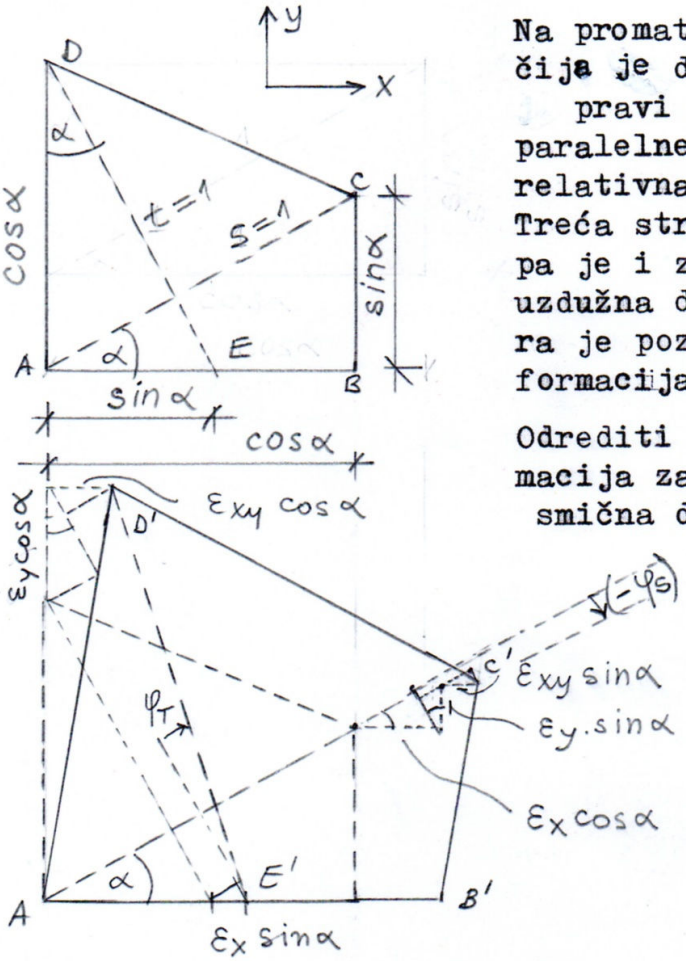




HWPK-85-413

Relativne deformacije za proizvoljne smjerove u polju homogenih deformacija.

Ako je polje deformacija homogeno i zadano, npr. deformacijama za tri okomita smjera, mogu se pomoću geometrijskih razmatranja odrediti relativne deformacije za proizvoljne smjerove. Ti izrazi se ovdje ne će prikazivati u općem obliku; prikazati će se samo specijalni slučaj za infinitezimalne pomake i smjerove koji su paralelni s ravninom u kojoj su zadane deformacije.



Na promatranom tijelu odabire se trapez čija je dijagonala jedinična i zatvara pravi kut* Dvije stranice trapeza su paralelne i za njihov smjer je poznata relativna uzdužna deformacija ε_y. Treća stranica je okomita na te dvije pa je i za taj smjer poznata relativna uzdužna deformacija ε_x. Za oba smjera je poznata i relativna posmična deformacija ε_{xy}.

Odrediti će se relativna uzdužna deformacija za dijagonalu s i relativna posmična deformacija za dijagonalu s i dužinu t.

Na skci je punom linijom prikazan deformirani trapez.

Komponentni pomaci točke C su odredjeni iz poznatih deformacija. Kako se radi o infinitezimalnima pomacima promjena dužine će se odrediti projiciranjem na početni položaj. Veličinu projekcija će se odrediti iz odgovarajućih pravokutnih trokuta. Kako je duljina dijagonale jedinična, promjene dužine su ujedno i relativne deformacije.

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \varepsilon_y \sin\alpha \cdot \sin\alpha + \varepsilon_{xy} \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Zaokret dijagonale će se odrediti projiciranjem relativnog pomaka na okomicu na dijagonalu. Zaokrenuta dijagonala nije ucrtana; ona spaja točke A i C′.

$$\varphi_s = -\varepsilon_x \cos\alpha \sin\alpha + \varepsilon_y \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \varepsilon_{xy} \sin\alpha \cdot \sin\alpha$$

Na analogni način će se odrediti zaokret dužine t, čiji je pomaknuti položaj ucrtan izmedju točaka D′ i E′.

$$\varphi_T = -\varepsilon_x \sin\alpha \cos\alpha + \varepsilon_y \cos\alpha \sin\alpha + \varepsilon_{xy} \cos\alpha \cdot \cos\alpha$$

* s dužinom "t" koja spaja vrh D i stranicu AB.

HNPK-85-414

Relativna posmična deformacija za smjerove dijagonale "s" i dužine "t" dobiva se zbarajanjem kuteva φ_T i γ_s.

$$\varepsilon_{st} = 2(-\varepsilon_x + \varepsilon_y)\cos\alpha\sin\alpha + \varepsilon_{xy}(\cos^2\alpha - \sin 2\alpha)$$

Glavne osi deformacija

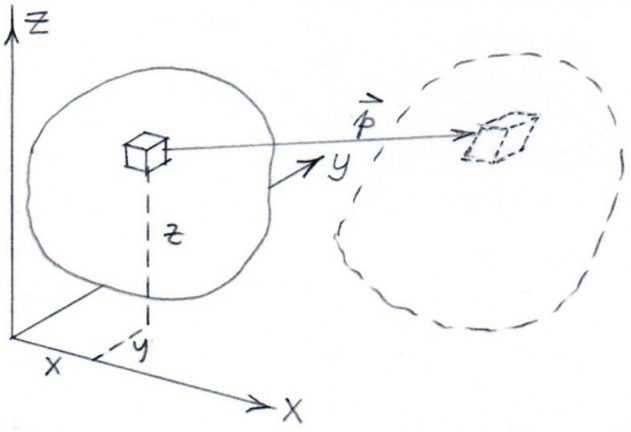
U homogenom polju deformacija mogu se odrediti tri medjusobno okomite osi tako, da za njih iščezavaju posmične deformacije. Pripadne uzdužne relativne deformacije nazivaju se glavne relativne uzdužne deformacije. Jedna od glavnih uzdužnih deformacija je ujedno i najveća uzdužna deformacija koja se u promatranom polju deformacija može pojaviti, a jedna daljnja je ujedno i najmanja relativna uzdužna deformacija koja se može pojaviti.

Prema tome se unutar tijela koje će se homogeno deformirati može odrediti u početnom položaju takav kvadar, koji će i nakon deformacije ostati kvadar.

Postupci za odredjivanje glavnih osi deformacija i smjerova ekstremnih posmičnih deformacija su analogni postupcima prikazanim za napone.

HWPK-85-415

Nehomogeno polje deformacija



U općem slučaju polje pomaka ne ovisi linearno o pravokutnim koordinatama i pripadno polje deformacija nije homogeno.

Ako su funkcije pomaka neprekinute i derivabilne biti će polje pomaka za svaki neizmjerno mali dio tijela homogeno.

Neprekinutost funkcija pomaka znači da je tijelo tokom pomicanja ostalo jedna cjelina; nije se pojavio slom ili pukotine. Derivabilnost se može intuitivno prihvatiti: proizvoljni pravac na početnom položaju će na pomaknutom položaju prijeći u glatku krivulju bez "lomova".

Ako se polje pomaka u infinitezimalnoj okolini proizvoljne točke može smatrati homogenim, onda je potpuno odredjeno s šest funkcija:

$$\varepsilon_x(x,y,z), \quad \varepsilon_y(x,y,z), \quad \varepsilon_z(x,y,z)$$

$$\varepsilon_{xy}(x,y,z), \quad \varepsilon_{xz}(x,y,z), \quad \varepsilon_{yz}(x,y,z)$$

Te funkcije nisu nezavisne; mogu se izvesti iz tri funkcije koje odredjuju polje pomaka: $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$

Ako su pomaci infinitezimalni, ta veza je linearna:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

U tehnici se za veličine koje povezuju linearne zakonitosti kaže da za njih vrijedi princip superpozicije.

Veza izmedju napona i deformacija

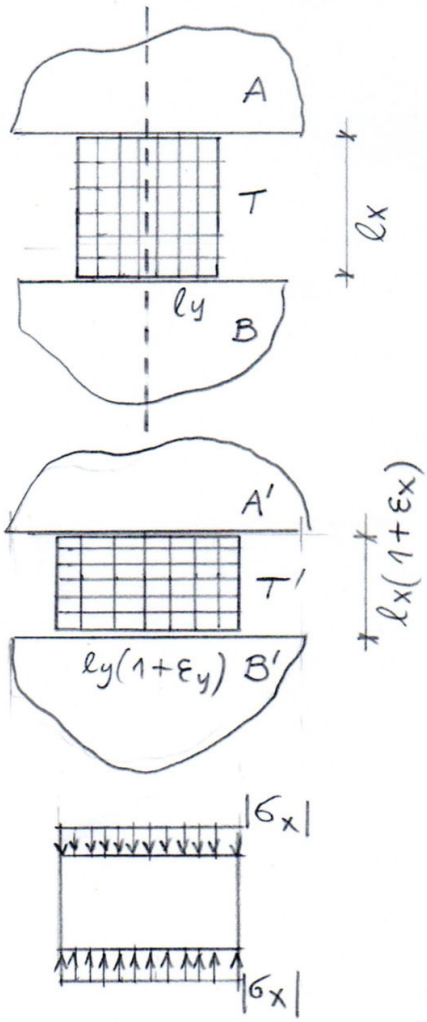
Iz iskustva s elastičnim materijalima dobiva se kvalitativni pojam o vezi napona i deformacija. Očekuje se da su unutarnje sile veće u područjima s većim deformacijama.

Ranije je navedeno da se za polje napona i za polje deformacija može pretpostaviti da su u infinitezimalnoj okoline neke točke homogena, pa će se pokusi za odredjivanje veze napona i deformacija provoditi tako da se stanje uzorka što više približi homogenom stanju.

HWPK-85-416

Idealni tlačni pokus

Realni tlačni pokusi se pokušavaju što bolje približiti idealnoj situaciji koja će se ovdje opisati. Sredstva kojima se to postiže se ovdje ne će navoditi.



Kvadar iz homogenog materijala nalazi se u neopterećenom stanju izmedju dva tijela A i B koja su nedeformabilna i imaju svako po jednu idealno ravnu plohu koja pristaje uz plohu kvadra.

Tijela A i B se mogu translatirati po pravcu okomitom na ravne plohe.

Kontakti izmedju nedeformabilnih tijela A i B i kvadra su idealni: bez trenja.

U pokusu se tijela A i B približavaju translatorno po pravcu i tako deformiraju kvadar. Tokom pokusa se mjeri približavanje tijela A i B kao i ukupna sila P kojom djeluju na kvadar.

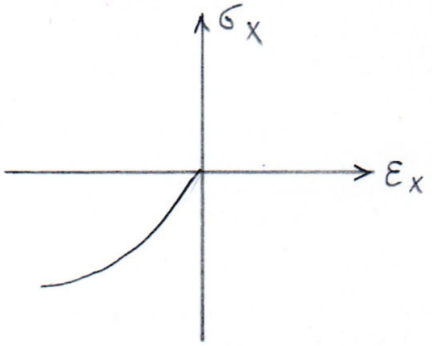
Na nedeformiranom kvadru je ucrtana pravilna mreža, koja nekon deformacije prelazi u novu, ali još uvijek pravilnu mrežu. Na osnovi toga se može zaključiti, da se svaki proizvoljno odabrani kvadar koji se zamišlja unutar zadanoga nalazi u proporcionalnom stanju: relativne deformacije su jednake, pa je polje po-

maka homogeno. Ako je materijel homogen, biti će za deformaciju jedankih kvadara potrebne jednake sile, pa će i prosječni naponi za svaki kvadar biti jednaki. Može se zamisliti podjela na proizvoljno male kvadre, što znači da će i naponi u točkama biti konstantni i jednaki za sve ravnine paralelne kontaktnim ravninama, pa je prema tome i stanje napona homogeno.
Konstantni napon će se moći odrediti prema izrazu:

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

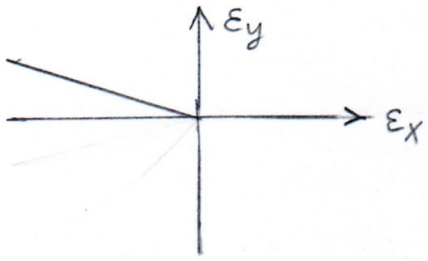
Napon je na skici označem apsolutno jer je po definiciji pritisak negativan.

Tokom pokusa se mjerila sila P i promjena dužina bridova: pojavljuju se dva podataka:relativna uzdužna deformacija brida paralelnog s pravcem translacije i uzdužna deformacija bridova koji su okomiti na taj pravac. Ustanovljena zakonitost se obično prikazuje s dvije funkcije:



Veza normalnog napona i paralelne relativne uzdužne deformacije, koja se često prikazuje grafom i naziva: "$\sigma - \varepsilon$ dijagram".

Za mnoge materijale je veza σ i ε nelinearna i njeno matematičko opisivanje može biti složeno.



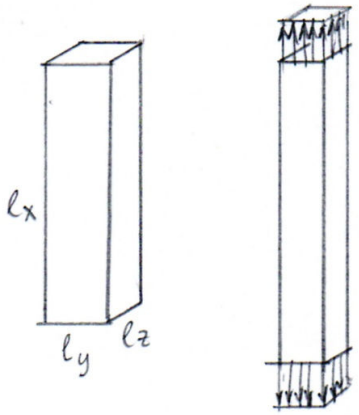
Druga funkcija opisuje vezu okomite relativne uzdužne deformacije i relativne uzdužne deformacije paralelne s djelovanjem sile.

Ta se funkcija za sve tehničke materijale smatra linearnom i opisuje se u obliku:

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_y$$

Uvedena konstanta koja se označava malim grčkim slovom "ni" naziva se Poissonov broj (Poason) ili koeficijent poprečne kontrakcije.

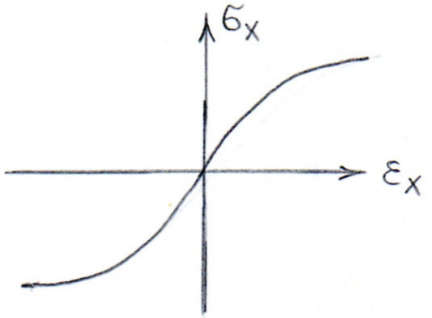
Idealni vlačni pokus

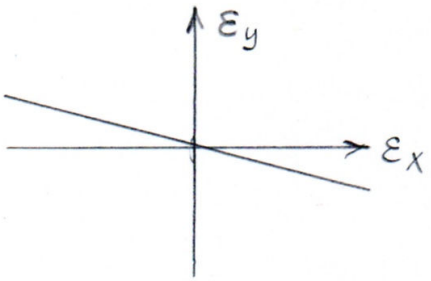


Promatra se uzorak u početnom,nedeformiranom položaju i deformiran pod djelovanjem homogenog polja napona. Nastaje situacija analogna onoj kod tlačnog pokusa.

U praktičnoj provedbi uzorci su relativno vitki, pa se deformaciono stanje u srednjem dijelu zadovoljavajuće približava homogenom.

HWPE-85-417





Pomoću podataka iz vlačnog pokusa dobiva se veza napona i deformacije pa je tako ustanovljena veza za cijelo područje: tlačno i vlačno.

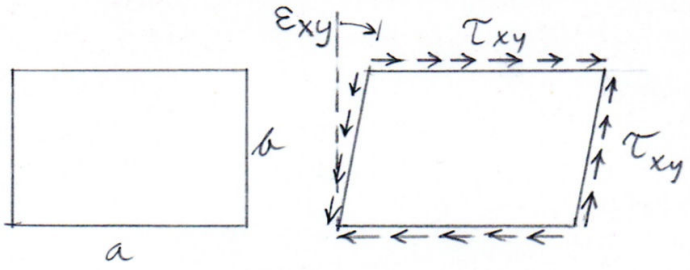
Za neke materijale je ponašanje u vlačnom području analaogno ponašanju u tlačnom: to su uglavnom metali koji se koriste za izvedbu konstruktivnih elemenata.

Postoji grupa materijala koja se u vlačnom području ponaša drugačije nego u tlačnom: glavni primjeri su: kamen, opeka i beton.

Veza deformacije okomite na smjer sile i deformacije za smjer paralelan sa silom je u vlačnom području jednaka vezi za tlačno područje.

Deformacija pri čistom posmiku

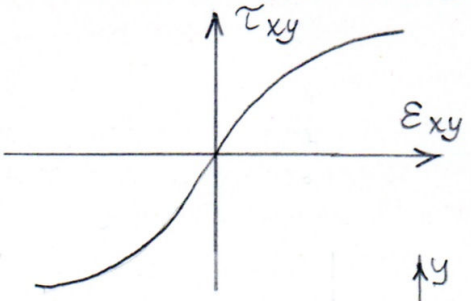
Zasebnim pokusom bi trebalo ispitati stanje deformacije koju izaziva čisti ppsmik. Taj se pokus teško može direktno realizirati, pa se rezultati izvode iz pogodnih pokusa.



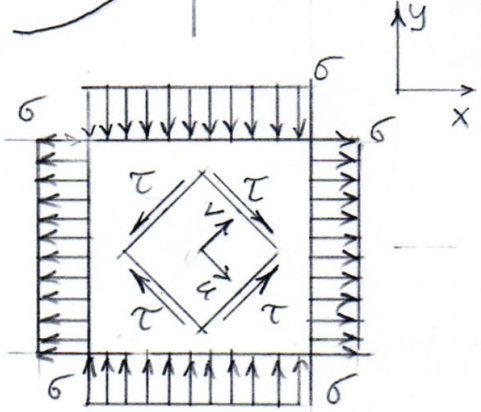
Promatra se kvadar u nedeformiranom stanju.

Pod djelovanjem čistog posmika pojaviti će se posmična deformacija.

Ako su deformacije infinitezimalne, iščezavaju pripadne uzdužne deformacije, t.j. visina paralelepipeda koji nastaje deformiranjem biti će jednaka visini kvadra. U odgovarajućem pokusu odredila bi se veza posmičnog napona i pripadne relativne posmične deformacije.



Na skici je prikazan graf takve funkcije. Kod homogenih materijala je centralno simetričan.



Stanje čistog posmika postiže se na uzorku na koji djeluje pritisak u jednom smjeru, a zatezanje u drugom smjeru koji je okomit na prvi.

Kvadar čije stranice zatvaraju kut od 45° sa smjerovima pritiska odnosmo zatezanja, nalaziti će se u stanju čistog posmika. Već je pokazano, da će u tom slučaju veličina posmika

HWPK-BS-418

biti jednaka veličini normalnih naprezanja na plohama osnovnog kvadra:

$$\tau = \sigma$$

Iz izraza za odredjivanje relativnih deformacija dobiva se relativna posmična deformacija za kvadar na koji djeluju samo posmici:

$$\varepsilon_{uv} = 2\varepsilon_x = 2\varepsilon_y$$

Na taj se način mogu iz pokusa s djelovanjem pritiska i zatezanja odrediti rezultati za čisti posmik

Zakonitosti koje opisuju vezu napona i deformacija mogu biti vrlo složene. Ovdje će se navesti samo neki osnovni podaci.

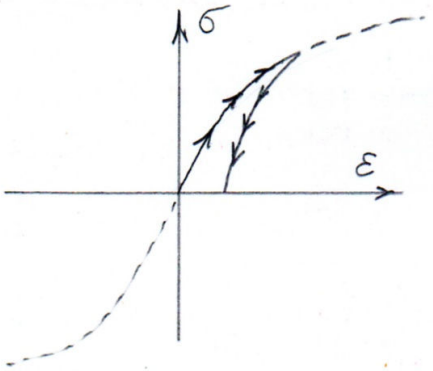
Veza napona i deformacija je ovisna i o temperaturi.

