

Plücker & Grassmann

Točka

U euklidskom prostoru ima ∞^3 točaka, pa je položaj točke određen s tri Kartezijeve koordinate:

$$X = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

U linearnoj algebri točku poistovjećujemo s njezinim vektorom položaja (ili radijvektorom, koji također ima tri komponente¹)

$$\vec{r}_X = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \vec{x}.$$

U projektivnom prostoru točku opisujemo četirima homogenim koordinatama,

$$\mathcal{X} = (w : x : y : z),$$

ali je

$$(w : x : y : z) \equiv \left(1 : \frac{x}{w} : \frac{y}{w} : \frac{z}{w}\right) \equiv (1 : \bar{x} : \bar{y} : \bar{z})$$

ako je $w \neq 0$. U projektivnom su proširenju euklidskoga prostora onda $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ Kartezijeve koordinate točke. Ako je pak $w = 0$, onda je

$$\mathcal{X}_\infty = \mathcal{V}_\infty = (0 : x : y : z) \equiv (0 : mx : my : mz), \quad m \neq 0,$$

neizmjerne daleka točka pravaca usporednih s euklidskim vektorom $\vec{v} = (x, y, z)$. Budući da ∞ nizova četiriju koordinata određuje položaj iste točke, četvrtom je koordinatom dodano »samo« ∞^2 neizmjerne dalekih točaka, te je broj točaka u projektivnom prostoru također ∞^3 ($\infty^4/\infty = \infty^3$, $\infty^3 + \infty^2 = \infty^3$). Četvorka $(0 : 0 : 0 : 0)$ ne označava točku, štoviše, ta četvorka ne označava ništa; koordinate su ishodišta $(1 : 0 : 0 : 0)$, dok su koordinate neizmjerne dalekih točaka na osima x, y i z $(0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$ i $(0 : 0 : 0 : 1)$.

Možemo uzeti i da su četiri broja u $(0 : x : y : z)$ homogene komponente euklidskoga vektora $\vec{v} = (x, y, z)$. Tada, međutim, $(0 : x : y : z)$ i $(0 : mx : my : mz)$ za $m \neq 1$ nisu zapisi istoga vektora, nego je $m\vec{v}$ homogeni zapis (euklidskoga) vektora $m\vec{v}$. Za razliku od neizmjerne dalekih točaka, vektora u prostoru ima ∞^3 .

Zlorabeći pomalo način bilježenja pisat ćemo i $\mathcal{X} = (w : \vec{x})$, gdje je $\vec{x} = (x, y, z)$ i gdje može biti $w = 0$ (pa je tada $\mathcal{X} = \mathcal{V}_\infty$). Takav će nam zapis omogućiti primjenu »klasičnih« linearnoalgebarskih operacija.

Pravac kao spojnica dviju točaka

Homogene koordinate zadanih točaka $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ zapisat ćemo kao komponente redaka matrice f :

$$f = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix};$$

¹ Vektore $\bar{x}\vec{i}, \bar{y}\vec{j}, \bar{z}\vec{k}$ nazivamo vektorskim, a brojeve $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ skalarnim komponentama vektora.

ta je matrica jedan od zapisa pravca f koji prolazi točkama $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$. Plückerove koordinate pravca f determinante su drugoga reda kojima su stupci po dva stupca te matrice. Ako su indeksi stupaca matrice 0, 1, 2 i 3 i ako determinantu kojoj su stupci stupci i i j matrice označimo s $f_{i,j}$, bit će

$$\begin{aligned} f &= (f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2}) \\ &= \left(\begin{vmatrix} w_1 & x_1 \\ w_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w_1 & y_1 \\ w_2 & y_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (w_1 x_2 - w_2 x_1 : w_1 y_2 - w_2 y_1 : w_1 z_2 - w_2 z_1 \\ &\quad : y_1 z_2 - y_2 z_1 : z_1 x_2 - z_2 x_1 : x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

Ako su $\mathcal{X}_1 = (w_1 : \vec{x}_1)$ i $\mathcal{X}_2 = (w_2 : \vec{x}_2)$, onda je, sažeto,

$$f = (w_1 \vec{x}_2 - w_2 \vec{x}_1 : \vec{x}_1 \times \vec{x}_2) = (\vec{f} : \vec{f}_{m/o}).$$

