

Pokušaji poopćenja verižnoga poligona i ponešto još...

Poznate činjenice

- (1) Silu u prostoru možemo rastaviti u dvije komponente na zadanim pravcima (ako i samo) ako su ti pravci i pravac njezina djelovanja konkurentni i koplanarni (sijeku se u jednoj točki i u jednoj su ravnini).
- (2) Pri sastavljanju verižnoga poligona dvije sile rastavljamo u po dvije komponente tako da jedna komponenta jedne sile poništi jednu komponentu druge sile. Te dvije komponente moraju djelovati na istom pravcu, imati jednake intenzitete i suprotan smisao djelovanja.

Zamjena triju mimosmjernih sila dvjema mimosmjernim silama

Tri ćemo zadane sile označiti sa $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ i $\vec{S}_3$, a pravce na kojima djeluju sa s_1 , s_2 i s_3 .

Na pravcima s_1 i s_2 odabiremo točke A_1 i A_2 te ih spajamo pravcem $s_{1,2}$. Pravcima s_1 i $s_{1,2}$ postavljamo ravninu σ_1 , a pravcima s_2 i $s_{1,2}$ ravninu σ_2 ; pravac $s_{1,2}$ presječna je ravnina σ_1 i σ_2 . U tim ćemo ravninama sile $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ rastaviti u po dvije komponente, $\vec{S}_1 = \vec{S}_{1,1} + \vec{S}_{1,2}$ i $\vec{S}_2 = \vec{S}_{2,1} + \vec{S}_{2,2}$, pri čemu ćemo po jednu komponentu svake sile, komponente $\vec{S}_{1,2}$ i $\vec{S}_{2,1}$, uzeti na pravcu $s_{1,2}$.

Točkom A_2 i pravcem s_3 postavljamo ravninu σ_3 . Presječna $s_{2,3}$ ravnina σ_2 i σ_3 spojnica je točke A_2 i probodišta A_3 pravca s_3 i ravnine σ_2 . Na pravcu $s_{2,3}$ ležat će komponenta $\vec{S}_{2,2}$ (zvat ćemo je $\vec{S}_{2,3}$) sile $\vec{S}_2$ i komponenta $\vec{S}_{3,2}$ sile $\vec{S}_3$.

Dakle, silu $\vec{S}_2$ smo rastavili u komponente $\vec{S}_{2,1}$ i $\vec{S}_{2,3}$ na pravcima $s_{1,2}$ i $s_{2,3}$. (Pravci $s_{1,2}$ i $s_{2,3}$ presječnice su ravnine σ_2 s ravninama σ_1 i σ_3 , pa leže u ravnini σ_2 , a u njoj je i pravac s_2 na kojem djeluje sila $\vec{S}_2$. Sva se tri pravca sijeku u točki A_2 .)

Nakon rastava sile $\vec{S}_2$ određene su jedna komponenta rastava sile $\vec{S}_1$, $\vec{S}_{1,2} = -\vec{S}_{2,1}$, i jedna komponenta rastava sile $\vec{S}_3$, $\vec{S}_{3,2} = -\vec{S}_{2,3}$. Komponenta $\vec{S}_{1,2}$ na pravcu je $s_{1,2}$, pa stoga i u ravnini σ_1 , u kojoj sada možemo odrediti i drugu komponentu sile $\vec{S}_1$: $\vec{S}_{1,1} = \vec{S}_1 - \vec{S}_{1,2}$. Komponentu $\vec{S}_{3,3}$ sile $\vec{S}_3$, koju rastavljamo u ravnini σ_3 , određujemo na sličan način.

Budući da smo »verižni poligon« sastavili tako da se sile $\vec{S}_{1,2}$ i $\vec{S}_{2,1}$ i sile $\vec{S}_{2,3}$ i $\vec{S}_{3,2}$ međusobno poništavaju, preostale su sile $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{3,3}$. Drugim riječima, sile $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ i $\vec{S}_3$ zamijenili smo silama $\vec{R}_1 = \vec{S}_{1,1}$ i $\vec{R}_2 = \vec{S}_{3,3}$.