Bitna je podjela materijala na elastične i neelastične.

Materijal je idelano elastičan ako je veza napona i deformacija jedinstvena za sve faze opterećivanja i rasterećivanja materijala.

Materijal je neelastičan ako se veza napona i deformacija pri povećavanju defprmacije, razlikuje od one pri smanjivanju deformacije.

HWPE-85-419



Na skici je prikazan $\sigma - \varepsilon$ dijagram koji sadrži dvije grane: uzlaznu i silaznu. Pri potpunom rasterećenju pojavljuje se deformacija: tzv zaostala ili plastična deformacija.

Kod takovih materijala $\sigma - \varepsilon$ dijagram ovisi o fazama opterećenja i rasterećenja kroz koje je materijal ranije prošao, a ovisi i o brzini s kojom se nanosi opterećenje.

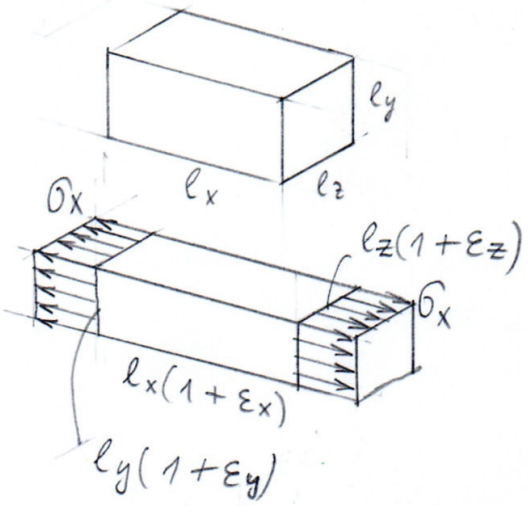
Neki materijali koji se primjenjuju u konstrukcijama imaju dvofazno ponašanje; ako naponi ne prekoračuju neke granične vrijednosti, ti su materijali idealno elastični, a za više napone se mogu ponašati izričito neelastično. Glavni primjer takvog ponašanja nailazi se kod mekog gradjevinskog čelika.

Najjednostavnija veza napona i deformacije je linearna. Kod nekih materijala se veza napona i deformacija zadovoljavajuće točno približava linearnoj. Kod složenijih veza se često uvodi približna linearna veza jer omogućuje relativno jednostavno odredjivanje naponskih i deformacionih polja.

Hooke-ov zakon

Hooke-ov zakon (Hukov) se naživa linearno-elastična veza izmedju napona i deformacija. U tom smislu se linearno-elastičan materijal često naziva Hooke-ov materijal.

Osnovni oblik Hooke-ovog zakona opisuje vezu napona i deformacija pri jednoosnom stanju napona, odnosno pri čistom posmiku.



Ako je os jednoosnog stanja napona paralelna s osi x, glasiti će izrazi za relativne deformacije:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

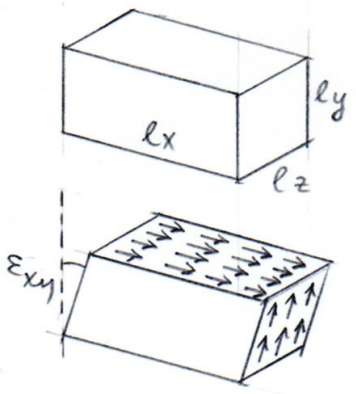
$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E};$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_{xy} = 0; \quad \varepsilon_{xz} = 0; \quad \varepsilon_{yz} = 0$$

Osim Poissonovog broja, koji je već definiran, uvedena je konstanta koja odredjuje vezu normalnog napona i relativne uzdužne deformacije. Naziv konsatnte je "modul elastičnosti" ili "Youngov modul", označava se velikim latiničnim slovom E, a dimenzija je sila/površina. (Jangov modul).

Kada bi Hooke-ov zakon vrijedio i za vrlo velike pomake i kada se materijal ne bi prekinuo, onda bi modul elastičnosti bio napon kod kojeg bi se dužina uzorka podvostručila.



Za kvadar koji se nalazi u stanju čistog posmika, izrazi za vezu napona i deformacije će glasiti:

$$\varepsilon_x = 0; \quad \varepsilon_y = 0; \quad \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

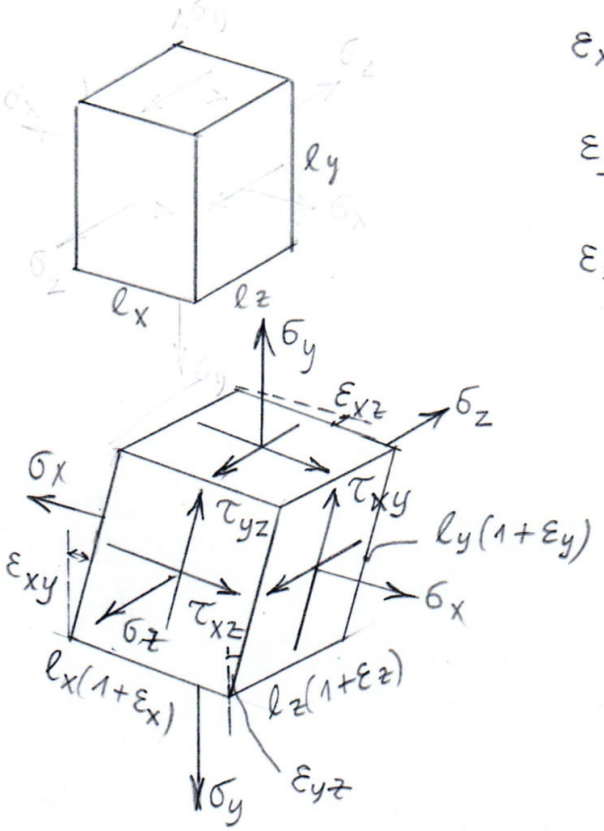
$$\varepsilon_{xz} = 0; \quad \varepsilon_{yz} = 0$$

Uvedena je konstanta koja odredjuje vezu posmičnog napona s relativnom posmičnom deformacijom. naziv konstante je "modul posmika", označava se velikim latiničnim slovom "G", a dimenzija konsatnte je sila/površina.

Kod homogenog materijala će analogni izrazi vrijediti i za vezu preostalih komponentnih napona s odgovarajućim deformacijama.

HNPK-85-420

Za troosno stanje napona dobiva se veza napona i deformacija superpozicijom veza za osnovne slučajeve:



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

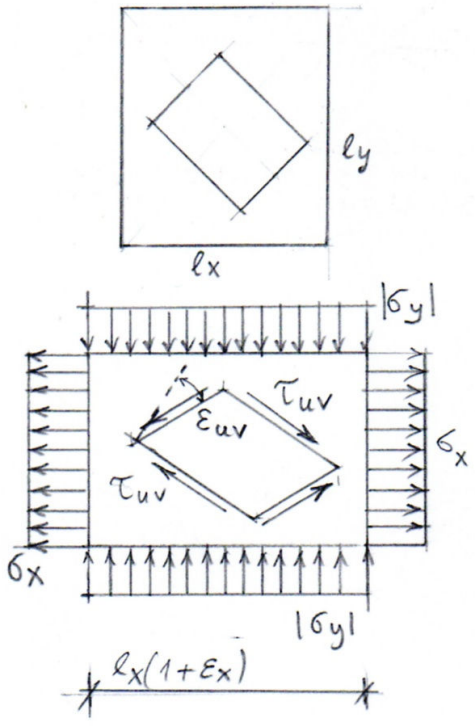
$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

HNPK-85-421

Materijalne konstante E,G,ν koje se pojavljuju u Hoke-ovom zakonu nisu nezavisne. Njihova zavisnost se najlakše odredjuje upravo iz stanja medjusobno okmotog pritiska i zatezanja u kojemu se u ravninama koje zatvaraju kut od 45^0 stupnjeva pojavljuje čisti posmik.



Promatra se kvadar unutar kojeg je označen kvadar čije su stranice pod kutem od 45^0 prema osnovnom kvadru.

Uz stranice osnovnog kvadra uvodi se koodinatni sistem xy, a uz stranice unutarnjeg kvadra sistem uv.

Pod djelovanjem normalnih napona:

$$\sigma_x = \sigma; \quad \sigma_y = -\sigma$$

kvadar se deformira:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E}(1+\nu); \quad \varepsilon_y = -\frac{\sigma}{E}(1+\nu)$$

Unutarnji kvadar će se naći u stanju čistog posmika: veličina napona i deformacije se mogu izraziti pomoću napona i deformacija na osnovnom kvadru:

$$\tau_{uv} = \sigma; \qquad \varepsilon_{uv} = 2\varepsilon_x$$

Prema Hooke-ovom zakonu će za posmični napon i posmičnu deformaciju vrijediti veza:

$$\varepsilon_{uv} = \frac{\tau_{uv}}{G}$$

Ako se Posmični napon izrazi pomoću normalnog na vanjskom kvadru a psomična deformacija pomoću normalne za vanjski kvadar, pa se još uvrsti veza normalne deformacije i napona dobiva se:

$$2\varepsilon_x = \frac{\sigma}{G}; \qquad 2\frac{\sigma}{E}(1+\nu) = \frac{\sigma}{G}$$

Prema tome se G može izraziti pomoću E i ν :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Od tri materijalne konstante koje opisuju ponašanje linearno-elastičnog homogenog materijala, dvije su nezavisne.

Pri tome ν može imati vrijednosti izmedju 0 i 1/2. Negativni ν bi značio da se materijal širi okomito na smjer razvlačenja, a veći od 1/2 bi pretstavljao materijal kojemu se volumen pri jednoosnom pritisku povećava, pa se ta ograničenja mogu i intuitivno prihvatiti.

HNPK-85-422

Naponi izraženi pomoću deformacija.

U osnovnom obliku Hooke-ovog zakona deformacije se izražavaju pomoću napona. Za neke postupke je potrebna i inverzna formulacija: naponi izraženi pomoću deformacija. Zbog jednostavnosti veze za homogeni izotropni materijal, tà se inverzija lako provodi: u prvoj jednadžbi se grupiraju σ_y i σ_z , a druge dvije jedanadžbe se zbrajaju: Obje jednadžbe se množe s E:

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\cdot(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$E(\varepsilon_y + \varepsilon_z) = -2\nu\cdot\sigma_x + (1-\nu)\cdot(\sigma_y + \sigma_z)$$

Iz gornjih jednadžbi se lako eliminira $(\sigma_y + \sigma_z)$; prva se množi s $(1-\nu)$, a druga s ν i zbrajaju se, pa se dobiva:

$$E\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] = (1-\nu-2\nu^2)\cdot\sigma_x$$

Iz gornje jednadžbe se direktno odredjuje σ_x :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\cdot\varepsilon_z\right]$$

Ako se uvedu konstante:

$$P = \frac{(1-\nu)E}{1-\nu-2\nu^2}$$

$$Q = \frac{\nu E}{1-\nu-2\nu^2}$$

može se veza napona i deformacija izraziti sa:

$$\sigma_x = P \cdot \varepsilon_x + Q\,\varepsilon_y + Q \cdot \varepsilon_z$$

$$\sigma_y = Q \cdot \varepsilon_x + P \cdot \varepsilon_y + Q \cdot \varepsilon_z$$

$$\sigma_z = Q \cdot \varepsilon_x + Q \cdot \varepsilon_y + P \cdot \varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \varepsilon_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \varepsilon_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \varepsilon_{yz}$$

Osnovno o linearnoj teoriji elastičnosti

Linearna teorija elastičnosti proučava odredjivanje naponskih i deformacionih polja kontinuuma za koji vrijedi Hooke-ov zakon, pomaci su infinitezimalni, a ravnoteža se formulira na početnom stanju kontinuuma.

Naponsko-deformaciono stanje određuje 15 jednadžbi: tri jednadžbe ravnoteže kontinuuma, šest jednadžbi Hooke-ovog zakona i šest jednadžbi koje povezuju relativne deformacije i funkcije pomaka.

Može se pokazati da se za proizvoljno, ali dva puta derivabilno polje pomaka mogu odrediti naponi i volumenske sile koje održavaju ravnotežno stanje.

Za primjene je važan obrat zadatka: poznate su volumenske sile i dopustiva kombinacija napona i pomaka na oplošju, a traže se polja pomaka i napona. Rješenje vodi na sistem od tri parcijalne diferencijalne jednadžbe za funkcija pomaka ili šest parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za funkcije napona. Može se pokazati da postoje jedinstvena rješenja tih problema, te da vrijedi princip superpozicije.
Ovdje će se skicirati izvod triju jednadžbi za funkcije pomaka, uz pretpostavku da je materijal homogen i izotropan, t.j. E, G, ν su konstante za cijelo područje.

Izrazi za relativne deformacije izražene pomacima uvrstiti će se u Hooke-ov zakon:

$$\sigma_x = P \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + Q \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

HWPK-85-423

Prikazane su samo komponente koje se pojavljuju u prvoj jednadžbi ravnoteže koja glasi:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \gamma_x(x,y,z) = 0$$

Nakon deriviranja i uvrštavanja dobiva se:

$$P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + Q\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + G\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+ G\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \gamma_x(x,y,z) = 0$$

Prva jednadžba će se sresiti, a preostale dvije će se postaviti analogno:

$$P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (Q+G)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (Q+G)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \gamma_x = 0$$

$$(Q+G)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + P\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (Q+G)\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \gamma_y = 0$$

$$(Q+G)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (Q+G)\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + G\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \gamma_z = 0$$

Dobiven je sistem od tri linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima.

U nešto modificiranom obliku te se jednadžbe nazivaju Lamé-ove jednadžbe.

Vidljivo je da se iz tih jednadžbi uz zadane funkcije pomaka u,v,w mogu direktno odrediti volumenske sile. Uz zadane funkcije pomaka odredjeno je i polje napona (str.423) pa prema tome i naponi na oplošju promatranog područje.

Ukoliko su zadane volumenske sile i djelovanja na oplošju, stoji na raspolaganju relativno mali broj rješenja u zatvorenom obliku i to za jednostavnije oblike područja i jednostavnije rasporede volumenskih sila.

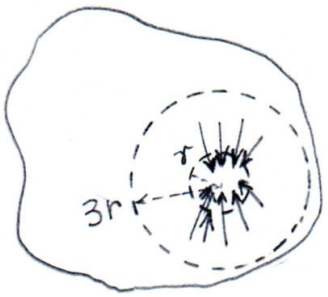
Pomoću pogodnih zatvorenih rješenja mogu se postaviti beskonačni redovi koji teže traženom rješenju. Taj tip rješenja se naziva "razvijeni" i obuhvaća bitno širi skup od skupa zatvorenih rješenja.

Približna ili numerička rješenja se postavljaju pomoću linearne kombinacije pogodnih zatvorenih rješenja i pomoću njih se može rješiti svaki praktični problem, ali provedba postupka može voditi na rješavanje vrlovelikih sistema linearnih jednadžbi.

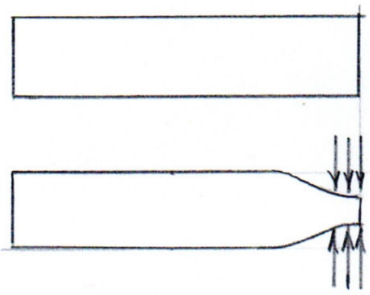
HWPK-85-424

Saint-Venantov princip

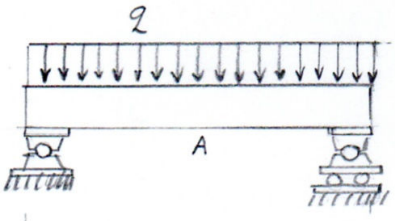
Francuski znanstvenik Saint-Vehant (Sen-Venan) formulirao je slijedeći princip: Ukoliko na elastično tijelo na relativno malom području djeluje grupa sila koje su uravnotežene, onda utjecaj tog djelovanja naglo opada s udaljenosti od područja djelovanja.



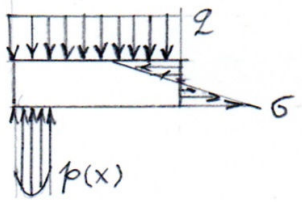
Za praktične potrebe se može prihvatiti pravilo: Ustanoviti će se najmanja kugla koja obuhvaća uravnoteženo djelovanje i njoj pridružiti koncentrična kugla s trostrukim radijusom; za dio tijela koji se nalazi izvan veće kugle, može se smatrati da iščezavaju svi naponi.



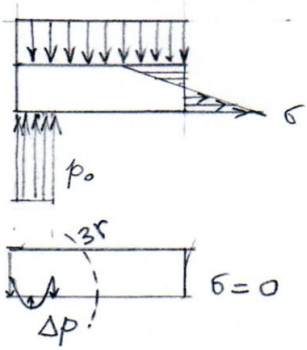
Saint-Venantov princip se može jednostavno ilustrirati kvalitativnim pokusom s plosnatim tijelom koje ima relativno mali modul elastičnosti. Pri lokalnom uravnoteženom djelovanju pojaviti će se deformacija samo u neposrednoj okolini; udaljeniji dijelovi će ostati nedeformirani, pa se može prihvatiti da u njima iščezavaju svi naponi.



Saint-Venantov princip se primjenjuje u većini praktičnih proračuna. Zadano opterećenje se zamjenjuje statički ekvivalentnim koje je pogodnije za provedbu proračuna. Razlika izmedju zadanog i proračunskog djelovanja čini uravnotežena grupa i njen je utjecaj po Saint-Venant-ovom principu ograničen.



Opisati će se jednostavni primjer: pri proračunu proste grede za zadano opterećenje treba odrediti normalni napon u točki A; to je mjesto u kojemu se može pojaviti slom. Za odredjivanje naponskog polja trebala bi biti zadana sva djelovanja na gredu. Na mjestu djelovanja ležaja pojaviti će se naki raspored pritisaka p(x), čije odredjivanje nije elementarno. Kako je područje djelovanja p(x) relativno daleko od točke u kojoj se odredjuje napon, zamijeniti će se p(x) konstantnim pritiskom p_0 i za taj slučaj će se odrediti napon u točki A. Razluku izmedju proračunskog stanja i zadanog stanja čini stanje u kojemu se pojavljuje samo distribuirana sila Δp koja je uravnotežena, pa će njen utjecaj na naponsko polje biti ograničen na neposrednu okolinu. σ od

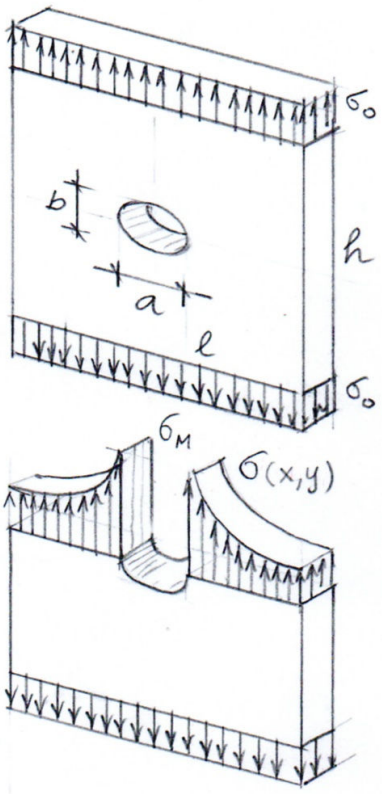


HWPK-85-425

Δp u točki A je prema tome jednak nuli. Važno je uočiti da se za odredjivanje napona u blizini ležaja ovakav pristup ne bi mogao primijeniti.

Koncentracija napona

Koncentracija napona se naziva pojava izraženih lokalnih ekstrema u funkciji napona. Važan primjer pojave koncentracije napona je koncentracija uz konveksnu konturu s relativno malom zakrivljenosti. Ta pojava je opsežno istražena; ovdje će se skicirati osnovni odnosi za jedan jednostavni primjer.