Iako je Plückerovih koordinata pravca šest, pravaca u prostoru ima ∞^4 . (Točaka ima ∞^3 . Svakom točkom prolazi ∞^2 pravaca: $\infty^3 \cdot \infty^2 = \infty^5$. Međutim, svaki pravac prolazi kroz ∞ točaka, te je broj pravaca $\infty^5/\infty = \infty^4$.) Budući da su $(w : x : y : z)$ i $(mw : mx : my : mz)$ homogeni koordinatni zapisi iste točke,

$$\begin{aligned} f &= (f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2}) \\ &= (mf_{0,1} : mf_{0,2} : mf_{0,3} : mf_{2,3} : mf_{3,1} : mf_{1,2}) \\ &= m(f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2}) = mf, \end{aligned}$$

što znači da su Plückerove koordinate pravca homogene ($\infty^6/\infty = \infty^5$).

Uvrštavanjem se može pokazati da je

$$f_{0,1} f_{2,3} + f_{0,2} f_{3,1} + f_{0,3} f_{1,2} = 0.$$

Šest »slučajno« odabranih brojeva svrstanih u koordinatni zapis $(a : b : c : d : e : f)$ bit će Plückerove koordinate nekoga pravca (ako i) samo ako zadovoljavaju Plückerovu jednakost

$$ad + be + cf = 0.$$

Tim se uvjetom, uz uvjet homogenosti, broj neovisnih koordinata pravca svodi na četiri, te je broj Plückerovim koordinatama odredivih pravaca jednak broju pravaca u prostoru, ∞^4 .

Sila

Ako je $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ vektor sile $\vec{\mathcal{F}}$ koja djeluje u točki $X = (x, y, z)$, onda je

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}} &= \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \\ &= (1 \cdot F_x : 1 \cdot F_y : 1 \cdot F_z : yF_z - zF_y : zF_x - xF_z : xF_y - yF_x) \\ &= (F_x : F_y : F_z : M_x : M_y : M_z). \end{aligned}$$

Tako izračunanih šest koordinata nazvat ćemo Plückerovim koordinatama sile. Prve su tri Plückerove koordinate skalarne komponente vektora sile $\vec{F}$, dok su druge tri koordinate vrijednosti momenata sile oko osi x , y i z .

Ako je $\vec{F}_n = n\vec{F} = (nF_x, nF_y, nF_z)$ vektor sile $\vec{F}_n$ koja djeluje u istoj točki, onda je

$$\begin{aligned}\vec{F}_n &= \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & nF_x & nF_y & nF_z \end{pmatrix} \\ &= (nF_x : nF_y : nF_z : nM_x : nM_y : nM_z) = n\vec{F}.\end{aligned}$$

Plückerove koordinate sile ujedno su i Plückerove koordinate pravca njezina djelovanja. No, dok su $\vec{F}$ i $n\vec{F}$ Plückerovi koordinatni zapisi istoga pravca, pravca djelovanja sile $\vec{F}$ i $n\vec{F}$, sile se, dakako, razlikuju ako $n \neq 1$. Na pravcu ima ∞ sila, pa je broj sila u prostoru $\infty^4 \cdot \infty = \infty^5$.

Homogene su koordinate neizmjenjerno daleke točke pravca f i probodišta toga pravca s koordinatnim ravninama yz (ili $x = 0$), zx (ili $y = 0$) i xy (ili $z = 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\infty &= (0 : f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3}), \\ \mathcal{F}_{yz} &= (-f_{0,1} : 0 : f_{1,2} : -f_{3,1}), \\ \mathcal{F}_{zx} &= (-f_{0,2} : -f_{1,2} : 0 : f_{2,3}), \\ \mathcal{F}_{xy} &= (-f_{0,3} : f_{3,1} : -f_{2,3} : 0).\end{aligned}$$