»Klasični« postupak kojim sastavljamo verižni poligon u ravnini u općem slučaju ne možemo nastaviti, jer ni pravac djelovanja sile $\vec{S}_{1,1}$ ni pravac djelovanja sile $\vec{S}_{3,3}$ ne sijeku pravac djelovanja neke četvrte sile. Možemo, međutim, neku četvrtu silu pridružiti silama $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{3,3}$ pa te tri sile na opisani način zamijeniti dvjema silama. I tako dalje...

Zamjena sile silom kroz točku i silom u ravnini

Zadanom točkom A i pravcem s djelovanja sile $\vec{S}$ postavljamo ravninu σ . Jedna komponenta sile $\vec{S}$ ležat će na presječnici r ravnine σ i zadane ravnine β , a druga na spojnici p točke A i probodišta P pravca s i ravnine β (to jest, sjecišta pravaca r i s).

Zamjena dviju mimosmjernih sila silom kroz točku i silom u ravnini

Prvi način. Svaka se sila zasebice zamjenjuje silom kroz točku i silom u ravnini te se nalaze rezultanta sila u točki i rezultanta sila u ravnini.

Drugi način. Pravce djelovanja sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ označit ćemo, kao i prije, sa s_1 i s_2 .

Zadanom točkom A i pravcem s_1 postavljamo ravninu σ_1 . Probodište A_2 pravca s_2 i ravnine σ_1 pravcem $s_{1,2}$ spajamo s odabranom točkom A_1 pravca s_1 . Na pravcu $s_{1,2}$ ležat će komponenta $\vec{S}_{1,2}$ sile $\vec{S}_1$ i komponenta $\vec{S}_{2,1}$ sile $\vec{S}_2$. Druga komponenta sile $\vec{S}_1$, $\vec{S}_{1,1}$, ležat će na spojnici p_1 točaka A i A_1 . Nakon rastava sile $\vec{S}_1$ rastavljamo silu $\vec{S}_2$ u ravnini σ_2 , postavljenoj pravcima s_2 i $s_{1,2}$, uzevši pritom da je jedna njezina komponenta $\vec{S}_{2,1} = -\vec{S}_{1,2}$. Time smo sile $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ zamijenili silama $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{2,2}$.

Pravac p_1 , na kojem djeluje sila $\vec{S}_{1,1}$, prolazi zadanom točkom A . Pravac $s_{2,2}$, na kojem djeluje sila $\vec{S}_{2,2}$, probada zadanu ravninu β u točki B . Spojnica točaka A i B pravac je p_2 .

Pravcima $s_{2,2}$ i p_2 postavljamo ravninu $\sigma_{2,2}$. Ravnine $\sigma_{2,2}$ i β sijeku se u pravcu p_3 . Silu $\vec{S}_{2,2}$ rastavljamo u komponente $\vec{S}_{2,2,1}$ i $\vec{S}_{2,2,2}$ na pravcima p_2 i p_3 . Silu $\vec{S}_{1,1}$ potom u ravnini $\sigma_{1,1}$, određenoj pravcima p_1 i p_2 , rastavljamo u komponente $\vec{S}_{1,1,1}$ i $\vec{S}_{1,1,2}$ tako da je $\vec{S}_{1,1,2} = -\vec{S}_{2,2,1}$.

Na kraju postupka preostaju sila $\vec{R}_1 = \vec{S}_{1,1,1}$, koja prolazi točkom A , i sila $\vec{R}_2 = \vec{S}_{2,2,2}$, koja leži u ravnini β .

Sila $\vec{R}_1$ može se potom rastaviti u tri komponente koje prolaze točkom A , dok se sila $\vec{R}_2$ može rastaviti u tri komponente u ravnini β . Posebno, točka A može biti jedan vrh tetraedra kojem nasuprotna stranica leži u ravnini β .

Dva posebna slučaja

Prvi: točka A neizmjereno je daleka točka pravca a . To znači da par mimosmjernih sila zamjenjujemo silom usporednom s pravcem a i silom u ravnini β .