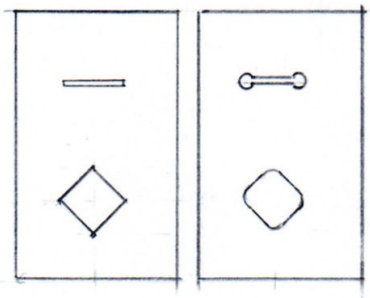
Promatra se prizmatično tijelo u kojemu se nalazi eliptični otvor: jedna os elipse je paralelna s bazom prizme, a druga je okomita. Na baze djeluje konstantni normalni napon.

Promatra se normalni napon duž ravnog presjeka paralelnog s bazama koji prolazi središtem elipse. Uz otvor će se pojaviti izraženi ekstremi. Ako su dimenzije otvora bitno manje od ostalih dimenzija tijela, može se za ekstrem normalnog napona u promatranom presjeku uzeti izraz:

$$\sigma_M = \sigma_0 \cdot \left(1 + 2\frac{a}{b}\right)$$

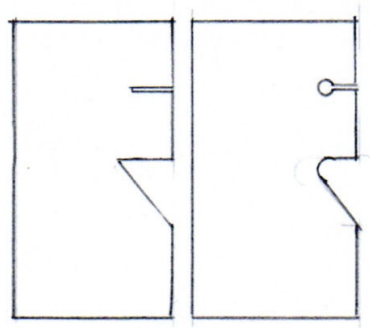
Izraz je točan za granični slučaj kada su dimenzije prizme neizmjerno velike.

Izraz u zagradi naziva se "faktor koncentracije". U ovom slučaju faktor koncentracije pretstavlja omjer ekstremnog napona za prizmu s otvorom i napona koji bi na tom mjestu pojavio u prizmi bez otvora.



Ako se tanki zarez shvati kao granični slučaj elipse, onda će uz rubove napon postići neizmjernu vrijednost, odnosno u praktičnom slučaju materijal će na tim mjestima popustiti i zarez će se povećavati dok ne dodje do rasterećenja ili sloma.

Zbog toga bi svi otvori trebali imati zaobljene rubove.



Slična zakomitost vrijedi i za konveksne udubine na oplošju tijela: i u tom slučaju bi trebalo izbjegavati oštre prijelaze.

Ipak: postoje materijali s izraženim neelastičnim ponašanjem kod kojih se oštećenje oko konvenksnih udubina lokalizira, pa se često toleriraju oštri konveksni dijelovi.

MNPK-85-426

Primjeri elementarnih rješenja linearne teorije elastičnosti

Jednoosno homogeno stanje napona

Linearna teorija elstičnosti se zasniva na pretpostavci o homogenosti polja napona i polja deformacija za svaki neizmjerno mali element kontinuuma, pa sva homogena stanja moraju biti točna rješenja linearne teorije leastičnosti. Za ovaj primjer će se radi cjelovitosti prikazati i pripadno polje pomaka.

Jednoosno homogeno stanje napona karakterizira jedan konstantni glavni napon paralelan jednoj osi, te iščezavanje preostalih glavnih napona; to stanje je jednako u svim točkama.

To stanje se najjednostavnije prikazuje u pravokutnom koordinatnom sistemu; ovdje je os z odabrana kao os s kojom je paralelan konstantni glavni napon:

$$\sigma_x(x,y,z) \equiv 0\,; \qquad \sigma_y(x,y,z) \equiv 0\,; \qquad \sigma_z(x,y,z) = \sigma_{z0}$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) \equiv 0\,; \qquad \tau_{xz}(x,y,z) \equiv 0\,; \qquad \tau_{yz}(x,y,z) \equiv 0$$

Uz homogeni i izotropni materijal tom polju napona odgovara polje pomaka:

$$u = -\nu \frac{\sigma_{z0}}{E} \cdot x\,; \qquad v = -\nu \frac{\sigma_{z0}}{E} \cdot y\,; \qquad w = \frac{\sigma_{z0}}{E} \cdot z$$

Ispravnost polja pomaka se lako provjerava odredjivanjem deformacija:

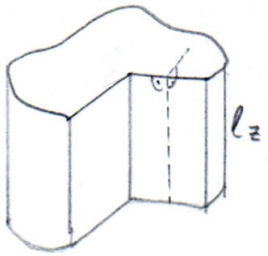
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{\sigma_{z0}}{E}\,; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_{z0}}{E}\,; \qquad \varepsilon_z = \frac{\sigma_{z0}}{E}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0\,; \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,; \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

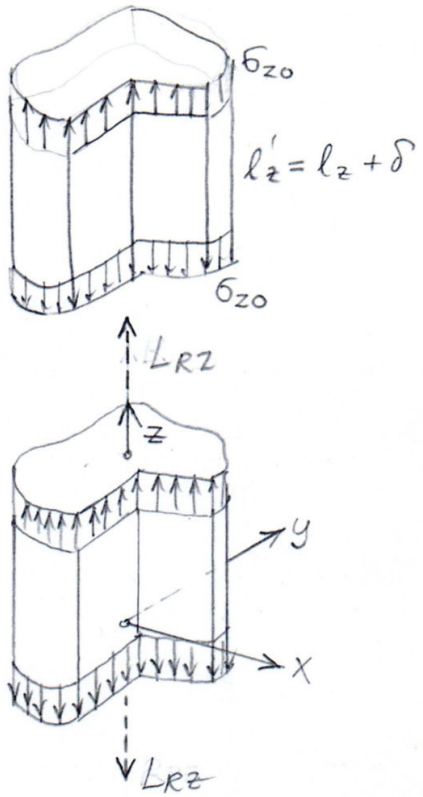
Dobivene su deformacije koje odgovaraju jednoosnom stanju napona.

Teoretski se prikazano polje napona može pojaviti na tijelu proizvoljnog oblika i pri tome će na oplošju djelovati distribuirane plošne sile koje ovise o orjentaciji tangencijalne ravnine.

Za praktična razmatranja je važna pojava jednoosnog stanja na prizmatičnom tijelu. Ovdje će se prizmatičnim nazivati svako tijelo čije se oplošje sastoji iz tri dijela. i to: dva sukladna ravna lika koji se nazivaju baze. Baze su paralelne i odgovarajuće točke leže na okomicama na ravnine baza. Dužina odredjena odgovarajućim točkama baza nazivati će se izvodnica. Treći dio oplošja čini plašt koji nastaje translacijom izvodnice po rubovima baza. U ovako definirana prizmatična tijela spadaju uspravne prizme i uspravni valjci.



HNPK-85-427



Promatra se slučaj kod kojeg je os jednoosnog stanja paralelna s izvodnicama tijela.

Pogodno je postaviti izraz za promjenu razmaka baza pri deformaciji:

$$\delta = \frac{\sigma_{z0}}{E} \cdot l_z$$

Nadalje će se kasnije koristiti i rezultirajuće djelovanje napona koji djeluju na baze. Za odredjivanje komponenti rezultirajućeg djelovanja uvesti će se koordinatni sistem kojemu os z spaja težišta baza, što znači da vrijedi:

$$\int_F x\,dF = 0; \quad \int_F y\,dF = 0$$

Zbog paralelnosti naponskog polja iščezavaju okomite komponente rezultirajuće sile i paralelna komponenta rezultirajućeg momenta:

$$L_{Rx} = 0; \quad L_{Ry} = 0; \quad M_{Rz} = 0$$

Nadalje postoji rezultanta koja zbog konstantnog napona prolazi upravo težištem baze, a veličina je odredjena sa:

$$R = L_{RZ} = \sigma_{z0} \cdot F;$$

F je površina baze.

Veličina napona se može izraziti pomoću rezultirajuće sile:

$$\sigma_{z0} = \frac{L_{RZ}}{F}$$

Uvrštavanjem tog izraza u izraz za promjenu razmaka baza, dobiva se veza promjene razmaka i rezultirajuće sile:

$$\delta = \frac{L_{RZ} l_z}{E \cdot F}$$

Stanje općeg savijanja

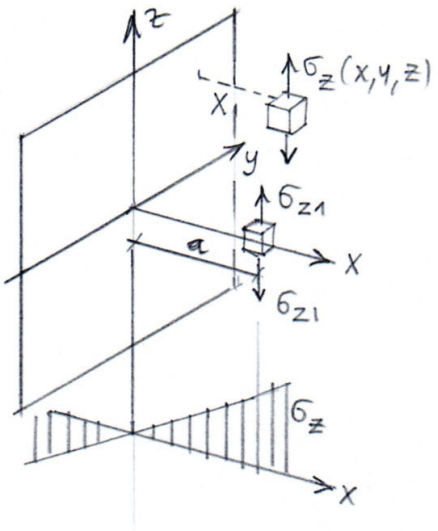
U stanju općeg savijanja je naponsko polje linearno promjenjivo i to na slijedeći način:
Za sve točke koje leže na jednoj ravnini naponi iščezavaju, i ta se ravnina naziva neutralna ravnina. U toj ravnini je definiran pravac, koji se naziva pravac napona. U svim točkama izvan ravnine samo je jedan glavni napon različit od nule; pripadna os je paralelna s pravcem napona, a veličina glavnog napona je proporcionalna s udaljenosti od neutralne ravnine. Neutralna ravnina dijeli prostor na dva dijela: u jednom je glavni napon vlačan, a u drugom je tlačan.

U stanju općeg savijanja se svaki infinitezimalni ravni sloj paralelan s neutralnom ravninom nalazi u jednoosnom homogenom

HWPK-85-428

stanju napona.

Analitički će se naponsko polje pri općem savijanju najlakše prikazati pomoću pravokutnog koordinatnog sistema kojemu dvije osi leže u neutralnoj ravnini, npr y i z, a pravac napona se poklapa s jednom od tih osi, npr. s osi z. Veličina napona će u tom slučaju biti proporcionalna preostaloj koordinati, u ovom slučaju je to x, pa izrazi za naponske komponente glase:



$$\sigma_x = 0 \; ; \quad \sigma_y = 0 \; ; \quad \sigma_z = \frac{\sigma_{z1}}{a} \cdot x$$

$$\tau_{xy} = 0 \; ; \quad \tau_{xz} = 0 \; ; \quad \tau_{xz} = 0$$

Linearna promjena napona σ_z je opisana pomoću vrijednosti σ_{z1} koja se pojavljuje na udaljenosti a od neutralne ravnine.

Uz homogeni i izotropni materijal tom polju napona odgovara polje pomaka:

$$u = \frac{\sigma_{z1}}{a \cdot E}\left(-\nu\frac{x^2}{2} + \nu\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right); \quad v = -\nu\frac{\sigma_{z1}}{aE}xy \; ; \quad w = \frac{\sigma_{z1}}{aE}x \cdot z$$

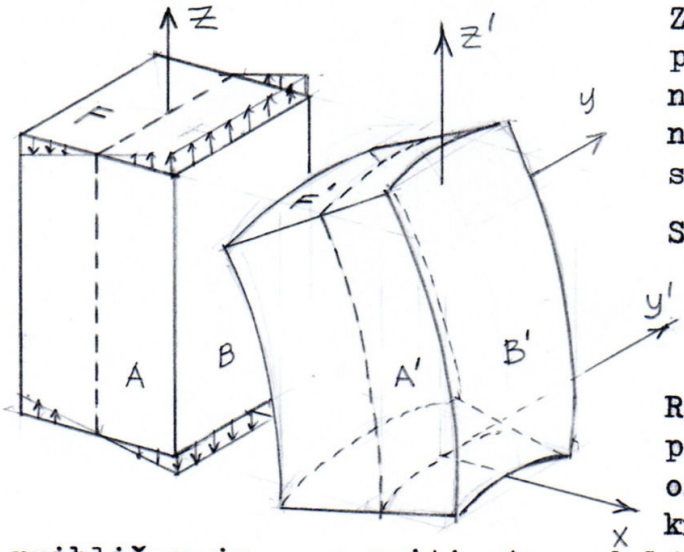
Ispravnost polja pomaka lako se provjerava odredjivanjem deformacija:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu\frac{\sigma_{z1} \cdot x}{aE} \; ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu\frac{\sigma_{z1} x}{aE} \; ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_{z1} \cdot x}{a \cdot E}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \nu\frac{\sigma_{z1}}{aE}y - \nu\frac{\sigma_{z1}}{aE}y = 0$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\sigma_{z1} \cdot z}{aE} + \frac{\sigma_{z1} \cdot z}{aE} = 0 \; ; \quad \varepsilon_{yz} = 0$$

Dobivene su deformacije koje odgovaraju zadanom polju napona.



Za predočavanje polja pomaka pogodan je kvadar kojemu je neutralna ravnina jedna od ravnina simetrije paralelna s vanjskom plohom.

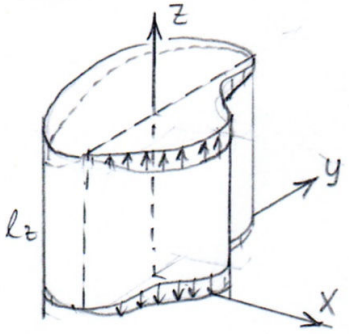
Svi ravni likovi paralelni s neutralnom ravninom prelaze deformacijom u sedlaste plohe (primjer na skici: B u B′).

Ravnine okomite na neutralnu i paralelne s naponskim pravcem (A) ostaju ravnine, ali se tako zaokreću da se u zategntom području približavaju, a u pritisntom udaljavaju. Paralele s bazama ostaju

HWPK-85-429

ravne, ali se zaokreću oko presječnica s neutralnom ravninom (F u F′).

Za praktična razmatranja je važna pojava čistog savijanja na prizmatičnom tijelu; pri tome će neutralna ravnina ležati na spojnici težišta baza.

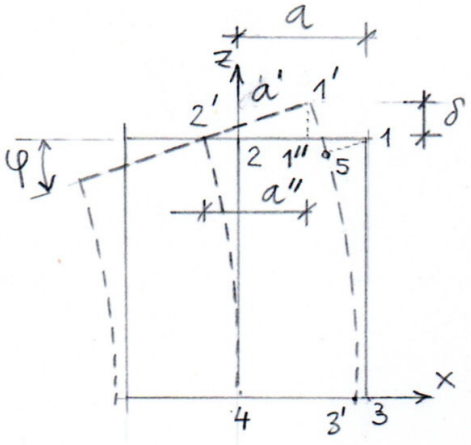


U kasnijim postupcima će se koristiti izrazi za madjusobne odnose baza u deformiranom položaju prizmatičnog tijela. Za prikazivanje tih odnosa prikazan je presjek ravninom xz. Položaj gornje baze ($z = l_z$) prema donjoj odredjen je pomakom težišta koji je označen s η i zaokretom koji je označen s φ.

Iz polja pomaka se direktno dobiva:

$$\eta = -u(0,0,l_z) = \frac{\sigma_{z1} \cdot l_z^2}{2 \cdot a \cdot E}$$

$$\varphi = \frac{\partial w(0,0,l_z)}{\partial x} = \frac{\sigma_{z1} \cdot l_z}{a \cdot E}$$



Korisno je da se izraz za kut izvede i direktno iz promatranja geometrijskih odnosa, koji su prikazani na skici. Točke 1,2,3 na početnom nedeformiranom položaju prelaze nakon deformacije u točke 1′,2′,3′. Za odredjivanje kuta će se iskoristiti pravokutni trokut 1′,2′,1″, pri čemu točka 1″leži na dužini(1,2) i okomici na tu dužinu koja prolazi točkom 1′. Hipotenuza trokuta je a′, a katete su a″ i δ.

Dužina a′je nastala deformacijom iz a, pa vrijedi:

$$a' = a(1 + \varepsilon_a)$$

Veza a″i a′je odredjena s:

$$a'' = a' \cdot \cos\varphi = a(1 + \varepsilon_a) \cdot \cos\varphi$$

Zbog infinitezimalnih pomaka može se ε_a zanemariti prema jedinici, a cosinus kuta φ uzeti kao 1, pa se dobiva:

$$a'' = a$$

Dužina (1,3) prelazi nakon deformacije u luk krivulje (1′,3′) čija je duljina:

$$l_z + l_z \cdot \varepsilon_z(a,0,0)$$

Ako se od točke 3′na luk krivulje nanese početna duljina, dobiva se točka 5, a duljina luka (1′,5) je promjena duljine odredjena sa:

$$l_z \cdot \varepsilon_z(a,0,0) = l_z \cdot \frac{\sigma_{z1}}{aE} \cdot a = \frac{\sigma_{z1} \cdot l_z}{E}$$

Može se pokazati da je razlika izmedju te duljine i katete δ

HWPK-85-430

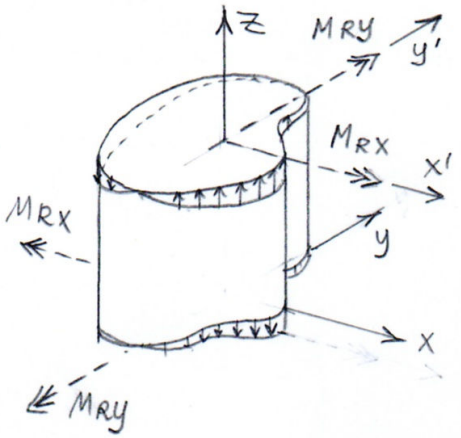
mala veličina višeg reda, pa se može uzeti:

$$\delta = \frac{\sigma_{z1} \cdot l_z}{E}$$

Zbog infinitezimalnih pomaka će kut biti jednak tangensu:

$$\varphi = \frac{\delta}{a''} = \frac{\sigma_{z1} \cdot l_z}{a \cdot E}$$

Za daljnje primjene je potrebno i rezultirajuće djelovanje napona koji djeluje na bazu prizmatičnog tijela.



Odrediti će se rezultirajuće djelovanje za napone na gornjoj bazi. Zbog paralelnosti napona iščezavaju tri komponente rezultirajućeg djelovanja:

$$L_{RX} = 0; \quad L_{RY} = 0; \quad M_{RZ} = 0$$

Veličina komponente L_{rz} je odredjena sa:

$$L_{RZ} = \int_F \sigma_z(x, y, l_z)\, dF = \frac{\sigma_{z1}}{a} \int_F x\, dF = \emptyset$$

Ta komponenta iščezava jer se neutralna ravnina nalazi na spojnici težišta baza.

Slijedi da će se djelovanje svesti na momente, pa je zbog toga i promatrano stanje nazvano stanje čistog savijanja.

Moment će se prikazati s dvije komponente na paralelama s osima x i y:

$$M_{RX} = \int_F y\, dP = \int_F y\, \sigma_z(x, y, l_z)\, dF = \frac{\sigma_{z1}}{a} \int_F xy\, dF = \frac{\sigma_{z1}}{a} I_{xy}$$

Moment okomit na neutralnu ravninu je proporcionalan s centrifugalnim momentom tromosti. Za svaki presjek se mogu odrediti glavne osi za koje centrifugalni moment iščezava. Ako su xiy glavne osi onda je $M_{RX} = 0$.

$$M_{RY} = -\int_F x\, dF = \int x \cdot \sigma_z(x, y, l_z)\, dF = -\frac{\sigma_{z1}}{a} \int x^2\, dF = -\frac{\sigma_{z1}}{a} I_{yy}$$

Moment paralelan s neutralnom osi t.j. presječnicom baze i nautralne ravnine je proporcionalan osnom momentu tromosti.