Ako je f pravac djelovanja sile $\vec{F}$, onda su

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\infty &= (0 : F_x : F_y : F_z), \\ \mathcal{F}_{yz} &= (-F_x : 0 : M_z : -M_y) = \left(1 : 0 : -\frac{M_z}{F_x} : \frac{M_y}{F_x} \right), \\ \mathcal{F}_{zx} &= (-F_y : -M_z : 0 : M_x) = \left(1 : \frac{M_z}{F_y} : 0 : -\frac{M_x}{F_y} \right), \\ \mathcal{F}_{xy} &= (-F_z : M_y : -M_x : 0) = \left(1 : -\frac{M_y}{F_z} : \frac{M_x}{F_z} : 0 \right).\end{aligned}$$

Ravnina određena trima točkama ili točkom i pravcem

Implicitna je jednadžba ravnine u euklidskom prostoru, izražena u Kartezijevu koordinatnom sustavu,

$$d + a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} = 0.$$

Množenje s w ,

$$dw + aw\bar{x} + bw\bar{y} + cw\bar{z} = 0,$$

daje homogenu jednadžbu te ravnine u projektivnom prostoru:

$$dw + ax + by + cz = 0.$$

U drugi, treći i četvrti redak determinante četvrtoga reda upisat ćemo homogene koordinate zadanih točaka X_1 , X_2 i X_3 , a u prvi redak koordinate varijabilne točke X . Determinantu ćemo razviti po prvome retku:

$$\begin{vmatrix} w & x & y & z \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = w \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\
+ y \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Izraz dobiven izjednačavanjem razvoja s nulom ima oblik jednadžbe ravnine,

$$w \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\
+ y \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

pa je, sažeto zapisana, jednadžba ravnine određene trima točkama

$$\begin{vmatrix} w & x & y & z \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Koeficijente a , b , c i d u jednadžbi ravnine možemo smatrati (homogenim) koordinatama ravnine i uvesti koordinatni zapis ravnine (analogan koordinatnom zapisu točke):

$$\boldsymbol{\alpha} = (d : a : b : c) = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \\
= \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right. \\
\begin{matrix} [1,2,3] & [0,2,3] \\ (0) & (1) \end{matrix} \\
\left. : \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) \\
\begin{matrix} [0,1,3] & [0,1,2] \\ (2) & (3) \end{matrix}$$

Determinante trećega reda u koordinatnom zapisu ravnine (koordinate ravnine) razvit ćemo po prvim redcima:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left(x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right. \\
&\quad : - \left[w_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} w_2 & z_2 \\ w_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} w_2 & y_2 \\ w_3 & y_3 \end{vmatrix} \right] \\
&\quad : w_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} w_2 & z_2 \\ w_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} w_2 & x_2 \\ w_3 & x_3 \end{vmatrix} \\
&\quad \left. : - \left[w_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} w_2 & y_2 \\ w_3 & y_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} w_2 & x_2 \\ w_3 & x_3 \end{vmatrix} \right] \right).
\end{aligned}$$

Determinante drugoga reda koordinate su pravca $f_{(2,3)}$ određenoga točkama $\mathcal{X}_2$ i $\mathcal{X}_3$, pa je

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left(x_1 f_{2,3}^{(2,3)} - y_1 f_{1,3}^{(2,3)} + z_1 f_{1,2}^{(2,3)} : -[w_1 f_{2,3}^{(2,3)} - y_1 f_{0,3}^{(2,3)} + z_1 f_{0,2}^{(2,3)}] \right. \\
&\quad : w_1 f_{1,3}^{(2,3)} - x_1 f_{0,3}^{(2,3)} + z_1 f_{0,1}^{(2,3)} : -[w_1 f_{1,2}^{(2,3)} - x_1 f_{0,2}^{(2,3)} + y_1 f_{0,1}^{(2,3)}] \left. \right) \\
&= \left(x_1 f_{2,3}^{(2,3)} + y_1 f_{3,1}^{(2,3)} + z_1 f_{1,2}^{(2,3)} : -w_1 f_{2,3}^{(2,3)} + y_1 f_{0,3}^{(2,3)} - z_1 f_{0,2}^{(2,3)} \right. \\
&\quad : -w_1 f_{3,1}^{(2,3)} + z_1 f_{0,1}^{(2,3)} - x_1 f_{0,3}^{(2,3)} : -w_1 f_{1,2}^{(2,3)} + x_1 f_{0,2}^{(2,3)} - y_1 f_{0,1}^{(2,3)} \left. \right).
\end{aligned}$$