Ravninu σ_1 , u kojoj silu $\vec{S}_1$ rastavljamo u komponente $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{1,2}$, postavljamo sada pravcem s_1 i pravcem p_1 koji odabranom točkom A_1 pravca s_1 prolazi usporedno s pravcem a — ta je ravnina, prema tome, usporedna s pravcem a . Ravnina σ_2 , u kojoj silu $\vec{S}_2$ rastavljamo u $\vec{S}_{2,1}$ i $\vec{S}_{2,2}$, određena je, kao i u općem slučaju, pravcem s_2 i spojnicom $s_{1,2}$ točke A_1 i probodišta A_2 pravca s_2 i ravnine σ_1 .

Spojnica p_2 neizmjereno daleke točke A i probodišta B pravca $s_{2,2}$ (na kojem je »preostala« komponenta $\vec{S}_{2,2}$ sile $\vec{S}_2$) i ravnine β u ovom je slučaju usporedna s pravcima a i p_1 (na kojem je »preostala« komponenta $\vec{S}_{1,1}$ sile $\vec{S}_1$).

Kao i prije, silu $\vec{S}_{2,2}$ rastavljamo u komponente $\vec{S}_{2,2,1}$ na pravcu p_2 i $\vec{S}_{2,2,2}$ na presječnici p_3 ravnine β i ravnine $\sigma_{2,2}$ određene pravcima p_2 i $s_{2,2}$.

Silu $\vec{S}_{1,1}$ u komponente rastavljamo u ravnini $\sigma_{1,1}$ određenoj pravcima p_1 i p_2 . Komponenta $\vec{S}_{1,1,2} = -\vec{S}_{2,2,1}$ na pravcu je p_2 koji je usporedan s pravcem p_1 na kojem djeluje sila $\vec{S}_{1,1}$, pa će i komponenta $\vec{S}_{1,1,1}$ biti na pravcu usporednom s tim pravcem. Pravac djelovanja sile $\vec{S}_{1,1,1}$ možemo odrediti pomoću klasičnoga ravninskog verižnog poligona (u ravnini $\sigma_{1,1}$).

Pravac djelovanja sile $\vec{S}_{1,1,1} = \vec{R}_1$ usporedan je s pravcem p_1 , a time i s pravcem a . Druga preostala sila $\vec{S}_{2,2,2} = \vec{R}_2$ leži u ravnini β .

Drugi slučaj: ravnina β neizmjereno je daleka ravnina prostora. Prvi koraci, zamjena sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ silama $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{2,2}$, isto su kao u općem slučaju.

Probodište B pravca $s_{2,2}$, na kojem djeluje sila $\vec{S}_{2,2}$, i neizmjereno daleke ravnine β neizmjereno je daleka točka toga pravca, pa će spojnica p_2 točaka A i B , na kojoj je komponenta $\vec{S}_{2,2,1}$ sile $\vec{S}_{2,2}$, biti s njim usporedna. Budući da je p_3 presječna ravnina $\sigma_{2,2}$ i neizmjereno daleke ravnine β , bit će to neizmjereno daleki pravac, pa će i komponenta $\vec{S}_{2,2,2}$ sile $\vec{S}_{2,2}$ biti neizmjereno daleko. Takvu silu na crtežu ne možemo neposredno prikazati. Međutim, iz $\vec{S}_{2,2} = \vec{S}_{2,2,1} + \vec{S}_{2,2,2}$ slijedi $\vec{S}_{2,2,2} = \vec{S}_{2,2} - \vec{S}_{2,2,1}$, a kako sile $\vec{S}_{2,2}$ i $-\vec{S}_{2,2,1}$ djeluju na usporednim pravcima i kako su jednakih indentiziteta, a suprotna smisla djelovanja, tvore spreg sila. Silu na neizmjereno daleku pravcu možemo, prema tome, prikazati spregom sila.

Uzmemo li, kao i u općem slučaju, da je $\vec{S}_{1,1,2} = -\vec{S}_{2,2,1}$, slijedi da u ovom posebnom slučaju sile $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ možemo zamijeniti silom $\vec{R}_1 = \vec{S}_{1,1,1}$ i spregom $(\vec{S}_{1,1,2}, \vec{S}_{2,2})$.

Zamjena dviju mimosmjernih sila dvjema silama, od kojih je jedna na zadanu pravcu

Zadani ćemo pravac označiti sa s_0 , a pravce djelovanja sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ sa s_1 i s_2 .