Koeficijent u izrazu za napon σ_z može se izraziti pomoću rezultirajućeg momenta:

$$\frac{\sigma_{z1}}{a} = -\frac{M_{RY}}{I_{yy}}$$

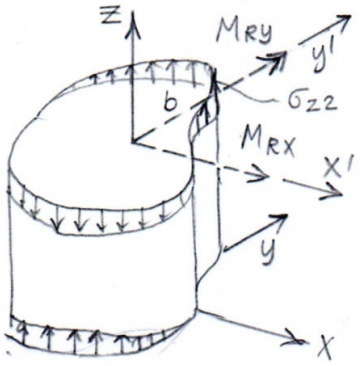
Uvrštavanjem tog izraza u izraz za relativni zaokret baza, dobiva se:

$$\varphi = -\frac{M_{RY} \cdot l_z}{E\, I_{yy}}$$

Izraz za kut sadrži negativni predznak jer je moment prikazan smjerom, suprotnim od stvarnog vektora koji pripada pozitivnom σ_{z1}.

HWPK-85-431

U općem slučaju se koordinantni sistem ne veže za karektristike naponskog polja nego za tijelo koje se promatra; ovdje će se osi x i y odabrati tako da budu glavne osi. Radi opisivanja općeg slučaja treba opisati i naponsko stanje kod kojeg je nutralna odredjena osima x i z. Nastaje analogna situacija:



$$\sigma_z(x,y,z) = \frac{\sigma_{z2}}{b}\, y$$

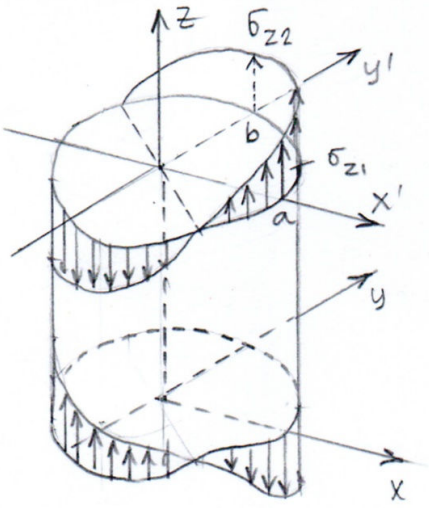
$$M_{RX} = \frac{\sigma_{z2}}{b} I_{xx}\,; \qquad I_{xx} = \int_F y^2 dF$$

$$M_{RY} = -\frac{\sigma_{z2}}{b} I_{xy}$$

$$\varphi_x = \frac{M_{RX} \cdot l_z}{E \cdot I_{xx}}$$

Koso savijanje

je slučaj u kojemu neutralna ravnina prolazi spojnicom težišta baza ali ne i glavnim osima. Može se rastaviti dva parcijalna polja kojima neutralne ravnine prolaze jednom od glavnih osi.



Normalni napon će biti odredjen izrazom:

$$\sigma_z(x,y,z) = \frac{\sigma_{z1}}{a} x + \frac{\sigma_{z2}}{b} y$$

Položaj neutralne ravnine je odredjen uvjetom iščezavanna napona:

$$0 = \frac{\sigma_{z1}}{a} \cdot x + \frac{\sigma_{z2}}{b} y$$

$$y = -\frac{\sigma_{z1} \cdot b}{a\, \sigma_{z2}} \cdot x$$

Ako su x i y glavne osi tomosti baze prizmatičnog tijela, može se napon jednostavno izraziti pomoću veličina odgovarajućih komponenti rezultirajućeg momenta.

$$\sigma_z(x,y,z) = \frac{M_{RX}}{I_{xx}} y - \frac{M_{RY}}{I_{yy}} \cdot x$$

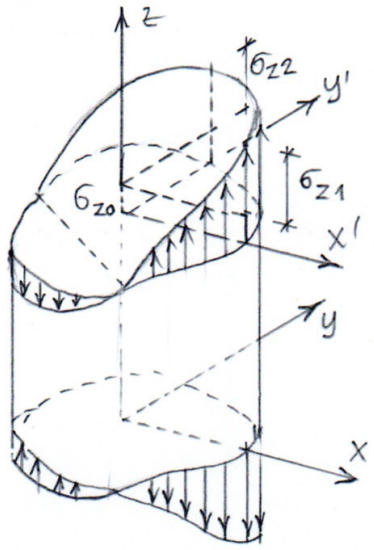
Jednadžba neutralne ravnine izražena pomoću komponenti rezultirajućeg momenta glasi:

$$y = \frac{M_{RY} \cdot I_{xx}}{I_{yy}\, M_{RX}} x$$

U tom slučaju rezultirajući moment nije paralelan s neutralnom linijom.

HWPK-85-432

Opći slučaj savijanja u kojemu neutralna ravnina ima proizvoljni položaj u odnosu na težište i glavne osi, ali je još uvijek paralelna sa spojnicom težišta baza, može se rastaviti na tri parcijalna slučaja: stanje homogenog napona i dva slučaja čistog savijanja oko glavnih osi.



Normalni napon će biti odredjen izrazom:

$$\sigma_z(x,y,z) = \sigma_{z0} + \frac{\sigma_{z1}}{a}x + \frac{\sigma_{z2}}{b}\cdot y$$

Položaj neutralne ravnine će biti odredjen uvjetom iščezavanja napona:

$$0 = \sigma_{z0} + \frac{\sigma_{z1}}{a}x + \frac{\sigma_{z2}}{b}\cdot y$$

$$y = -\frac{\sigma_{z1}\cdot b}{a\cdot\sigma_{z2}}x - \frac{\sigma_{z0}\cdot b}{\sigma_{z2}}$$

HKPK-85-433

Ako su osi x i y glavne osi tromosti baza prizmatičnog tijela može se napon jednostavno izraziti pomoću komponenti rezultirajućeg djelovanja:

$$\sigma_z(x,y,z) = \frac{L_{Rz}}{F} + \frac{M_{Rx}}{I_{xx}}y - \frac{M_{Ry}}{I_{yy}}\cdot x$$

Jednadžba neutralne ravnine izražena pomoću komponenti rezultirajućeg djelovanja glasi:

$$y = \frac{M_{Ry}\cdot I_{xx}}{I_{yy}\cdot M_{Rx}}x - \frac{L_{Rz}\cdot I_{xx}}{F\cdot M_{Rx}}$$

Ako rezultirajuća sila L_{RZ} ne iščezava, mogu se rezultirajući momenti izraziti pomoću veličine sile i koordinata pravca rezultante, koje se u ovom slučaju nazivaju i ekscentriciteti:

$$M_{Rx} = L_{Rz}\cdot e_y; \qquad M_{Ry} = -L_{Rz}\cdot e_x$$

Uvesti će se nova karakteristika ravnog lika: radijus tromosti i označiti s i_{xx} odnosno i_{yy}

$$i_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{F}}; \qquad i_{yy} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{F}}$$

Momenti tromosti se mogu izraziti pomoću površine i kvadrata radijusa tromosti:

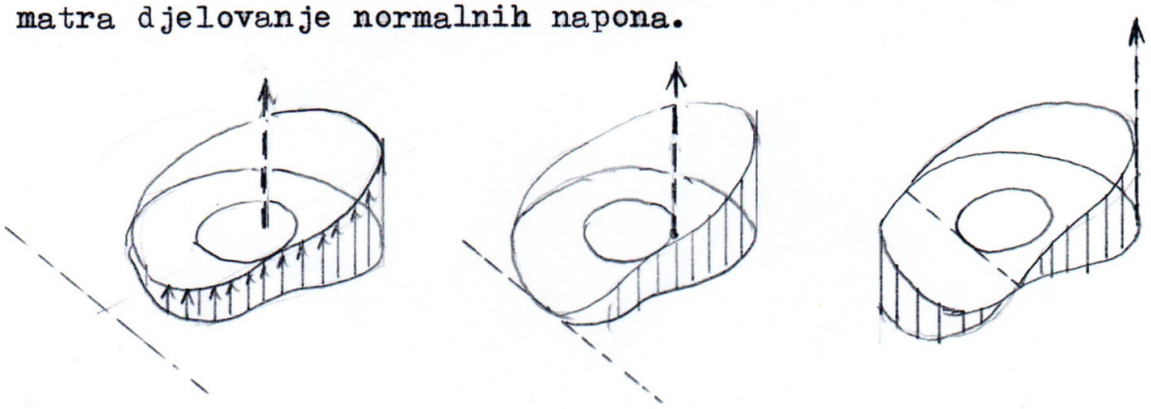
$$I_{xx} = i_{xx}^2\cdot F; \qquad I_{yy} = i_{yy}^2\cdot F$$

Izrazi za rezultirajuće momente i izrazi za momente tromosti uvrstiti će se u izraz za normalni napon:

$$\sigma_z(x,y,z) = \frac{L_{RZ}}{F}\left(1 + \frac{e_y \cdot y}{i^2_{xx}} + \frac{e_x \cdot x}{i^2_{yy}}\right)$$

Jednadžba neutralne ravnine odredjena je uvjetom iščezavanja izraza u zagradi.

U primjenama se pojavljuje pojam jezgre presjeka. Jezgra je lik pridružem zadanom liku na koji djeluju linearno promjenjivi okomiti naponi tako da je napon istog predznaka dok pravac rezultante siječe lik unutar jezgre. Ako pravac rezultante siječe rub jezgre, neutralna os tangira rub lika na kojem se promatra djelovanje normalnih napona.

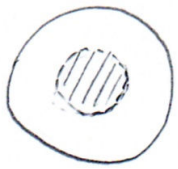


Koordinate rezultante i točka s neutralne osi se na isti način pojavljuju u izrazu za napon, pa vrijedi i obrat: ako pravac rezultante prolazi rubom presjeka, neutralna os će tangirati jezgru. Na gornjim skicama su prikazna tri tipična slučaja: rezltanta je unutar jezgre, rezultanta prolazi rubom jezgre i rezultanta prolazi rubom presjeka.

Svakom položaju pravca rezultante t.j. paru e_x, e_y pridružena je neutralna os; neka točka na osi ima koordinate x i y.

Zbog ravnopravnosti uloge ekscentriciteta i koordinata vrijedi i obrat; ako se fiksira točka x,y i zahtijeva da u njoj normalni napon iščezne mora se sila nalaziti na pravcu odredjenom točkama čije su koordinate e_x i e_y.

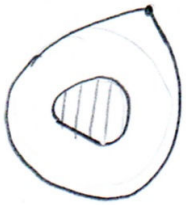
Na osnovi te recipročnosti mogu se izvesti kvalitativni zaključci o vezi ruba lika i ruba jezgre.



Ako je rub lika konveksan i gladak biti će takova i jezgra.

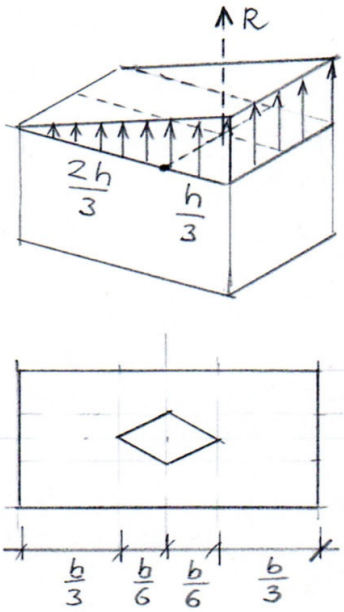


Ako je dio ruba dužina, toj dužini odgovara lom na rubu jezgre.



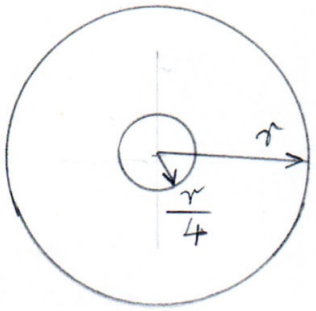
Ako rub lika sadrži lom, toj točki će odgovarati dužina koju sadrži rub jezgre.

HWPK-85-434



Kod pravokutne baze na koju djeluje linearno promjenjivi normalni napon može se jezgra odrediti direktno. Ako je napon na stranici peavokutnika jednak nuli nalazi se rezultanta na simetrali udaljena dvije trećine visine pravokutnika od neutralne osi, jer je tijelo napona trostrana prizma.

Svakoj stranici odgovara po jedna točka jezgre odredjena na navedeni način. Te su točke spojene dužinama koje odgovaraju lomovima t.j. uglovima pravokutnika.



Odrediti će se radijus jezgre za kružnu bazu. Moment tromosti iznosi:

$$I_{xx} = \frac{r^4 \pi}{4}$$

Kvadrat radijusa tromosti iznosi:

$$i_{xx}^2 = \frac{I_{xx}}{F} = \frac{r^2}{4}$$

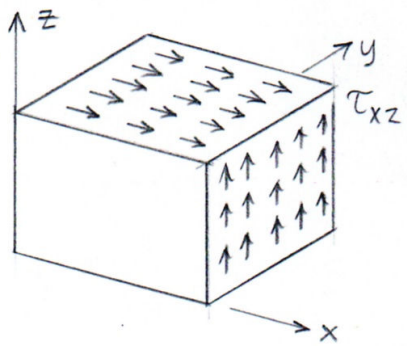
Radijus jezgre:

$$r_j = \frac{i_{xx}^2}{y_k} = \frac{r^2}{4 \cdot r} = \frac{r}{4}$$

HWPK-85-435

Stanje čistog posmika

Stanje čistog posmika je korišteno za postavljanje veze izmedju napona i deformacija, pa ona svakako mora pretstavljati točno rješenje teorije leastičnosti. Radi cjelovitosti prikazati će se i primjer polja pomaka koje odgovara stanju čistog posmika



Stanje čistog posmika karakteriziraju okomite ravnine na kojima se pojavljuje konstantni posmik okomit na presječnice tih ravnina. Najjednostavnije se prikazuje u pravokutnom koordinatnom sistemu kojemu je jedna os paralelna s presječnicom karakterističnih ravnina, a jedna daljnja os je paralelna s jednom od tih ravnina.

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz0}; \quad \tau_{yz} = 0$$

Za homogeni i izotropni materijal će tom naponskom polju odgovarati polje pomaka: $u = \frac{\tau_{xz0}}{G} z$; $v = 0$; $w = 0$.

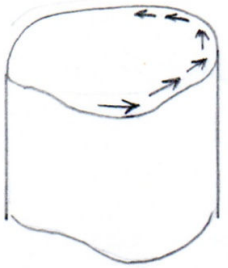
Zadanom naponskom polju se može pridružiti i slijedeće polje pomaka:

$$u = 0; \quad v = 0; \quad w = \frac{\tau_{xz0}}{G} \cdot x$$

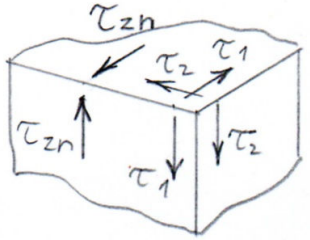
Osnovna rješenja za djelovanja posmičnih napona na baze prizmatičnog tijela

Općenito

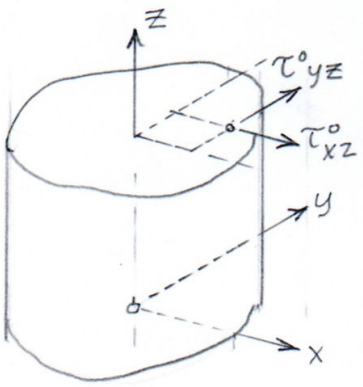
U praktičnim zadacima se ne pojavljuju stanja koja bi se mogla aproksimirati stanjem čistog posmika, pa se traže točna rješenja za djelovanje posmičnih napona samo na baze prizmatičnog tijela. Iz zahtjeva da plašt prizmatičnog tijela bude neopterećen proizlazi, da će smjer ukupnog posmika na rubu baze odgovarati smjeru tangente na rub baze. To se lako uvidja: ukupni posmični napon će se prikazati pomoću dvije okomite komponete, tangencijalne i normalne. Uz normalnu komponentu τ_{zn} morala bi se pojaviti i odgovarajuća komponenta posmičnog napona na oplošju, a to je u suprotnosti s pretpostavkom rješenja.



Na slici je djelovanje posmika okomito na rub označeno s τ_{zn}.



Iz zahtjeva da plašt tijela bude neopterećen proizlazi i zaključak da će ukupni posmični napon iščezavati u točkama konveksnog loma ruba baze. U točki loma se mogu postaviti dvije normale: svaka odgovara jednoj od dijelova ruba koji se u lomu sastaju. Kad ukupni napon ne bi iščezavao, mogao bi se rastaviti na dvije komponente koje leže na tim normalama (naskici τ_1 i τ_2). Uz te komponente morale bi se pojaviti odgovarajuće komponente na oplošju, a to je u suprotnosti s pretpostavkom rješenja.



Zbog tih uvjeta posmični napon ne može biti linearna funkcija pravokutnih koordinata baza, pa djelovanje posmičnih napona treba opisati općenito: s dvije funkcije položaja:

$$\tau^{\circ}_{xz}(x,y); \quad \tau^{\circ}_{yz}(x,y)$$

Pokazuje se da postoje točna rješenja kod kojih su posmični naponi jednaki za sve presjeke paralelne s bazama; znači da će i na drugoj bazi djelovati ista raspodjela posmičnih napona kao i na prvoj. Kao osnovna će se ovdje smatrati ona rješenja kod kojih osim toga identično iščezavaju svi naponi paralelni s bazama. Normalni napon paralelan s izvodnicama će se za svaki primjer posebno odrediti.

Ako se prizmatičnom tijelu pridruži koordinatni sustav xyz imati će polje napona opći oblik:

$$\sigma_x(x,y,z) \equiv 0; \quad \sigma_y(x,y,z) \equiv 0; \quad \sigma_z(x,y,z)$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) \equiv 0; \quad \tau_{xz}(x,y,z) = \tau^{\circ}_{xz}(x,y); \quad \tau_{yz}(x,y,z) = \tau^{\circ}_{yz}(x,y)$$

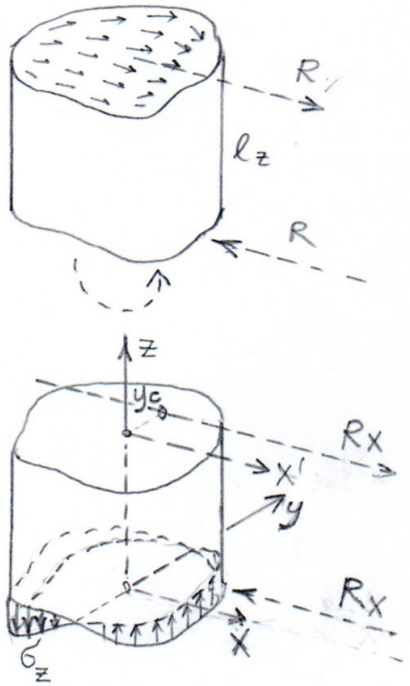
HWPK-85-436

Pokazati će se da funkcije τ°_{xz} i τ°_{yz} ovise o obliku baze.

Rješenja ovog tipa su bitno složenija od prikazanih rješenja za djelovanje linearno promjenjivih normalnih napona na baze prizmatičnog tijela, ali treba uočiti, da su i bitno jednostavnija od rješenja za proizvoljna djelovanja kod kojih bi trebalo odrediti šest funkcija od tri varijable umjesto dvije funkcije od dvije varijable.

Savijanje s poprečnom silom

Savijanje s poprečnom silom je primjer osnovnog rješenja za djelovanje posmičnih napona na baze prizmatičnog tijela kod kojeg su naponi ekvivalentni jednoj koncentriranoj sili; t.j. postoji rezultanta. Rezultante na bazama čine spreg, pa je potrebno još neko daljnje vanjsko djelovanje ekvivalentno suprotnom momentu.



Rješenje će biti moguće ako se uvedu normalni naponi na jednoj od baza. Raspodjela tih napona odgovarati će raspodjeli čistog savijanja. Zbog uvjeta ravnoteže ta naponska komponenta ne može biti konstantna za sve presjeka paralelne s bazama, nego će linerano opadati i iščeznuti na drugoj bazi.