Ako su $\mathcal{X}_1 = (w_1 : \vec{x}_1)$ i $f_{(2,3)} = (\vec{f}_{(2,3)} : \vec{f}_{m/o}^{(2,3)})$, onda je, sažeto,

$$\alpha = (\vec{x}_1 \cdot \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} : -w_1 \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} + \vec{x}_1 \times \vec{f}_{(2,3)}).$$

Koordinate a, b i c skalarne su komponente vektora okomitoga na ravninu α , pa možemo sažetije pisati

$$\alpha = (d : a : b : c) = (d : \vec{n}_\alpha).$$

Točka $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (w : x : y : z)$ leži u ravnini $(d : a : b : c)$, a možemo reći i da ravnina $(d : a : b : c)$ prolazi točkom $(w : x : y : z)$, ako koordinate točke zadovoljavaju jednadžbu ravnine:

$$d + a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} = 0 \quad (\text{Kartezijeve koordinate}),$$

$$dw + ax + by + cz = 0 \quad (\text{homogene koordinate}^2),$$

$$dw + \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x} = 0 \quad (\text{sažetiji linearnoalgebarski zapis}).$$

Točka $\mathcal{X} = (w : x : y : z)$ leži na pravcu $f = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ ili pravac f prolazi

točkom $\mathcal{X}$ ako tom točkom i tim pravcem nije određena ravnina³:

² ... ili, dualno, ako koordinate ravnine zadovoljavaju jednadžbu točke.

³ Ako je točka $\mathcal{X}$ točka pravca f , kao odredbeni element ostaje samo pravac, a on je nosilac pramena ravnina (u kojoj ima ∞ ravnina).

$$\begin{pmatrix} w & x & y & z \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = (0 : 0 : 0 : 0),^4$$

ili, ako je pravac zadan Plückerovim koordinatama,

$$\begin{pmatrix} x f_{2,3} + y f_{3,1} + z f_{1,2} : -w f_{2,3} + y f_{0,3} - z f_{0,2} \\ -w f_{3,1} + z f_{0,1} - x f_{0,3} : -w f_{1,2} + x f_{0,2} - y f_{0,1} \end{pmatrix} = (0 : 0 : 0 : 0),$$

ili, sažetije,

$$= (\vec{x} \cdot \vec{f}_{m/O} : -w \vec{f}_{m/O} + \vec{x} \times \vec{f}) = (0 : \vec{0}).$$

Pravac kao presječnica dviju ravnina

Dualni postupak zadavanju pravca kao spojnice dviju točaka zadavanje je pravca kao presječnice ravnina α_1 i α_2 :

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (\bar{f}_{0,1} : \bar{f}_{0,2} : \bar{f}_{0,3} : \bar{f}_{2,3} : \bar{f}_{3,1} : \bar{f}_{1,2}); \end{aligned}$$

dualne je koordinate Plücker nazvao osnim koordinatama⁵.

Linearnoalgebarski zapis

$$\bar{f} = (d_1 \vec{n}_{\alpha_2} - d_2 \vec{n}_{\alpha_1} : \vec{n}_{\alpha_1} \times \vec{n}_{\alpha_2})$$

pokazuje da su koordinate $\bar{f}_{2,3}$, $\bar{f}_{3,1}$, $\bar{f}_{1,2}$ komponente vektora koji je okomit na vektore normala $\vec{n}_{\alpha_1}$ i $\vec{n}_{\alpha_2}$ ravnina α_1 i α_2 , pa je taj vektor vektor smjera pravca f . Može se vidjeti i da su koordinate $\bar{f}_{0,1}$, $\bar{f}_{0,2}$, $\bar{f}_{0,3}$ komponente vektora koji je usporedan s ravninom usporednom s vektorima normala, što znači da je okomit na vektor smjera, pa se može naslutiti da taj vektor ima ulogu momenta pravca u odnosu na ishodište.