Na pravcima s_1 i s_2 odabiremo točke A_1 i A_2 te ih spajamo pravcem $s_{1,2}$. Točkom A_1 i pravcem s_0 postavljamo ravninu σ_0 , pravcima s_1 i $s_{1,2}$ ravninu σ_1 , a pravcima s_2 i $s_{1,2}$ ravninu σ_2 . Presječna ravnina σ_0 i σ_1 pravac je $s_{0,1}$.

(Drugi mogući redoslijed početka: Na pravcima s_0 i s_1 odabiremo točke A_0 i A_1 te ih spajamo pravcem $s_{0,1}$. Pravcima s_0 i $s_{0,1}$ postavljamo ravninu σ_0 , pravcima s_1 i $s_{0,1}$ ravninu σ_1 , a točkom A_1 i pravcem s_2 ravninu σ_2 . Presječna ravnina σ_1 i σ_2 pravac je $s_{1,2}$.)

Silu $\vec{S}_1$ rastavljamo u komponente $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{1,2}$ na pravcima $s_{0,1}$ i $s_{1,2}$. Uzmemo li da je $\vec{S}_{2,1} = -\vec{S}_{1,2}$, određena je i komponenta $\vec{S}_{2,2}$ sile $\vec{S}_2$ (u ravnini σ_2). Time smo sile $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ zamijenili silama $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{2,2}$.

Pravac $s_{0,1}$, na kojem djeluje sila $\vec{S}_{1,1}$, siječe zadani pravac s_0 u točki A_0 . Točkom A_0 i pravcem $s_{2,2}$, na kojem djeluje sila $\vec{S}_{2,2}$, postavljamo ravninu σ_3 . Presječna ravnina σ_0 i σ_3 pravac je $s_{0,3}$.

Pravci s_0 , $s_{0,1}$ i $s_{0,3}$ u ravnini su σ_0 . Stoga je sila $\vec{R}_1$ na zadanom pravcu s_0 određena uvjetima da je jedna njezina komponenta sila $\vec{R}_{1,1} = \vec{S}_{1,1}$ (na pravcu $s_{0,1}$) i da druga njezina komponenta, $\vec{R}_{1,2}$, djeluje na pravcu $s_{0,3}$. (Tim je uvjetima, naravno, određena i sila $\vec{R}_{1,2}$.) Sila $\vec{R}_2$ rezultanta je sila $\vec{R}_{2,1} = -\vec{R}_{1,2}$ i $\vec{S}_{2,2}$. Kako te dvije sile djeluju na pravcima $s_{2,2}$ i $s_{0,3}$ koji leže u ravnini σ_3 , u toj je ravnini i sila $\vec{R}_2$.

Rastavljanje sile na izvodnici jednokrillnoga hiperboloida ili hiperboličkoga paraboloida u sile na tri izvodnice istoga sistema

Pravac djelovanja zadane sile $\vec{S}$ označit ćemo sa s , a ostala tri pravca sa s_1 , s_2 i s_3 .

Budući da su pravci djelovanja svih sila poznati/zadani, rastavljanje provodimo u poligonu sila. Početnom i krajnjom točkom sile $\vec{S}$ postavljamo pravce s_1 i s_3 usporedne s pravcima s_1 i s_3 u planu položaja.

Svakom se točkom prostora može postaviti transversala dvaju mimosmjernih pravaca. To, dakako, vrijedi i za neizmjerne daleke točke, što znači da se može naći transversala dvaju pravaca koja je usporedna s trećim mimosmjernim pravcem. Dakle, prostorni poligon sila možemo zatvoriti pravcem s_2 usporednim s istoimenim pravcem plana položaja. Stranicama poligona sila na pravcima s_1 , s_2 i s_3 određene su sile $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ i $\vec{S}_3$ koje djeluju na pravcima s_1 , s_2 i s_3 u planu položaja.

Konstrukcija transversale mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 usporedne s pravcem p_3 :

Pravcima p_1 i p_2 postavljamo ravnine σ_1 i σ_2 usporedne s pravcem p_3 (ravina je usporedna s pravcem ako sadrži pravac s njim). Tražena transversala presječna je ravina σ_1 i σ_2 .