Pogodno je, da se neutralna os normalnih napona poklapa s glavnom osi tromosti baze. U tom slučaju će ravnina momenta kojoj su normalni naponi na bazu ekvivalentni biti okomita na tu os. Zbog toga će i rezultante posmičnih napona baza biti paralelne s drugom glavnom osi.

Ako se os y poklapa s neutralnom osi, a os x s drugom glavnom osi baze na koju djeluju normalni naponi, te ako je položaj druge baze odredjen s $z = \ell_z$ glasiti će izraz za normalna napone paralelne s izvodnicama:

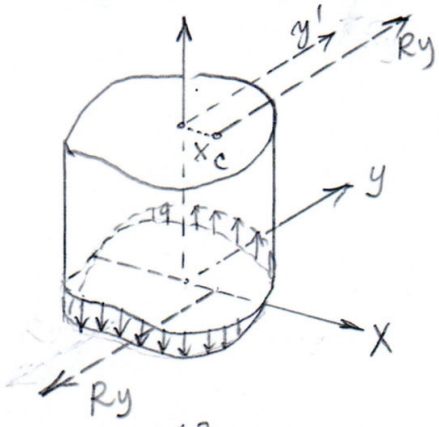
$$\sigma_z(x,y,z) = -\frac{R_x \cdot \ell_z}{I_{yy}} \cdot x \cdot (\ell_z - z)$$

Integralnim uvjetom ravnoteže tijela nije odredjen položaj rezultante posmičnih djelovanja, t.j. njena udaljenosti od neutralne osi s kojom je paralelna i ta udaljenost je parametar rješenja (y_c).

U promatranom slučaju se udaljenost rezultante od glavne osi odabire tako da prosječno relativno zaokretanje baza oko osi z, iščezne. Rezultat traženog rješenja će biti dvije funkcije koje odredjuju posmične napone i koje će se označiti sa τ^{x}_{xz} i τ^{x}_{yz} pri čemu superskript "x" označava da pripadaju rezultanti paralelnoj s osi x.

HWPK-85-437

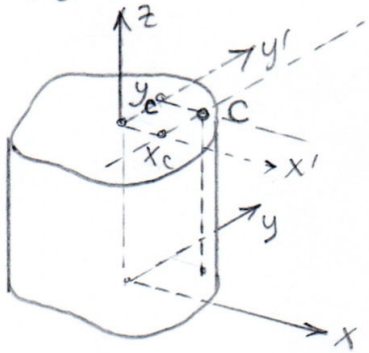
Analogno rješenje se može postaviti za djelovanje posmičnih napona kojima je razultanta paralelna s drugom glavnom osi baze; u ovom slučaju s osi y. Uz uvedeni koordinatni sustav biti će



za to rješenje, djelovanje normalnih napona na donju bazu ekvivalentno koncentriranom momentu čiji je vektor paralelan s osi x, a izraz za pripadne normalne napone će glasiti:

$$\sigma_z(x,y,z) = -\frac{R_y \cdot l_z}{I_{xx}} \cdot y \cdot (l_z - z)$$

Udaljenost rezultante od osi y će se i u ovom slučaju odabrati tako da iščezava relativno zaokretanje baza oko osi z. Na skici je ta udaljenost označena s x_c.



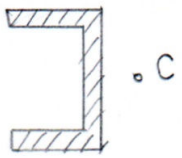
Rezultat tog rješenja biti će dvije funkcije koje odredjuju posmične napone i koje će se označiti sa τ^y_{xz} i τ^y_{yz}, pri čemu superskript "y" označava da je pripadna rezultanta paralelna s osi y.

Linearnom kombinacijom opisanih rješenja dobiva se opći slučaj, kod kojeg rezultanta može biti proizvoljno usmjerena, ali će prolaziti sjecištem pravaca rezultanti koje su paralelne s glavnim osima. To sjecište će se nazivati centar posmika.

CEntar posmika je točka na bazi prizmatičnog tijela kroz koji prolazi rezultanta posmičnih napona pri savijanju s poprečnom silom, uz raspored posmičnih napona odabran tako da se pri deformaciji ne pojavljuje prosječni relativni zaokret baza oko osi okomite na baze.

Savijanje s poprečnom silom je točno rješenje linearne teorije elastičnosti kod kojeg na obje baze i u svim presjecima paralelnim s bazama djeluju jednako rasporedjeni posmični naponi. Normalni napon okomit na baze se mijenja linearano u pravokutnim koordinatama baze i mijenja se linearno po visini. Naponi paralelni s bazama identično iščezavaju u cijelom tijelu.

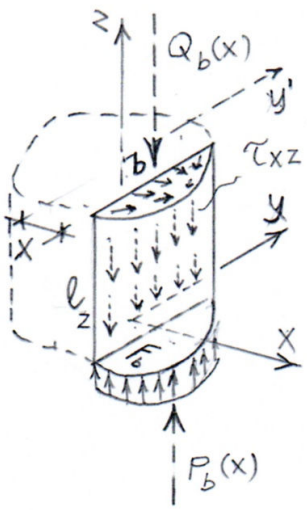
U općem slučaju se centar posmika ne poklapa s težištem baze prizmatičnog tijela. Postoje čak primjeri kod kojih se centar posmika nalazi izvan konveksnog lika koji obuhvaća bazu.



Primjer koji se češće susreće u praksi je prikazan na skici.

HWPK-85-438

Za približno odredjivanje posmičnih napona postoji jednostavan postupak. Promatra se presjek tijela ravninom koja je paralelna s neutralnom ravninom normalnih napona.



Na skici je prikazan slučaj kod kojeg je rezultanta posmika na bazama paralelna s osi x. Promatrani presjek će biti paralelan s ravninom yz. Promatrati će se ravnoteža dijela tijela koji ne sadrži neutralnu ravninu. Na presjek djeluju samo posmični naponi τ_{xz}. Na pripadni dio donje baze djeluje normalni napon σ_z. Samo ta dva djelovanja doprinose sumi projekcija sila na os "z". Za normalne napone koji djeluju na donju bazu može se odrediti rezultanta:

$$P_b(x) = \int_{F_b} \sigma_z \, dF = \frac{R_x \cdot \ell_z}{I_y} \int_{F_b} x \, dF = \frac{R_x \ell_z}{I_y} \cdot S_y(x)$$

Područje plošnog integrala je pripadni dio baze označen s F_b. U izrazu se pojavljuje statički moment dijela baze na os y koji je označen s $S_y(x)$.

Iz uvjeta iščezavanja projekcija svih sila na os z slijedi da posmični naponi koji djeluju na presjek $b\ell_z$ moraju imati rezultantu koja je paralelna s $P_b(x)$, suprotno usmjerena i koja ima jednaku veličinu. Veličina rezultante posmičnih napona označena je s $Q_b(x)$. Zbog jednakosti veličina vrijedi:

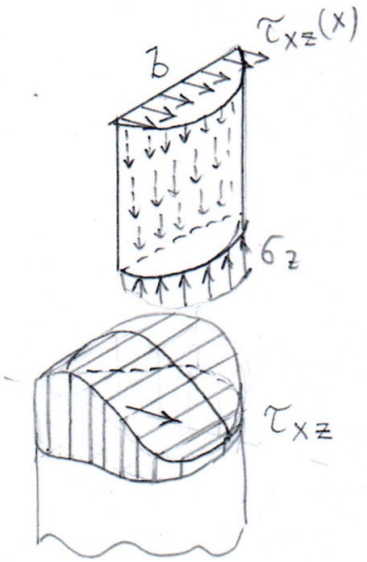
$$Q_b(x) = \frac{R_x \cdot \ell_z}{I_y} \cdot S_y(x)$$

Izraz za ovu silu je točan, pa se može točno odrediti i prosječni posmični napon; dijelenjem sile s površinom presjeka:

$$\tau^s_{xz} = \frac{R_x \cdot \ell_z}{I_y \cdot b \cdot \ell_z} \cdot S_y(x) = \frac{R_x S_y(x)}{b \cdot I_y}$$

Kada bi raspodjela posmičnih napona bila konstantna, onda bi to bila točna vrijednost.

U mnogim praktičnim proračunima se ova prosječna vrijednost koristi umjesto odgovarajućeg ekstrema.

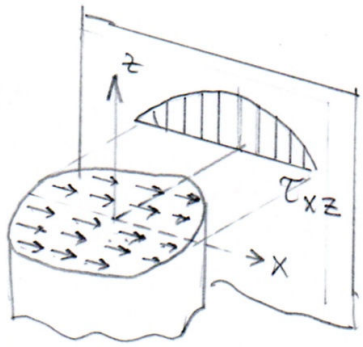


Dobiveni prosječni napon je funkcija položaja presjeka prema neutralnoj ravnini. Prosječni napon je maksimalan ako se presjek poklapa s neutralnom ravninom, a iščezava za točku koja je najudaljenija od neutralne ravnine.

Ako se kao približmo rješenje usvoji konstantna raspodjela po presjeku, odredjeno je time i djelovanje komponente τ_{xz} na bazu uz sam presjek dužine b.

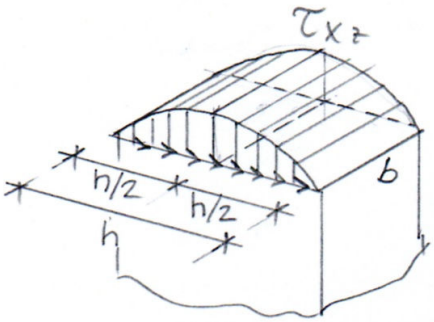
Ako se dobiveni posmični naponi nanose se na bazu dobiva se dijagram posmične komponente paralelne sa rezultantom.

HWPK-85-439



Prikazano približno rješenje daje konstantan napon duž paralela s neutralnom ravninom normalnih napona, pa je dovoljno prikazati projekciju na ravninu savijanja.

Odrediti će se raspodjela posmičnog napona τ_{xz} na prikazani približni način za pravokutni presjek. Treba odrediti opći izraz za statički moment dijela baze dobivenog presjekom paralelnim s neutralnom osi.



$$S_y(x) = \int_x^{\frac{h}{2}} \xi \, dF = \int_x^{\frac{h}{2}} \xi \cdot b \cdot d\xi = \frac{b(h^2 - 4x^2)}{8}$$

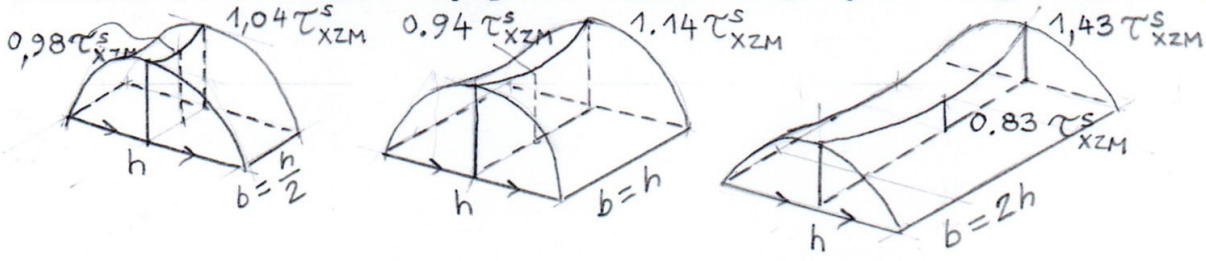
Uz poznati izraz za moment tromosti $I_y = \frac{bh^3}{12}$ dobiva se:

$$\tau^s_{xz}(x) = \frac{R_x \cdot b(h^2 - 4x^2) \cdot 12}{b \cdot 8 \cdot b \cdot h^3} = \frac{3T}{2 \cdot b \cdot h}\left(1 - \frac{4x^2}{h^2}\right).$$

Komponenta posmičnog napona τ^s_{xz} je kvadratna funkcija udaljenosti točke od neutralne osi. Često se koristi opis dijagrama napona, pa se kaže:"raspodjela posmičnog napona je parabolična". Direktno se dobiva maksimalna apsolutna veličina posmičnog napona za pravokutni presjek:

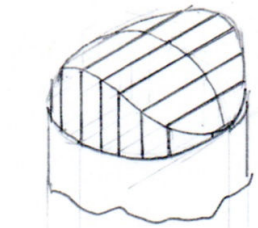
$$\tau^s_{xzM} = 1{,}5 \frac{R_x}{F}$$

Kod pravokutnog presjeka je prikazana raspodjela posmičnih napona točna za granični slučaj kada b teži nuli. Na slijedećim skicama su skcirani dijagrami točne raspodjele komponente τ_{xz}:

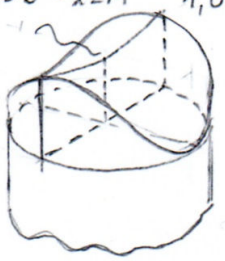


Za pravokutne presjeke kojima je stranica paralelna s rezultantom barem dva puta veća od okomite stranice može se smatrati da je maksimalni posmični napon jednak maksimimumu približno odredjenog napona. Za manje omjere postaje odstupanje približne vrijednosti osjetnije. Često se ostali uvjeti proračuna tako odabiru da se i za te slučajeve dopušta primjena približnog izraza.

HWPK-85-440



$0{,}93\tau^{s}_{xzM}$ $1{,}04\tau^{s}_{xzM}$



Za kružni oblik baze je izvod za približnu raspodjelu nešto složeniji. Ovdje će se navesti samo podatak da je i ovdje kvadratna funkcija udaljenosti od neutralne osi.
Maksimalna veličina posmičnog napona prema približnoj raspodjeli iznosi:

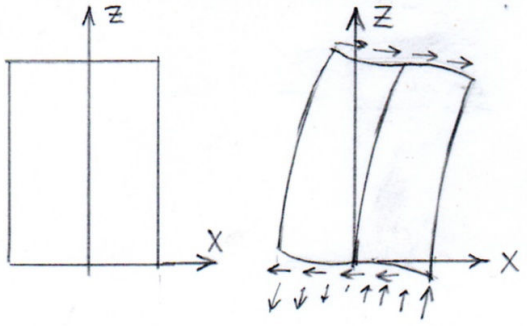
$$\tau^{s}_{zxM} = \frac{4}{3}\cdot\frac{R_x}{F} = \frac{4\cdot R_x}{3r^2\pi}$$

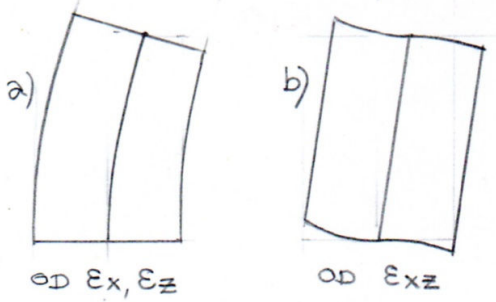
I ovdje dakako vrijedi da je to točna vrijednost prosječnog napona za točke koje leže na neutralnoj osi.

Na drugoj skici je prikazana točna raspodjela i ekstremi napona za točke koje leže na neutralnoj osi. Odstupanje od 4% prema približnoj vrijednosti se u većini praktičnih proračuna zanemaruje.

Pri savijanju s poprečnom silom će se baze vitoperiti, a izvodnice savijati. Za primjenu ovog rješenja u približnim postupcima biti će pogodno da se uvede pojednostavnjeni opis tog polja deformacija.

Promatrati će se samo pomaci točaka koje se nalaze na presjeku s ravninom paralelnom s rezultantom posmičnih napona, koja prolazi težištima baza. Ako se promatra slučaj kod kojeg je rezultanta posmičnih napona na bazi paralelna s osi x, onda će se promatrati deformacije presjeka prizmatičnog tijela s ravninom xz.



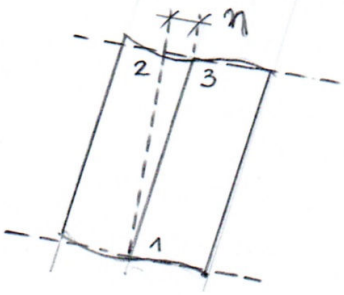


Stanje deformacija tog presjeka može se rastaviti na dva dijela:

a) deformacije od savijanja. To parcijalno stanje sadrži samo uzdužne deformacije ε_x i ε_z dok posmične iščezavaju.

b) deformacije od posmika. To parcijalno stanje sadrži samo posmične deformacije ε_{xz}, dok uzdužne ε_x i ε_z iščezavaju.

Osnovni podaci o stanju a) mogu se odrediti postupkom prikazanim u štapnoj statici.



Radi što jednostavnijeg opisivanja stanja b) uvode se zamišljene ravnine koje se što bolje približavaju izvitoperenom obliku baza. Kao način pridruživanja ravnine može se zamisliti minimizaciju integrala kvadrata odstupanja,

HWPK-85-441

ali se mogućnost postavljanja takove ravnine može prihvatiti i intuitivno. Pomoću te ravnine će se opisati otklon izvodnica uslijed djelovanja posmika. Kao prosječni kut posmika definira se kut izmedju pomaknute izvodnice i normale na prosječne ravnine. Često se kao mjera otklona koristi i duljina η ,prikazana na skici, a odredjuje se na slijedeći način:

Odredjuje se probodište jedne izvodnice s prosječnom ravninom (na skici točka 1). Kroz tu točku se polaže okomica na prosječne ravnine i odredjuje probodište s drugom ravninom (na skici točka 2). Odredjuje se i probodište odabrane izvodnice s drugom prosječnom ravninom (na skici točka 3). Udaljenost probodišta s drugom ravninom je tražena veličina. Može se pokazati da postoji jednostavan izraz za tu veličinu koja se može shvatiti kao prosječna translacija baza uslijed djelovanja posmika.

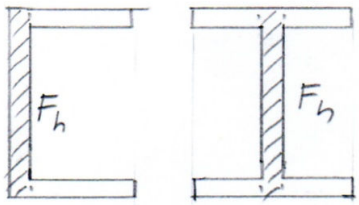
$$\eta = \frac{\alpha R_x l_z}{G F}$$

U izrazu se pojavljuje koeficijent oblika baze označen s α.

Za pravokutni presjek vrijedi: $\alpha = 1.2$

Za kružni presjek vrijedi: $\alpha = 1.1$

HWPK-85-442



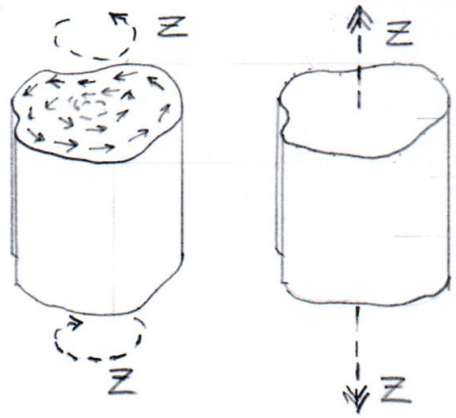
Za tankostijena tijela se umjesto površine cijelog presjeka uvodi površina elementa paralelnog sa silom.

$$\eta = \frac{R_x l_z}{G \cdot F_h}$$

Za prikazane oblike baze se dio presjeka koji je paralelan sa silom često naziva "hrbat".

Čista torzija

Čista torzija je primjer osnovnog rješenja za djelovanje posmičnih napona na baze prizmatičnog tijela; ukupno djelovanje napona na bazu je ekvivalentno koncentriranom momentu u ravnini baze, t.j. momentu čiji je vektor okomit na baze.



Može se pokazati,da se može postaviti točno rješenje kod kojeg iščezavaju normalni naponi paralelni s izvodnicama:

$$\sigma_z(x,y,z) \equiv 0.$$

Prema tome treba samo odrediti funkcije $\tau^{\circ}_{xz}(x,y)$ i $\tau^{\circ}_{yz}(x,y)$.