Veza je osnih i »običnih« koordinata pravca

$$\begin{aligned} f &= (\bar{f}_{2,3} : \bar{f}_{3,1} : \bar{f}_{1,2} : \bar{f}_{0,1} : \bar{f}_{0,2} : \bar{f}_{0,3}) \\ &= (f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2}). \end{aligned}$$

Koordinate su ravnine određene pravcem i ishodištem i ravnina kroz pravac okomitih na koordinatne ravnine

$$\alpha_0 = (0 : \bar{f}_{0,1} : \bar{f}_{0,2} : \bar{f}_{0,3}) = (0 : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2}),$$

⁴ Kao što ne postoji točka s koordinatama $(0 : 0 : 0 : 0)$, ne postoji ni ravnina s tim koordinatama. Koordinate su neizmjereno daleke ravnine $(1 : 0 : 0 : 0)$, dok su koordinate koordinatnih ravnina yz , zx i xy $(0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$ i $(0 : 0 : 0 : 1)$.

⁵ »Obične« koordinate pravca, uvedene na stranici 2, Plücker je nazvao koordinatama zrake. Riječ je o kinematičkoj metafori/analogiji: pravac kao presječnica dviju ravnina os je rotacije koja jednu ravninu prevodi u drugu, dok je pravac kao spojnica dviju točaka zraka koja jednu točku prenosi u drugu.

$$\begin{aligned}
\alpha_{\perp yz} &= (-\bar{f}_{0,1} : 0 : \bar{f}_{1,2} : -\bar{f}_{3,1}) = (-f_{2,3} : 0 : f_{0,3} : -f_{0,2}), \\
\alpha_{\perp zx} &= (-\bar{f}_{0,2} : -\bar{f}_{1,2} : 0 : \bar{f}_{2,3}) = (-f_{3,1} : -f_{0,3} : 0 : f_{0,1}), \\
\alpha_{\perp xy} &= (-\bar{f}_{0,3} : \bar{f}_{3,1} : -\bar{f}_{2,3} : 0) = (-f_{1,2} : f_{0,2} : -f_{0,1} : 0).
\end{aligned}$$

Točka kao sjecište triju ravnina ili kao probodište pravca i ravnine

U homogenoj jednadžbi

$$dw + ax + by + cz = 0$$

četvorke su brojeva w, x, y, z i d, a, b, c »ravnopravne«. Uzmemo li da su w, x, y, z varijable, a d, a, b, c konstante, to je jednadžba ravnine: točke, koordinate w, x, y, z kojih zadovoljavaju tu jednadžbu, leže u ravnini kojoj su koordinate d, a, b, c . Možemo, međutim, uzeti i da su w, x, y, z konstante, a d, a, b, c varijable; tada dobivamo jednadžbu točke: ravnine, kojima koordinate d, a, b, c zadovoljavaju tu jednadžbu, prolaze točkom koordinate koje su w, x, y, z .

Izjednačimo li s nulom determinantu četvrtoga reda kojoj su komponente prvoga retka koordinate varijabilne ravnine α , a komponente drugoga, trećeg i četvrtog retka koordinate zadanih ravnina α_1, α_2 i α_3 , dobit ćemo jednadžbu točke $\mathcal{X}$ u kojoj se te tri zadane ravnine sijeku:

$$\begin{vmatrix} d & a & b & c \\ d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Razvoj determinante po prvome retku,

$$\begin{aligned}
d \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
+ b \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

pokazuje da su dobivene detemernante trećega reda, s odgovarajućim predznacima, koordinate točke $\mathcal{X}$ u kojoj se sijeku ravnine α_1, α_2 i α_3 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} = (w : x : y : z) &= \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} [1,2,3] \\ (0) \end{matrix} & \begin{matrix} [0,2,3] \\ (1) \end{matrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$: \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \Bigg) .$$

$\begin{matrix} [0,1,3] \\ (2) \end{matrix}$
 $\begin{matrix} [0,1,2] \\ (3) \end{matrix}$

Nastavimo li s razvojem determinanata,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = & \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right. \\ & : -d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ & : -d_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ & \left. : -d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix} \right) , \end{aligned}$$

u dobivenim determinantama drugoga reda možemo prepoznati koordinate, osne ili »obične«, pravca u kojem se sijeku ravnine α_2 i α_3 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = & \left(a_1 \bar{f}_{2,3}^{(2,3)} + b_1 \bar{f}_{3,1}^{(2,3)} + c_1 \bar{f}_{1,2}^{(2,3)} : -d_1 \bar{f}_{2,3}^{(2,3)} + b_1 \bar{f}_{0,3}^{(2,3)} - c_1 \bar{f}_{0,2}^{(2,3)} \right. \\ & : -d_1 \bar{f}_{3,1}^{(2,3)} + c_1 \bar{f}_{0,1}^{(2,3)} - a_1 \bar{f}_{0,3}^{(2,3)} : -d_1 \bar{f}_{1,2}^{(2,3)} + a_1 \bar{f}_{0,2}^{(2,3)} - b_1 \bar{f}_{0,1}^{(2,3)} \Big) \\ = & \left(a_1 f_{0,1}^{(2,3)} + b_1 f_{0,2}^{(2,3)} + c_1 f_{0,3}^{(2,3)} : -d_1 f_{0,1}^{(2,3)} + b_1 f_{1,2}^{(2,3)} - c_1 f_{3,1}^{(2,3)} \right. \\ & : -d_1 f_{0,2}^{(2,3)} + c_1 f_{2,3}^{(2,3)} - a_1 f_{1,2}^{(2,3)} : -d_1 f_{0,3}^{(2,3)} + a_1 f_{3,1}^{(2,3)} - b_1 f_{2,3}^{(2,3)} \Big) \end{aligned}$$

ili, u sažetijem linearnoalgebarskom zapisu,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = & \left(\vec{n}_{\alpha_1} \cdot \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} : -d_1 \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} + \vec{n}_{\alpha_1} \times \vec{f}_{(2,3)} \right) = (w : \vec{x}) \\ = & \left(\vec{n}_{\alpha_1} \cdot \vec{f}_{(2,3)} : -d_1 \vec{f}_{(2,3)} + \vec{n}_{\alpha_1} \times \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} \right) = (w : \vec{x}). \end{aligned}$$

Pravac

$$f = (\bar{f}_{2,3} : \bar{f}_{3,1} : \bar{f}_{1,2} : \bar{f}_{0,1} : \bar{f}_{0,2} : \bar{f}_{0,3}) = (f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2})$$

leži u ravnini $\alpha = (d : a : b : c)$ ili ravnina α prolazi pravcem f ako probodište toga pravca i te ravnine nije određeno⁶:

$$\begin{aligned} & (a \bar{f}_{2,3} + b \bar{f}_{3,1} + c \bar{f}_{1,2} : -d \bar{f}_{2,3} + b \bar{f}_{0,3} - c \bar{f}_{0,2} \\ & : -d \bar{f}_{3,1} + c \bar{f}_{0,1} - a \bar{f}_{0,3} : -d \bar{f}_{1,2} + a \bar{f}_{0,2} - b \bar{f}_{0,1}) \\ & = (0 : 0 : 0 : 0) \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} & (a f_{0,1} + b f_{0,2} + c f_{0,3} : -d f_{0,1} + b f_{1,2} - c f_{3,1} \\ & : -d f_{0,2} + c f_{2,3} - a f_{1,2} : -d f_{0,3} + a f_{3,1} - b f_{2,3}) \\ & = (0 : 0 : 0 : 0) \end{aligned}$$

⁶ Ako pravac leži u ravnini, sve su njegove točke, njih ∞ , »probodišta«.

ili, sažetije,

$$(\vec{n}_\alpha \cdot \vec{f} : -d \vec{f} + \vec{n}_\alpha \times \vec{f}_{m/o}) = (0 : \vec{0}).$$

Moment pravca oko pravca

Moment pravca f oko pravca g definiran je izrazom

$$\begin{aligned} m_{f/g} &= f_{0,1} g_{2,3} + f_{0,2} g_{3,1} + f_{0,3} g_{1,2} + f_{2,3} g_{0,1} + f_{3,1} g_{0,2} + f_{1,2} g_{0,3} \\ &= \vec{f} \cdot \vec{g}_{m/o} + \vec{f}_{m/o} \cdot \vec{g}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\vec{f} \cdot \vec{g}_{m/o} + \vec{f}_{m/o} \cdot \vec{g} = \vec{f}_{m/o} \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \vec{g}_{m/o} = \vec{g} \cdot \vec{f}_{m/o} + \vec{g}_{m/o} \cdot \vec{f},$$

istim je izrazom definiran i moment $m_{g/f}$ pravca g oko pravca f .