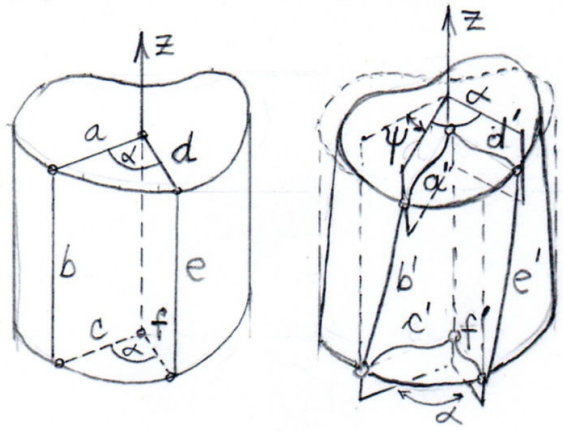
Kako su već uvedene funkcije tog tipa za savijanje s poprečnom silom, uvesti će se za čistu torziju oznake: $\tau^{z}_{xz}(x,y)$ $\tau_{yz}(x,y)$.

Traži se ekvivalencija s koncentriranim momentom, pa mora vrijediti:

$$\int_F \tau^z_{xz}\,dF=0; \qquad \int_F \tau^z_{yz}\,dF=0; \qquad \int_F (x\cdot\tau^z_{yz}-y\cdot\tau^z_{xz})\,dF=Z$$

Opći postupak odredjivanja funkcija τ^z_{xz} i τ^z_{yz} se owdje ne će prikazivati; samo će se opisati polje pomaka.

Polje pomaka kod čiste torzije sadrži os rotacije t.j. izvodnicu koja se pri torziji ne deformira. Kod dvoosno simteričnih baza spaja os rotacije težišta baza. Na skici je os rotacije označena sa "z".



Na lijevoj skici je prikazano tijelo u početnom, nedeformiranom položaju, a na drugoj skici u deformiranom položaju.

Pri torziji se baza relativno zaokreću oko osi rotacije i vitopere se. Pri tome komponenta pomaka u ravnini baze odgovara pomaku koji bi nastao pri rotaciji krutog tijela oko osi, pa se kaže da se baze u svojoj ravnini ne deformiraju. Karakteristika deformacionog polja će se opisati promatranjem dvaju presjeka kroz tijelo i to s ravninama koje prolaze kroz os. Radi preglednosti će se promatrati samo dio presjeka: od plašta do osi.

Presjek s prvom ravninom je odredjen radijalnom dužinom a, izvodnicom b te radijalnom dužinom c.

Presjek s drugom ravninom je odredjen radijalnom dužinom d, izvodnicom e, te radijalnom dužinom f.

Ravnine zatvaraju kut α koji se pojavljuje izmedju dužina a i d, te izmedju dužina c i f.

Pri deformaciji prelaze te dužine u lukove krivulja a', b', c', d', e', f' koji su prikazani na desnoj skici.

Svaki luk krivulje koji je nastao od radijalne dužine leži u svojoj ravnini koja prolazi kroz os rotacije. Medjusobni odnosi tih ravnina se pri deformaciji ne mijenjaju; npr. ravnina u kojoj leži a' zatvara kut α s ravninom u kojoj leži d'.

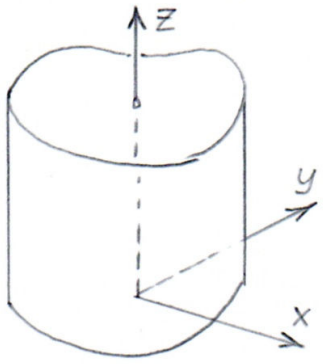
Promatrati će se bilo koji par radijalnih dužina koje u nedeformiranom stanju leže na istom presjeku kroz baze, npr a i c. Nakon deformacije će svaka ležati u svojoj ravnini koja prolazi kroz os i te će ravnine zatvarati kut relativnog zaokretanja baza, koji je karakterističan za torziju. Na skici je taj kut označen s ψ.

Svi presjeci paralelni s bazama se zaokreću na isti način kao baze: kut zaokreta u odnosu na jednu odabranu bazu je proporcionalan s udaljenosti od baze. Vitoprenje je jednako za sve presje-

HWPK-85-443

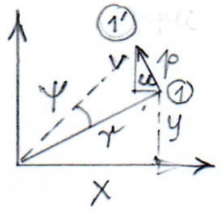
ka paralelne s bazama.

Izrazi za komponente vektora pomaka opisanog polja deformacija su relativno jednostavni. Odabran je pravokutni koordinatni sustav kojem se os "z" poklapa s osi rotacije, a osi x i y leže u donjoj bazi.



Pri rotaciji oko osi sve točke gornje baze opisuju kružne lukove, no kako je kut infinitezimalan ti se lukovi mogu zamijeniti tangencijalnim translacijama koje su okomite na spojnicu s osi. Zbog infinitezimalnog kuta veličina translacije će iznositi:

$$p = r \cdot \psi$$



Komponente paralelne s koordinatnim osima odrediti će se iz sličnosti trokuta u,v,p s trokutom y,x,r, pa se za točke gornje baze ($z = \ell_z$) dobiva:

$$u(x,y,\ell_z) = -y \cdot \psi \,; \qquad v(x,y,\ell_z) = x \cdot \psi$$

Za donju bazu će odgovarajuće komponente iščezavati:

$$u(x,y,0) = 0 \qquad v(x,y,0) = 0$$

Za bilo koju točku u promatranom tijelu se komponente pomaka u i v dobivaju linearnom interpolacijom:

$$u(x,y,z) = -y \cdot z \cdot \frac{\psi}{\ell_z} \,; \qquad v(x,y,z) = x \cdot z \cdot \frac{\psi}{\ell_z}$$

Pomak paralelan s osi z dakle s osi rotacije će biti jednak za sve točke iste izvodnice. Taj pomak odredjuje vitoperenje:

$$w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

Iz izraza za pomake se mogu odrediti relativne deformacije:

$$\varepsilon_x = 0 \,; \qquad \varepsilon_y = 0 \,; \qquad \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = 0 \,; \qquad \varepsilon_{xz} = -\frac{\psi}{\ell_z} \cdot y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \,; \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\psi}{\ell_z} \cdot x + \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

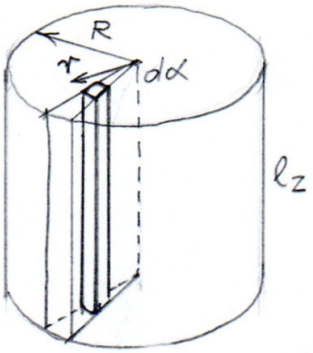
Zbog iščezavanja svih relativnih uzdužnih deformacija, iščezavaju i svi normalni naponi. Nadalje iščezavaju posmični naponi paralelni s bazama. Preostale dvije funkcije koje odredjuju posmične napone mogu se odrediti iz diferencijalnih uvjeta ravnoteže.

Prikazati će se direktni izvod izraza za čistu torziju kružnog valjka i navesti neki podaci o čistoj torziji kvadra, dakle tijela s pravokutnom bazom.

HWPK-85-444

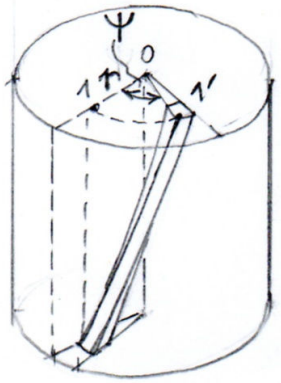
a) Čista torzija kružnog valjka

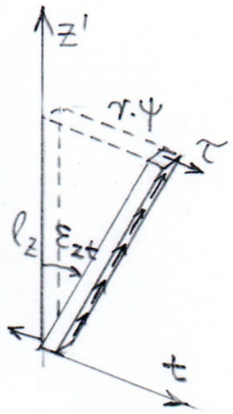
Kod kružnog valjka se pri torziji ne pojavljuje vitoperenje, pa se baze i svi presjeci paralelni s bazama pomiču pri torziji kao nedeformabilni likovi. Iako se osnovni izrazi mogu lako izvesti iz prikazanog općeg polja pomaka, pogodno je da se izvedu direktno iz geometrijskih razmatranja.



Promatra se valjak kojemu je radijus baze R, a visina l_z. Na valjku se odabire isječak dobiven s dvije ravnine koje prolaze kroz os valjka i koje zatvaraju infinitezimalni kut $d\alpha$.

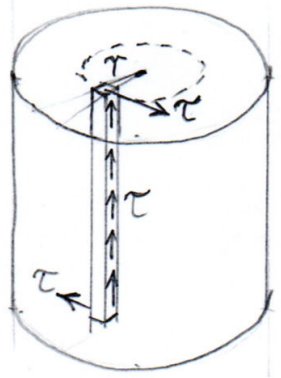
Unutar isječka promatra se stupac kojemu pripada infinitezimalni dio baze, a vanjski rub stupca je od osi udaljen za r.





Nakon deformacije će radijusi koji na bazama odredjuju rub stupca biti relativno zakrenuti za kut Ψ. Ugao stupca koji je na skici označen sa 1 prijeći će u položaj 1'. po krugu radijusa r i tako prijeći luk dužine $r \cdot \Psi$.

Radi lakšeg uočavanja odnosa je kut Ψ ucrtan kao konačan; iako se ustvari radi o infinitezimalnom kutu, pa će i duljina luka $r \cdot \Psi$ biti infinitezimalna. U tim odnosima se luk može zamijeniti tangentom, pa je deformirani stupac zasebno prikazan uz koordinatni sustav zt, pri čemu je os t paralelna s tangentom na kružnicu r u točki 1.



Stupac će se nalaziti u stanju čistog posmika a iz tangencijalnog pomaka i visine se može odrediti relativna posmična deformacija:

$$\varepsilon_{zt} = \frac{r \cdot \Psi}{l_z}$$

Iz relativne posmične deformacije se odredjuje posmični napon $\tau_{zt}(r)$ koji će se kraće označiti s τ_r:

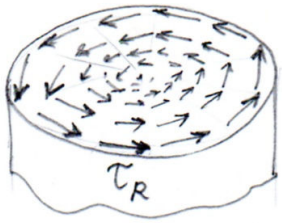
$$\tau_r = G \frac{r \cdot \Psi}{l_z}$$

To je ukupni napon koji djeluje u promatranoj točki baze, pa se može zaključiti da je ukupni napon okomit na radijus i da mu je veličina proporcionalna s radijusom. Znači da je na točkama koje leže na istoj kružnici na bazi ukupni napon po veličini jednak (Vektorski nije jednak jer se razlikuju smjerovi). Kako se cijeli stupac nalazi u stanju čistog posmika, znači da će za sve stupce jednako udaljene od osi ukupni posmik biti po veličini jednak.

HWPK-85-445

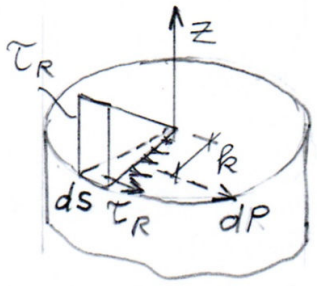
Posmični napon na rubu će imati najveći iznos:

$$\tau_R = G \frac{R \cdot \Psi}{l_z}$$



Na skici je shematski prikazano djelovanje posmičnih napona na bazu kružnog valjka pri čistoj torziji.

Izvesti će se veza rezultirajućeg momenta i veličine napona na rubu.



Promatrati će se djelovanje posmika duž infinitezimalnog isječka baze. Zbog infinitezimalne širine može se smatrati da na isječak djeluje paralelni posmični napon koji će se prikazati naponskim dijagramom. Zbog paralelnosti se veličina rezultante može odrediti kao volumen tijela napona.

Tijelo napona je pravokutna kosa piramida. Površina baze je $\tau_R \cdot ds$, a visina je R. Veličina rezultante je:

$$dP = \frac{\tau_R \cdot ds \cdot R}{3}$$

Udaljenost rezultante od osi je:

$$k = \frac{3}{4} R$$

Moment oko osi z za promatrano djelovanje je:

$$dM_z = k \cdot dP = \frac{\tau_R R^2 ds}{4}$$

Moment je izražen pomoću diferencijala ruba baze, koji je označen s ds, pa će se moment za cijelo posmično djelovanje na bazu odrediti "zbrajanjem" doprinosa svih isječaka, t.j. integracijom:

$$Z = \int_0^{2R\pi} dM_z = \int_0^{2R\pi} \frac{\tau_R R^2 ds}{4} = \frac{\pi R^3 \tau_R}{2}$$

Ukoliko je zadan moment Z, može se odrediti posmični napon na rubu:

$$\tau_R = \frac{2 \cdot Z}{R^3 \pi} \doteq 5.09 \frac{Z}{D^3} \; ; \quad D = 2R$$

odnosno posmični napon za proizvoljnu točku udaljenu za "r" od osi:

$$\tau_R = \frac{2 \cdot r \cdot Z}{R^4 \pi}$$

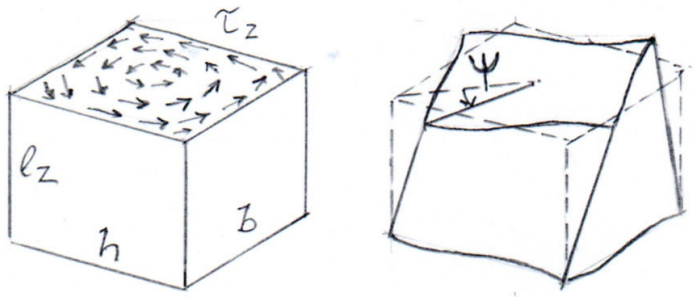
Napon na rubu je izražen pomoću modula posmika i kuta zaokreta baza i u drugom izrazu pomoću rezultirajućeg momenta, pa se pomoću ta dva izraza može izvesti izraz koji povezuje kut relativnog zaokreta baza i rezultirajući moment:

$$\Psi = \frac{2 \cdot Z \cdot l_z}{G R^4 \cdot \pi} = 10.19 \frac{Z \cdot l_z}{G D^4}$$

HWPK-85-446

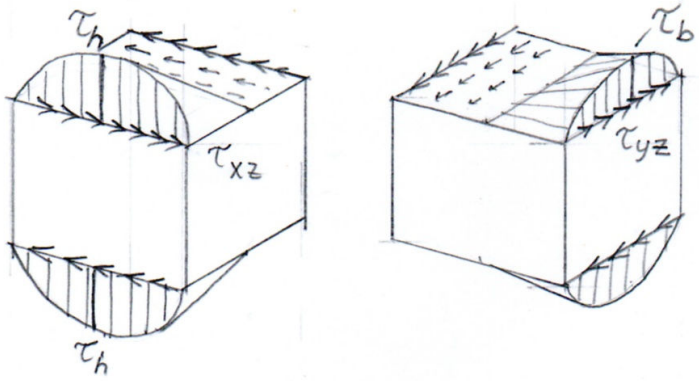
b) Čista torzija kvadra.

Rješenje čiste torzije za kvadar je bitno složenije od prethodnog slučaja i ovdje će se samo navesti najvažniji podaci.



Na lijevoj skici je shematski prikazano djelovanje ukupnog posmika na bazu kvadra.

Na desnoj skici je prikazana deformacija i kut relativnog zaokretanja baza, označen s ψ.



Na skicama su prikazani naponski dijagrami za komponente posmičnih napona paralelne s stranicama.

Napon iščezava u uglovima, ekstremi su na sredinama stranica, a ukupni ekstrem nalazi se na sredini dulje stranice koja je ovdje označena s h. To je svojstvo koje se teško može intuitivno predvidjeti.

Prikazati će se tabela koeficijenata pomoću kojih se za nekoliko karakterističnih omjera dužina stranica mogu odrediti ekstremni naponi i kut relativnog zaokreta baza.

Dulja stranica će se označiti s h, a kraća s b.

Najveći posmični napon će se pojaviti na sredini dulje stranice i odredjivati će se prema izrazu:

$$\tau_h = \frac{\alpha \cdot Z}{b^2 h}$$

Ekstrem posmičnog napona na kraćoj stranici odrediti će se pomoću izraza:

$$\tau_b = \beta \cdot \tau_h$$

Kut relativnog zaokreta baza će se odredjivati pomoću izraza:

$$\psi = \frac{\gamma \cdot Z \cdot l_z}{G b^3 h}$$

h/b	α	β	γ
1.0	4.81	1.00	7.14
1.5	4.34	0.859	5.10
2.0	4.06	0.795	4.37
3.0	3.75	0.753	3.80
4.0	3.47	0.745	3.56

HWPK-85-447

Teorije za tijela specijalnih oblika

Odredjivanje naponskih stanja u štapovima, pločama i ljuskama se često pojavljuje u proračunu konstrukcija, pa su, u pomanjkanju pogodnih općih rješenja, razvijene specijalne teorije: teorija štapova, teorija ploča, teorija ljusaka, koje će se zajednički nazivati teorije za tijela specijalnih oblika.

Teorije za tijela specijalnih oblika zasnivaju se na uvodjenju pogodnih ograničenja u polja pomaka i/ili polja napona, pa u općem slučaju daju samo približna rješenja, koja su prihvatljiva za proračun konstrukcija.

Svaka od navedenih specijalnih teorija ima svoj osnovni oblik koji pretstavlja restrikciju linearne teorije elastičnosti.

Opća rješenja specijalnih teorija vode na matematičke probleme koji su jednostavniji od problema na koje vodi opće rješenje linearne teorije elastičnosti, pa postoje mnoga rješenja u zatvorenom obliku, kao i bitno širi skup rješenja u razvijenom obliku.

Za specijalne teorije ne postoji opće rješenje za proizvoljne oblike ili raspodjele opterećenja, pa se i ovdje uvode približna rješenja.

HWPK-85-448

Teorija štapova

Teorija štapova ili štapna mehanika sadrži približne postupke za odredjivanje naponsko deformacionog polja štapova.

Ranije su definirani pojmovi: štap, os štapa, poprečni presjek štapa, infinitezimalni element štapa.

Prikazana je i statika štapnog elementa u kojoj je uvedena redukcija opterećenja na os i odredjivanje reznih sila.

Ovdje će se uvesti osnove teorije prizmatičnih štapova koja se zasniva na prikazanim točnim rješenjima za djelovanja na baze prizmatičnog tijela.

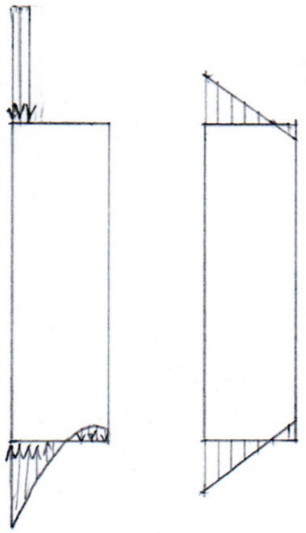
Razlikovati će se dva slučaja:

a) Prizmatični štap je opterećen samo na krajnjim presjecima.

Kao približno rješenje se uzima točno rješenje prizmatičnog tijela za koje je djelovanje na baze statički ekvivalentno zadanom djelovanju.

Točnost aproksimacije ovisi o odstupanju zadanog djelovanja od raspodjele napona koja je karakteristična za točno rješenje.

Prema Saint-Venant-ovom pricipu utjecaj tog odstupanja će se u svakom slučaju ograničiti na područje koje je omedjeno presjekom udaljenim od krajnjeg presjeka za dužinu dijametra opisanog kruga baze, t.j. poprečnog presjeka.



Kod vitkih štapova će veći dio tijela biti u stanju koje je jednako točnom rješenju, pa se sa zadovoljavajućom točnosti koriste izrazi za napone i deformacije.

Na lijevoj skici je prikazano zadano djelovanje na tijelo, a na desnoj aproksimacija naponskog polja u štapnoj statici.