Izraz za moment pravca oko pravca razmjerno je lako izvesti linearnoalgebraski, uz statičku interpretaciju. Vektor $\vec{f}$ poistovjetit ćemo s vektorom sile $\vec{F}$ koja djeluje na pravcu f , a vektor $\vec{f}_{m/o}$ s vektorom momenta te sile oko ishodišta. Poznato je da je vektor momenta sile $\vec{F}$ oko neke točke G na pravcu g

$$\vec{f}_{m/G} = \vec{f}_{m/o} + \vec{r}_{o/G} \times \vec{f} = \vec{f}_{m/o} - \vec{r}_G \times \vec{f},$$

gdje je $\vec{r}_{o/G}$ položajni vektor ishodišta O u odnosu na točku G , a $\vec{r}_G = \vec{r}_{G/o} = -\vec{r}_{o/G}$ položajni vektor točke G u odnosu na ishodište, odnosno radijvektor točke G . Orijentirana je duljina ortogonalne projekcije vektora $\vec{f}_{m/G}$ na pravac g , pomnožena duljinom vektora $\vec{g}$,

$$\begin{aligned} \vec{g} \cdot \vec{f}_{m/G} &= \vec{g} \cdot (\vec{f}_{m/o} - \vec{r}_G \times \vec{f}) = \vec{g} \cdot \vec{f}_{m/o} - \vec{g} \cdot (\vec{r}_G \times \vec{f}) \\ &= \vec{g} \cdot \vec{f}_{m/o} - (\vec{g} \times \vec{r}_G) \cdot \vec{f} = \vec{g} \cdot \vec{f}_{m/o} + (\vec{r}_G \times \vec{g}) \cdot \vec{f} \\ &= \vec{g} \cdot \vec{f}_{m/o} + \vec{g}_{m/o} \cdot \vec{f} = \vec{f} \cdot \vec{g}_{m/o} + \vec{f}_{m/o} \cdot \vec{g}. \end{aligned}$$

Pravci f i g se sijeku ako je moment jednoga oko drugog jednak nuli:

$$f_{0,1} g_{2,3} + f_{0,2} g_{3,1} + f_{0,3} g_{1,2} + f_{2,3} g_{0,1} + f_{3,1} g_{0,2} + f_{1,2} g_{0,3} = 0$$

ili, sažeto,

$$\vec{f} \cdot \vec{g}_{m/o} + \vec{f}_{m/o} \cdot \vec{g} = 0.$$

Točka kao sjecište pravaca f i g (ako se ti pravci sijeku)

Postavimo li jednim pravcem neku ravninu, možemo upotrijebiti prijeizvedeni izraz za probodište pravca i ravnine.

Primjerice, ravninu možemo postaviti pravcem f i ishodištem i odrediti probodište pravca g i te ravnine:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= (f_{2,3} g_{0,1} + f_{3,1} g_{0,2} + f_{1,2} g_{0,3} : f_{3,1} g_{1,2} - f_{1,2} g_{3,1} \\ &\quad : f_{1,2} g_{2,3} - f_{2,3} g_{1,2} : f_{2,3} g_{3,1} - f_{3,1} g_{2,3}) \\ &= (\vec{f}_{m/o} \cdot \vec{g} : \vec{f}_{m/o} \times \vec{g}_{m/o}). \end{aligned}$$

Ravninu, naravno, možemo postaviti i pravcem $\mathbf{g}$ i ishodištem te naći probodište pravca $\mathbf{f}$ i te ravnine:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= (g_{2,3} f_{0,1} + g_{3,1} f_{0,2} + g_{1,2} f_{0,3} : g_{3,1} f_{1,2} - g_{1,2} f_{3,1} \\ &\quad : g_{1,2} f_{2,3} - g_{2,3} f_{1,2} : g_{2,3} f_{3,1} - g_{3,1} f_{2,3}) \\ &= (\vec{g}_{m/o} \cdot \vec{f} : \vec{g}_{m/o} \times \vec{f}_{m/o}).\end{aligned}$$

Izvedeni izrazi nisu primjenjivi ako su oba pravca u istoj ravnini kroz ishodište. Tada je $\vec{f}_{m/o} \parallel \vec{g}_{m/o}$, pa je $\vec{f}_{m/o} \times \vec{g}_{m/o} = \vec{0}$. Kako su uvijek $\vec{f}_{m/o} \perp \vec{f}$ i $\vec{g}_{m/o} \perp \vec{g}$, bit će tada i $\vec{g}_{m/o} \perp \vec{f}$ i $\vec{f}_{m/o} \perp \vec{g}$ i, stoga, i $\vec{f}_{m/o} \cdot \vec{g}_{m/o} = \vec{g}_{m/o} \cdot \vec{f}_{m/o} = 0$, pa izrazi daju $(0 : \vec{0}) = (0 : 0 : 0 : 0)$.

Pravcem $\mathbf{g}$ možemo tada postaviti ravninu okomitu na koordinatnu ravninu xy ; probodište je pravca $\mathbf{f}$ i te ravnine

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= (g_{0,2} f_{0,1} - g_{0,1} f_{0,2} : g_{1,2} f_{0,1} - g_{0,1} f_{1,2} \\ &\quad : g_{1,2} f_{0,2} - g_{0,2} f_{1,2} : g_{1,2} f_{0,3} + g_{0,2} f_{3,1} + g_{0,1} f_{2,3}).\end{aligned}$$

No, prolazi li ta ravnina ishodištem i ako je u njoj i pravac $\mathbf{f}$, nemamo sreće.

Postavimo li pravcem $\mathbf{g}$ ravninu okomitu na ravninu zx , probodište je pravca $\mathbf{f}$ i te ravnine

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= (-g_{0,3} f_{0,1} + g_{0,1} f_{0,3} : g_{3,1} f_{0,1} - g_{0,1} f_{3,1} \\ &\quad : g_{3,1} f_{0,2} + g_{0,1} f_{2,3} + g_{0,3} f_{1,2} : g_{3,1} f_{0,3} - g_{0,3} f_{3,1});\end{aligned}$$

postavimo li pak pravcem $\mathbf{g}$ ravninu okomitu na ravninu yz , bit će

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= (g_{0,3} f_{0,2} - g_{0,2} f_{0,3} : g_{2,3} f_{0,1} + g_{0,3} f_{1,2} + g_{0,2} f_{3,1} \\ &\quad : g_{2,3} f_{0,2} + g_{0,2} f_{2,3} : g_{2,3} f_{0,3} - g_{0,3} f_{2,3}).\end{aligned}$$

Ravnina određena pravcima $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ (ako se ti pravci sijeku)

Uzmemo li jedan pravac i neizmjereno daleku točku drugoga, možemo upotrijebiti prijeizvedeni izraz za ravninu određenu točkom i pravcem:

$$\begin{aligned}\alpha &= (f_{0,1} g_{2,3} + f_{0,2} g_{3,1} + f_{0,3} g_{1,2} \\ &\quad : f_{0,2} g_{0,3} - f_{0,3} g_{0,2} : f_{0,3} g_{0,1} - f_{0,1} g_{0,3} : f_{0,1} g_{0,2} - f_{0,2} g_{0,1}) \\ &= (g_{0,1} f_{2,3} + g_{0,2} f_{3,1} + g_{0,3} f_{1,2} \\ &\quad : g_{0,2} f_{0,3} - g_{0,3} f_{0,2} : g_{0,3} f_{0,1} - g_{0,1} f_{0,3} : g_{0,1} f_{0,2} - g_{0,2} f_{0,1}) \\ &= (\vec{f} \cdot \vec{g}_{m/o} : \vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \vec{f}_{m/o} : \vec{g} \times \vec{f}).\end{aligned}$$

Izraz nije primjenjiv ako su pravci $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ usporedni. Tada je $\vec{f} \parallel \vec{g}$ &td.