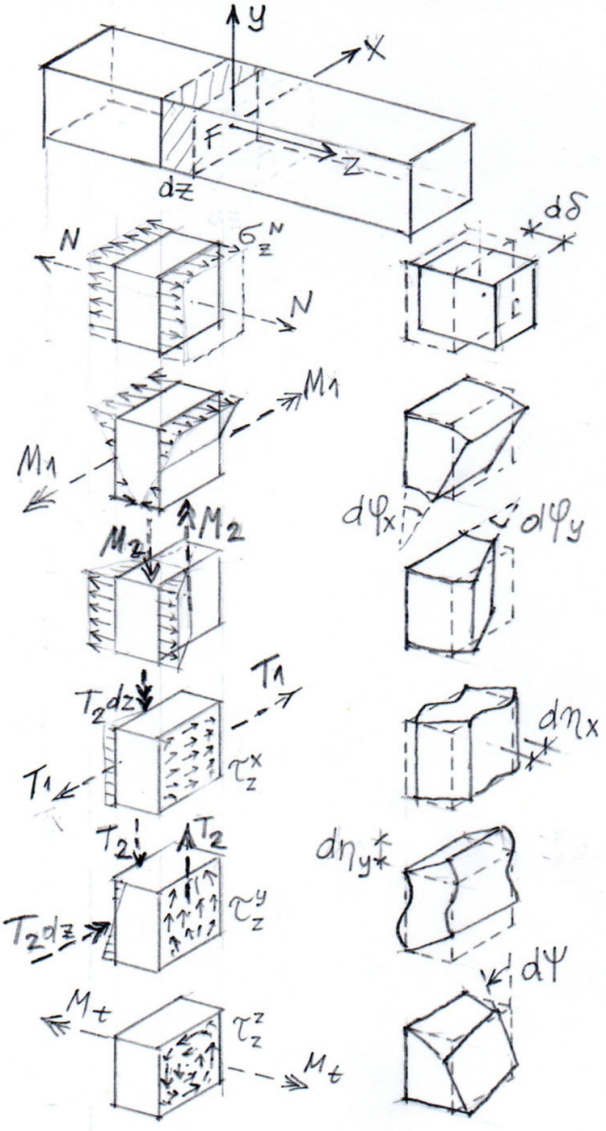
Ukoliko su naponi na krajnje presjeke zadani može se posebnim postupcima istražiti utjecaj lokalnog odstupanja od rješenja ua prizmatično tijelo.

Ako je štap krajnjim presjekom povezan s ostatkom sistema obično se usvaja aproksimativna raspodjela.

b) Prizmatični štap je proizvoljno opterećen

Uvodi se pretpostavka da se svaki infinitezimalni element nalazi u naponsko deformacionom stanju koje je linearna kombinacija prikazanih točnih rješenja za prizmatično tijelo i to tako da poprečni presjek čini bazu, a infinitezimalni dio osi čini visinu tijela. Na taj način je naponsko deformaciono polje odredjeno samo reznim silama čime je opravdano njihovo uvodjenje.

HWPK - 85 - 449



Na skicama je shematski prikazana aproksimacija na kojoj se zasniva teorija štapova. Zbog jednostavnosti je prikazan štap s pravokutnim poprečnim presjekom.
Osi x i y su glavne osi krajnjeg poprečnog presjeka, a os z leži na osi štapa.

Prva tri reda prikazuju djelovanje normalnih napona na element. Ako su zadane rezme sile, normalni naponi su odredjeni izrazom:

$$\sigma_z(x,y) = \frac{N}{F} + \frac{M_1}{I_{xx}} y - \frac{M_2}{I_{yy}} \cdot x$$

Izduženje elementa, t.j. promjena udaljenosti presjeka iznosi:

$$d\delta = \frac{N dz}{EF}$$

Kut savijanja odnosno promjena kuta medju presjecima za os x iznosi:

$$d\varphi_x = \frac{M_1 dz}{E I_{xx}}$$

Kut savijanja elementa oko osi y, t.j. promjena kuta medju krajnjim presjecima projicirana na os y iznosi:

$$d\varphi_y = \frac{M_2\, dz}{E I_{yy}}$$

Donja tri reda skica na str.449. prikazuju djelovanje posmičnih napona na element. Uz poprečne sile se pojavljuju i normalni naponi proporcionalni momentima $T_x \cdot dz$ odnosno $T_y \cdot dz$, ali su to infinitezimalne veličine koje se zanemaruju prema veličinama napona.

Ako su zadane rezne sile, posmični naponi su odredjeni izrazima za dvije komponente; ovdje su odabrane tako da budu paralelne s glavnim osima:

$$\tau_{xz}(x,y) = \tau_{xz}^{(1)}(x,y) \cdot T_1 + \tau_{xz}^{(2)}(x,y) \cdot T_2 + \tau_{xz}^{(3)}(x,y) \cdot M_t$$

$$\tau_{yz}(x,y) = \tau_{yz}^{(1)}(x,y) \cdot T_1 + \tau_{yz}^{(2)}(x,y) \cdot T_2 + \tau_{yz}^{(3)}(x,y) \cdot M_t$$

U izrazu su uvedene normirane funkcije: doprinosi sa superskriptom 1 se odnose na jediničnu poprečnu silu u smjeru x:

$$\int_F \tau_{xz}^{(1)}\, dF = 1\,; \qquad \int_F \tau_{yz}^{(1)}\, dF = 0.$$

Doprinosi sa superskriptom 2 se odnose na jediničnu poprečnu silu u smjeru y, pa prema tome vrijedi:

$$\int_F \tau_{xz}^{(2)}\, dF = 0\,; \qquad \int_F \tau_{yz}^{(2)}\, dF = 1.$$

Doprinosi sa superskriptom 3 se odnose na jedinični moment torzije, pa prema tome vrijedi:

$$\int_F (x \cdot \tau_{yz}^{(3)} - y \cdot \tau_{xz}^{(3)})\, dF = 1$$

Posmični pomak je relativna translacija težišta krajnjih presjeka infinitezimalnog elementa projicirana na prosječnu ravninu . Prosječna ravnina je uvedena u točnom rješenju za savijanje s poprečnom silom, koje se i ovdje koristi.

Na skici je deformirani element uz djelovanje poprečnih sila prikazan tako da se prosječne ravnine poklapaju s ravninom presjeka iz nedeformiranog položaja, pa će se posmični pomak prikazati s dvije komponente: $d\eta_x$, $d\eta_y$

$$d\eta_x = \frac{\alpha_1 T_1\, dz}{GF}\,;$$

$$d\eta_y = \frac{\alpha_2 T_2\, dz}{GF}$$

HWPK-85-450

Kut torzije elementa, odnosno relativni zaokret krajnjih presjeka oko osi štapa odredjen je izrazom:

$$\Psi = \frac{M_t \cdot dz}{G I_t}$$

Polje pomaka prizmatičnog štapa

U teoriji štapova se uvodi aproksimacija polja pomaka, koja je već ranije opisana:

Poprečni presjeci će se tokom deformiranja ponašati kao nedeformabilni likovi, pa će se promjene njihovih položaja moći odrediti sa po šest podataka: tri translacije težišta itri rotacije. Ti se podaci mogu shvatiti kao veličine komponenti dvaju vektora.

Iz opisa točnih rješenja prizmatičnog tijela vidljivo je da se baze pri deformaciji takodjer deformiraju, bilo u svojoj ravnini bilo da se pojavljuje vitoperenje, pa susjedni infinitezimalni elementi ne će "pristajati" točno jedna uz drugoga.

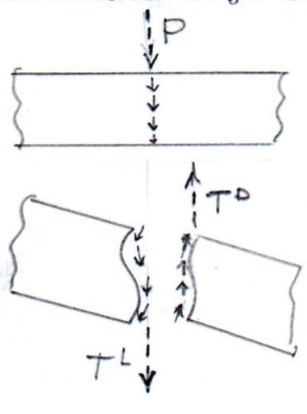
Zbog toga treba definirati pogodno medjusobni odnos deformiranih infinitezimalnih elemenata. Na krajnjim presjecima dvaju susjednih elemenata poklapati će se točka s osi, dakle točka koja je bila težište nedeformiranog presjeka. Pokkapati će se i odgovarajuće prosječne ravnine, a deformirane dužiné koje su u početnom položaju ležele na glavnim osima presjeka, će takodjer imati zajedničke točke.

Zbog jednostavnosti korištenja teorije štapova uvodi se polje pomaka koje je kontinuirano, pa odstupa od polja pomaka svakog infinitezimalnog elementa. Presjeci će se ponašati kao nedeformabilni likovi koji leže na prosječnim ravninama deformacionih polja pripadnih infinitezimalnih elemenata.

Prikazivanje opterećenja na prizmatičnom štapu.

Redukcija opterećenja na os je samo pomoćno sredstvo koje olakšava postupke u teoriji štapova.

Koncentrirana sila zamjenjuje sva ekvivalentna djelovanja na pripadni presjek. U smislu uvedene aproksimacije koncentrirana sila će odgovarati plošnim silama koje djeluju na sam presjek t.j. odgovarati će razlici izmedju rezultanti posmičnih napona elemenata koji se sastaju u tom presjeku.

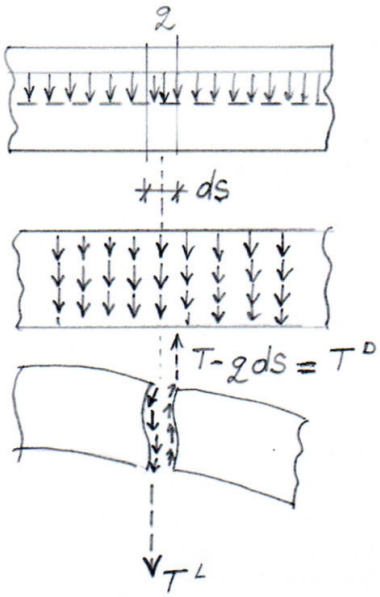


Stvarno opterećenje se rijetko i približava toj raspodjeli, ali se kod vitkih štapova, prema Saint-Venant-ovom pricipu odstupanje ograničava samo na neposrednu okolinu mjesta djelovanja.

Analogno se može prikazati djelovanje koje se svodi na koncentrirani moment.

HWPK-85-451

Linijska sila zamjenjuje sva distribuirana djelovanja na infinitezimalne elemente štapa. U smislu uvedene aproksimacije



linijska sila će odgovarati plošnim silama koje djeluju na presjeke izmedju infinitezimalnih elemenata.

Elementarnoj sili $q\,ds$ biti će ekvivalentna razlika poprečnih sila susjednih elemenata:

$$q\,ds = T^L - T^D$$

Pri tome je najlakše zamisliti da presjek koji dijeli elemente prolazi polovinom infinitezimalnog dijela osi za koji je odredjena sila $q\,ds$.

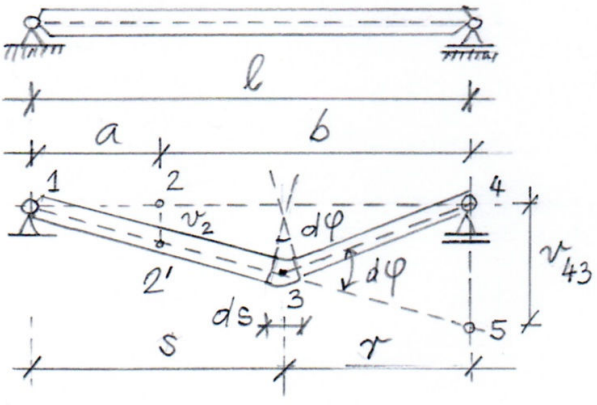
Djelovanje vlastite težine štapa se dosta približuje toj raspodjeli, a za ostala djelovanja će odstupanje biti veće.

Analogno se može prikazati djelovanje linijskih momenata na štap.

HWPK-85-452

Napomena o integralnim izrazu za odredjivanje pomaka i zaokreta pojedinih presjeka štapnog sistema

Izvod integralnog izraza će se samo skicirati ma jednostavnom primjeru. Analogno se može provesti izvod za opći slučaj štapnog sistema.



Promatra se prosta greda i zamišlja da se samo jedan infinitezimalni element savinuo za kut $d\varphi$. Preostala dva dijela grede koji su konačne duljine neka ostanu nedeformirani.

Produljene osi tih dijelova sijeći će se unutar deformiranog elementa u točki 3. Kut izmedju tih dijelova osi će biti jednak kutu savijanja $d\varphi$ infinitezimalnog elementa. Time je odredjen deformirani oblik grede.

Izvesti će se izraz za projekciju pomaka točke 2 na okomicu na os. U ovom specijalnom slučaju će i sam pomak biti okomit na os, što nije bitno za izvod. Točka 2 će nakon pomaka prijeći u točku 2'.

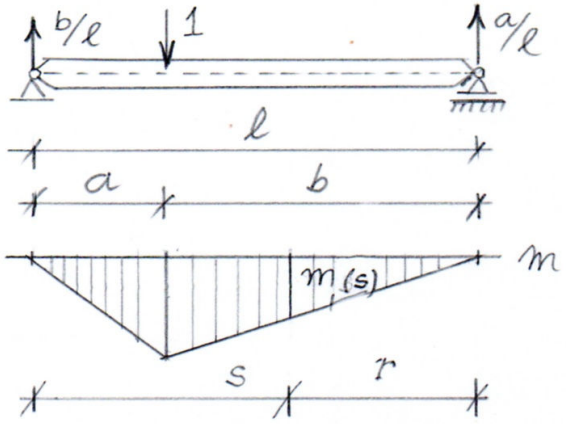
Produžena os 1,3 sijeći će okomicu na spojnicu 1,4 u točki 4. Presjecište je označeno s 5. Dužina 4,5 je označena s v_{43} i ona će biti infinitezimalna jer se u trokutu nalazi nasuprot infinitezimalnog kuta. Zbog toga se v_{43} može odrediti prema izrazu:

$$v_{43} = r \cdot d\varphi$$

Pomak točke 2, označen s v_2 može se sada odrediti iz sličnosti trokuta 1,2,2´s trokutom 1,4,5:

$$v_2 = v_{43} \cdot \frac{a}{\ell} = r \cdot \frac{a}{\ell} \cdot d\varphi$$

Ovaj izraz je dobiven iz geometrijskih razmatranja. Pokazati će se da se faktor kojim se množi $d\varphi$ može interpretirati i statički.



Promatra se zadana greda; na mjestu čiji se pomak traži, djeluje jedinična sila paralelna s osi na koju će se projicirati vektor pomaka; tzv mjerno opterećenje.

Sile u spojevima se odredjuju na poznati način: ucrtane su uz skicu sistema.

Prikazan je momentni dijagram označen s "m". Odrediti će se ordinata na mjestu na kojem se nalazi deformirani infinitezimalni element. Ta ordinata će se označiti s m(s).

$$m(s) = \frac{a \cdot r}{\ell}$$

Vidljivo je da je moment savijanja dobiven na prikazani način upravo jednak faktoru kojim se množi $d\varphi$ u izrazu za odredjivanje pomaka, pa se taj izraz može napisati u obliku:

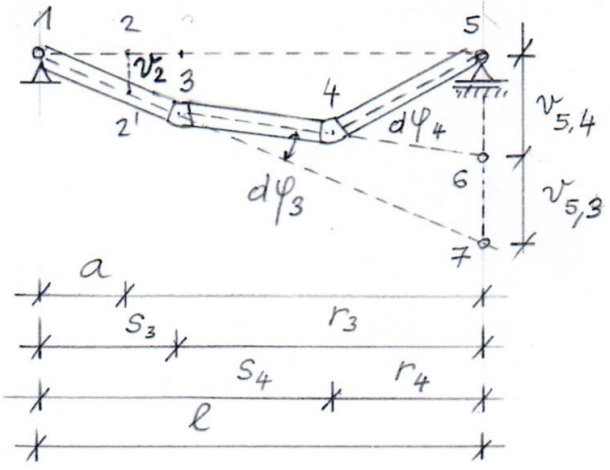
$$v_2 = m(s) \cdot d\varphi$$

Može se na analogni način pokazati odredjivanje zaokreta nekog presjeka; za mjerno opterećenje treba odabrati jedinični moment.

Može se nadalje pokazati da se utjecaj istezanja elementa dobiva tako da se istezanje pomnoži s uzdužnom silom od mjernog optrećenja, te da se utjecaj poprečnog pomaka elementa dobiva tako da se pomak pomnoži s poprečnom silom od mjernog opterećenja. Zbog linearnosti izraza, pojedini doprinosi se zbrajaju:

$$v_2 = m(s)\, d\varphi + n(s) \cdot d\delta + t(s) \cdot d\eta$$

Pokazati će se da se mogu zbrajati i doprinosi savijanja pojedinih kutova savijanja.



Prikazana je greda u kojoj su savinuta dva infinitezimalna elementa. Zbog infinitezimalnih kuteva mogu se odsječci na okomici nad ležajem 5 odrediti prema izrazima:

$$v_{5,3} = r_3 \cdot d\varphi_3$$

$$v_{5,4} = r_4 \cdot d\varphi_4$$

HWPK-86-453

Pomak točke 2 odredjuje se, kao i ranije, iz sličnosti trokuta 1,2,2´s trokutom 1,5,7, pa se dobiva:

$$v_2 = \frac{v_{5,3} + v_{5,4}}{l} \cdot a = \frac{r_3 \cdot a \cdot d\varphi_3}{l} + \frac{r_4 \cdot a \cdot d\varphi_4}{l}$$

$$v_2 = m(s_3) \cdot d\varphi_3 + m(s_4) \cdot d\varphi_4$$

Za konačni broj doprinosa dobiva se suma, a pri podjeli štapa na beskonačno mnogo elemenata dobiva se odgovarajući integral koji će se simbolički zapisati:

$$v_2 = \int_S m(s) \cdot d\varphi(s)$$

U ovom obliku se integracija ne može provesti; infinitezimalni kut savijanja koji je funkcija položaja treba izraziti pomoću odgovarajuće funkcije i infinitezimalnog dijela područja integracije:

$$d\varphi(s) = \phi(s) \cdot ds$$

Ukoliko je uzrok savijanja opterećenje, funkcija ϕ ima oblik:

$$\phi(s) = \frac{M}{EI}$$

Simbolički izraz za pomak koji nastaje pri savijanju, istezanju i poprečnom pomicanju infinitezimalnih elemenata glasi:

$$v_2 = \int_S m(s) \cdot d\varphi(s) + \int_S n(s) \cdot d\delta(s) + \int_S t(s) \cdot d\eta(s)$$

Uz uvodjenje odgovarajućih funkcija izraz glasi:

$$v_2 = \int_S m(s) \cdot \phi(s)\, ds + \int_S n(s) \cdot \Delta(s)\, ds + \int t(s) \cdot H(s)\, ds$$

Izraz za pomak uslijed opterećenja glasi:

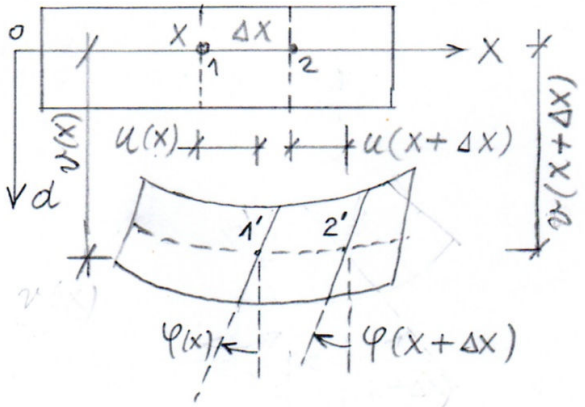
$$v_2 = \int_S m(s) \frac{M(s)}{EI} ds + \int_S n(s) \frac{N(s)}{EF} ds + \int_S t(s) \frac{\alpha T(s)}{GF} ds$$

Način primjene integralnog izraza prikazan je ranije.

HWPK-85-454

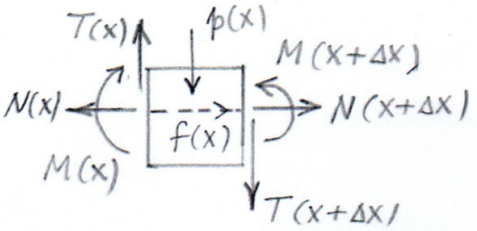
Diferencijalne jednadžbe za pomake osi štapa i zaokrete poprečnih presjeka

Ranije je prikazan način opisivanja polja pomaka štapa pomoću pomaka točaka osi i zaokreta poprečnih presjeka. Prikazani su i diferencijalni odnosi reznih sila i opterećenja. Ovdje će se izvesti veza funkcija koje opisuju polje pomaka štapa i opterećenja. Zbog preglednosti će se izvesti samo specijalni slučaj za ravan štap opterećen u ravnini.



Promatra se prizmatični štap u početnom položaju. Uvodi se koordinatni sistem x,d tako da se os x poklapa s osi štapa, a os "d" je usmjerena "dolje", da pomaci uslijed vlastite težine budu pozitivni.

Funkcije u(x) i v(x) odredjuju translaciju težišta presjeka, a funkcija $\varphi(x)$ rotaciju.



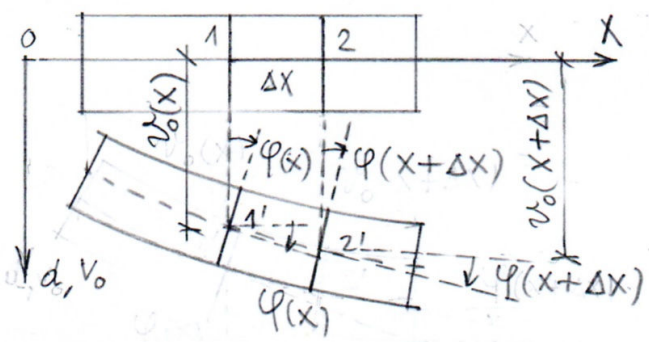
Promatra se element štapa omedjen s poprečnim presjecima čiji su težišta točke 1 i 2. Duljina pripadnog dijela osi je ΔX .

U pomaknutom položaju te točke prelaze u 1'i 2'.

Treba odrediti vezu funkcija pomaka s reznim silama, pa će se u ovom slučaju uvesti predznak i za moment savijanja. Pozitivni moment savijanja je ucrtan na skici: za prikazani štap, pozitivni moment savijanja izaziva zatezanje na donjem rubu štapa. Izvod će se provesti za specijalni slučaj u kojemu identično iščezava opterećenje s distribuiranim momentima, pa preostaje samo poprečno distribuirano opterećenje p(x) i uzdužno distribuirano opterećenje intenziteta f(x).

Stanje pomaka štapa će se prikazati pomoću zbroja triju zasebnih parcijalnih stanja pomaka koja su tako odabrana, da se na cijelom štapu pojavljuje samo jedan tip deformiranja elemenata štapa. Pokazati će se, da se funkcija poprečnog pomaka v(x) ne može odrediti direktno, nego samo kao zbroj dvaju parcijalnih pomaka.

a) Stanje savijanja.



Ovo stanje je odredjeno funkcijom prvog parcijalnog poprečnog pomaka osi $v_o(x)$. U tom stanju iščezava uzdužni pomak u(x), a zaokreti presjeka su takovi, da presjeci ostaju i u pomaknutom položaju okomiti na os.

Zbog infinitezimalnih pomaka može se uzeti da je duljina luka 1',2'

HWPK-85-455

jednaka duljini 1,2 dakle Δx , pa se promatrani element nalazi u stanju čistog savijanja.

Kut izmedju krajnjih presjeka 1´i 2´ označiti će se s $\Delta\varphi$, pa vrijedi:

$$\Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$$

Zbog okomitosti presjeka na deformiranu os biti će ti kutevi jednaki kutevima nagiba tangenti na deformiranu os. Zbog infinitezimalnih ordinata funkcije $v_0(x)$ biti će i kutevi infinitezimalni, pa se umjesto kuta može uvesti tangens t.j. prva derivacija funkcije poprečnog pomaka po osi:

$$\Delta\varphi = tg\varphi(x+\Delta x) - tg\varphi(x) = \frac{dv_0}{dx}(x+\Delta x) - \frac{dv_0}{dx}(x)$$

Ako se za kut savijanja $\Delta\varphi$ uvrsti izraz koji ga povezuje s konstantnim momentom savijanja, dobiva se:

$$-\frac{M\Delta x}{EI} = \frac{dv_0}{dx}(x+\Delta x) - \frac{dv_0}{dx}(x)$$

Treba uočiti da se u ovom obliku izraz može koristiti samo, ako je moment savijanja konstantan. Za opći oblik funkcije momenta savijanja treba izvesti diferencijalni odnos, pa će se gornja jednadžba podijeliti s Δx i provesti granični prijelaz za $\Delta x \to 0$. Dobiva se veza momenta savijanja, mehaničkih karakteristika infinitezimalnog elementa i druge derivacije prvog parcijalnog poprečnog pomaka osi štapa:

$$-\frac{M}{EI} = \frac{d^2v_0}{dx^2} \quad \text{odnosno:} \quad M = -EI\frac{d^2v_0}{dx^2}$$

Negativni predznak potječe od pretpostavljenog pozitivnog momenta savijanja: pozitivni moment smanjuje nagib tangente.
Gornji izraz će se derivirati, pa se dobiva veza poprečne sile i funkcije pomaka. Ponovnim deriviranjem se dobiva veza funkcije pomaka i poprečnog distribuiranog opterećenja:

$$-\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2}{dx^2}v_0(x)\right) = T(x); \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v_0(x)}{dx^2}\right) = p(x)$$

Dobiveni izrazi se koristi za štapove kojima se karakteristike poprečnog presjeka mijenjaju duž osi.

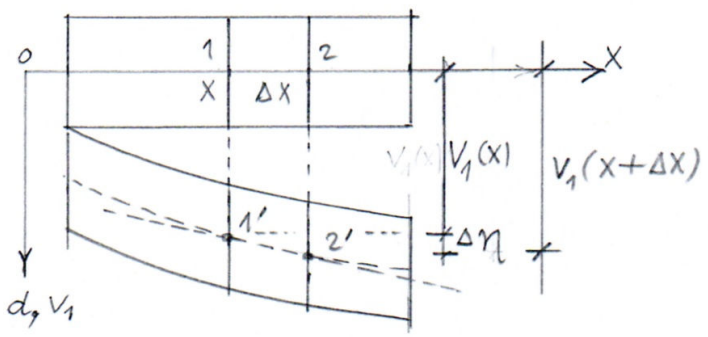
Za specijalni slučaj prizmtičnog štapa, t.j. EI = const, dobiva se:

$$-\frac{d^3}{dx^3}v_0(x) = \frac{T(x)}{EI}; \qquad \frac{d^4}{dx^4}v_0(x) = \frac{p(x)}{EI}$$

Dobivena je obična linearna diferencijalna jednadžba četvrtog reda. Pri rješavanju te jednadžbe može se zadovoljiti četiri rubna uvjeta. Rubni uvjeti su zadani kao pomaci ili zaokreti, te kao momenti savijanja ili poprečne sile na krajevima.

HWPK-85-456

b) Stanje posmičnog pomaka.



Ovo stanje je odredjeno funkcijom drugog parcijalnog poprečnog pomaka $v_1(x)$.

U tom stanju iščezavaju identično svi zaokreti poprečnih presjeka t.j. presjeci ostaju paralelni svom početnom položaju.

Identično iščezava i uzdužni pomak u(x).

Zbog infinitezimalnih pomaka može se uzeti da je duljina luka pomaknute osi, npr 1',2' jednaka duljini u početnom položaju, npr. 1,2. Posmični pomak promatranog elementa duljine ΔX biti će razlika krajnjih ordinata funkcije poprečnog pomaka osi:

$$\Delta\eta = V_1(X+\Delta X) - V_1(X)$$

Ako se za posmični pomak uvrsti izraz koji ga povezuje s konstantnom poprečnom silom, dobiva se:

$$\frac{\alpha T \Delta X}{GF} = V_1(x+\Delta x) - V_1(X)$$

Za opći slučaj funkcije poprečne sile treba izvesti diferencijalni odnos, pa će se gornja jednadžba podijeliti s ΔX i provesti granični prijelaz za $\Delta X \to o$. Dobiva se veza poprečne sile, mehaničkih karakteristika infinitezimalnog elementa i prve derivacije drugog parcijalnog pomaka osi štapa:

$$\frac{\alpha T}{GF} = \frac{dV_1(x)}{dX} \qquad \text{odnosno:} \qquad T = \frac{GF}{\alpha} \cdot \frac{dV_1(x)}{dx}$$

Veza izmedju funkcije pomaka i opterećenja dobiti će se tako, da se gornji izraz derivira po x i uvrsti veza prve derivacije poprečne sile i poprečnog distribuiranog opterećenja:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{GF}{\alpha} \cdot \frac{dV_1(x)}{dx}\right) = -p(x)$$

Dobiveni izraz se koristi za štapove kojima se karakteristike poprečnog presjeka mijenjaju duž osi.

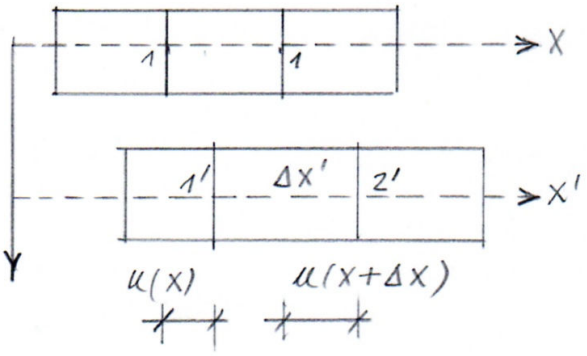
Za specijalni slučaj prizmatičnog štapa, t.j. $GF/\alpha = \text{const}$, dobiva se:

$$\frac{d^2V_1(x)}{dx^2} = -\frac{\alpha p(x)}{GF}$$

Dobivena je obična linearna diferencijalna jednadžba drugog reda. Pri rješavanju te jednadžbe može se zadovoljiti dva rubna uvjeta. Rubni uvjeti odredjuju pomake ili poprečne sile na krajnjim presjecima.

HWPK-95-457

c) Stanje uzdužnog pomaka



Ovo stanje je odredjeno funkcijom uzdužnog pomaka točaka osi; u(x).

U tom stanju identično iščezava poprečni pomak V(x), kao i zaokreti poprečnih presjeka $\varphi(x)$.

Uz os x je skiciran početni položaj štapa, a uz os x´je skiciran pomaknuti položaj.

Promatra se element dužine Δx .

Istezanje tog elementa je odredjeno razlikom krajnjih ordinata funkcije uzdužnog pomaka:

$$\Delta\delta = u(x+\Delta x) - u(x)$$

Ako se za uzdužni pomak uvrsti izraz koji ga povezuje s konstantnom uzdužnom silom, dobiva se:

$$\frac{N\Delta x}{EF} = u(x+\Delta x) - u(x)$$

Za opći slučaj funkcije uzdužne sile, treba izvesti diferencijalni odnos, pa će se gornja jednadžba podijeliti s Δx i provesti granični prijelaz za $\Delta x \to 0$. Dobiva se veza uzdužne sile, mehaničkih karakteristika infinitezimalnog elementa i prve derivacije uzdužnog pomaka točaka osi štapa:

$$\frac{N}{EF} = \frac{du(x)}{dx} \qquad \text{odnosno:} \quad N = EF \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

Veza izmedju funkcije pomaka i opterećenja dobiti će se tako, da se gornji izraz derivira po x i uvrsti veza prve derivacije uzdužne sile i uzdužnog distribuiranog opterećenja:

$$\frac{d}{dx}\left(EF\frac{du(x)}{dx}\right) = -f(x)$$

Dobiveni izraz se koristi za štapove kojima se karakteristike poprečnog presjeka mijenjaju duž osi.

Za specijalni slučaj prizmatičnog štapa, t.j. EF = const., dobiva se:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{f(x)}{EF}$$

Dobivena je obična linearna diferencijalna jednadžba drugog reda. Pri rješavanju te jednadžbe može se zadovoljiti dva rubna uvjeta. Rubnim uvjetima se odredjuju uzdužni pomaci ili uzdužne sile na krajnjim presjecima.

HWPK-85-458

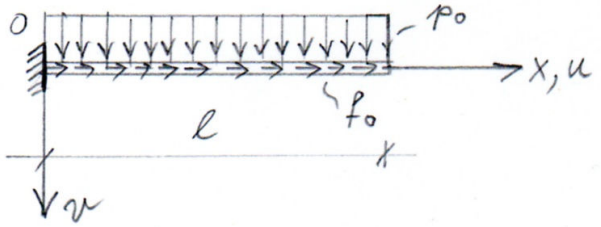
Dobivene funkcije $v_0(x)$, $v_1(x)$, $u(x)$ potpuno odredjuju pomak osi i zaokrete presjeka. Uzdužni pomak je dobiven direktno. Poprečni pomak je odredjen izrazom:

$$v(x) = v_0(x) + v_1(x)$$

Zaokret presjeka je odredjen izrazom:

$$\varphi(x) = \frac{dv_0(x)}{dx}$$

Primjer. Promatra se konzola konstantnog poprečnog presjeka na koju djeluju: konstantna poprečna distribuirana sila intenziteta p_0 i konstantna uzdužna distribuirana sila intenziteta f_0. (p_0 i f_0 čine opterećenje!)



Definirati će se rubni uvjeti. Kruto spojeni kraj se nalazi na mjestu $x = 0$.
Na tom mjestu iščezava poprečni pomak: $v(0) = 0$

U ovom slučaju se može postaviti:

$$v_0(0) = 0; \qquad v_1(0) = 0$$

Na tom mjestu iščezava i uzdužni pomak: $u(0) = 0$.

Na tom mjestu iščezava i zaokret presjeka: $\varphi(0) = 0$. t.j. $\frac{dv_1(0)}{dx} = 0$.

Slobodni kraj se nalazi na mjestu $x = \ell$.
Na tom mjestu iščezava moment savijanja $M(\ell) = 0$ t.j. $\frac{d^2v_0(\ell)}{dx^2} = 0$

Nadalje iščezava poprečna sila $T(\ell) = 0$ pa slijedi: $\frac{d^3v_0(\ell)}{dx^3} = 0$; $\frac{dv_1(\ell)}{dx} = 0$

Nadalje iščezava uzdužna sila $N(\ell) = 0$ pa slijedi: $\frac{du(\ell)}{dx} = 0$

a) Stanje savijanja.

$$EI \frac{d^4v_0}{dx^2} = p_0$$

Integriranjem po x se dobiva: $EI \frac{d^3v_0}{dx^3} = p_0 x + C_1$

Iz uvjeta iščezavanja poprečne sile na slobodnom kraju, dobiva se: $C_1 = -p_0\ell$. Time je odredjena treća derivacija pomaka kojoj je proporcionalna poprečna sila:

$$EI \frac{d^3v_0}{dx^3} = p_0 x - p_0\ell; \qquad T(x) = -p_0(x - \ell) = p_0(\ell - x)$$

Imtegriranjem po x izraza za treću derivaciju se dobiva:

$$EI \frac{d^2v_0}{dx^2} = \frac{p_0 x^2}{2} - p_0\ell \cdot x + C_2$$

Iz uvjeta iščezavanja momenta savijanja na slobodnom kraju,

HWPk-85-459

dobiva se:

$$0 = \frac{p_0 l^2}{2} - p_0 l^2 + C_2; \qquad C_2 = \frac{p_0 l^2}{2}$$

Time je odredjena druga derivacija, kojoj je proporcionalan moment savijanja:

$$EI \frac{d^2 v_0}{dx^2} = \frac{p_0 x^2}{2} - p_0 l x + \frac{p_0 l^2}{2}; \qquad M(x) = -\frac{p_0}{2}(l-x)^2$$

Integriranjem izraza za drugu derivaciju po x dobiva se:

$$EI \frac{dv_0}{dx} = \frac{p_0 x^3}{6} - \frac{p_0 l x^2}{2} + \frac{p_0 l^2 x}{2} + C_3$$

Iz uvjeta iščezavanja zaokreta poprečnog presjeka na kruto spojenom kraju slijedi: $C_3 = 0$. Time je odredjena prva derivacija pomaka v_0 koja je jednaka zaokretu presjeka:

$$EI \frac{dv_0}{dx} = \frac{p_0 x^3}{6} - \frac{p_0 l x^2}{2} + \frac{p_0 l^2 x}{2}; \qquad \varphi(x) = \frac{p_0 x}{2EI}\left(\frac{x^2}{3} - lx + l^2\right)$$

Integriranjem izraza za prvu derivaciju po x dobiva se pomak:

$$EI\, v_0(x) = \frac{p_0 x^4}{24} - \frac{p_0 l x^3}{6} + \frac{p_0 l^2 x^2}{4} + C_4$$

Iz uvjeta iščezavanja pomaka na kruto spojenom kraju slijedi: $C_4 = 0$ pa je tako odredjen izraz za prvi parcijalni poprečni pomak konzole:

$$v_0(x) = \frac{p_0 x^2}{24EI}\left(x^2 - 4lx + 6l^2\right)$$

b) Stanje posmičnog pomaka

$$\frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} = -\frac{p_0 \cdot \alpha}{GF}$$

Integriranjem po x se dobiva:

$$\frac{dv_1(x)}{dx} = -\frac{p_0 \alpha}{GF}(x + C_1)$$

Iz uvjeta iščezavanja poprečne sile na slobodnom kraju, dobiva se:

$C_1 = -l$ Time je odredjena prva derivacija pomaka kojoj je proporcionalna poprečna sila. Izraz za poprečnu silu je već izveden.

$$\frac{dv_1(x)}{dx} = \frac{p_0 \alpha}{GF}(l - x)$$

Integriranjem izraza za prvu derivaciju po x, dobiva se:

$$v_1(x) = \frac{p_0 \alpha}{GF}\left(lx - \frac{x^2}{2} + C_1\right)$$

HWPK-85-460

Iz uvjeta iščezavanja pomaka na kruto spojenom kraju, slijedi: $C_2 = 0$ pa je tako odredjen izraz za drugi parcijalni poprečni pomak konzole:

$$v_1(x) = \frac{p_0 \alpha x}{GF}\left(\ell - \frac{x}{2}\right)$$

Odredjivanjem dvaju parcijalnih poprečnih pomaka, odredjen je i ukupni, traženi poprečni pomak:

$$v(x) = p_0 x\left[\frac{x}{24EI}\left(x^2 - 4\ell x + 6\ell^2\right) + \frac{\alpha}{GF}\left(\ell - \frac{x}{2}\right)\right]$$

Udio pomaka od posmične deformacije opada s vitkosti štapa, pa se u većini praktičnih zadataka zanemaruje.

c) Stanje uzdužnog pomaka

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{f_0}{EF}$$

Integriranjem po x se dobiva:

$$\frac{du(x)}{dx} = -\frac{f_0}{EF}(x + C_1)$$

Iz uvjeta iščezavanja uzdužne sile na slobodnom kraju, dobiva se:

$$C_1 = -\ell$$

Time je odredjena prva derivacija uzdužnog pomaka, a njoj je proporcionalna uzdužna sila:

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{f_0}{EF}(\ell - x); \qquad N(x) = f_0(\ell - x)$$

Integriranjem izraza za prvu derivaciju po x, dobiva se:

$$u(x) = \frac{f_0}{EF}\left(\ell x - \frac{x^2}{2} + C_2\right)$$

Iz uvjeta iščezavanja pomaka na kruto spojenom kraju, slijedi:

$$C_2 = 0$$

Time je odredjen izraz za uzdužni pomak konzole:

$$u(x) = \frac{f_0 x}{EF}\cdot\left(\ell - \frac{x}{2}\right)$$

Svi dobiveni izrazi se dakako poklapaju s izrazima dobivenim pomoću integralnog postupka.

HWPK-85-461