

GS 1. — 14. listopada 2026.

Zadatak 2.

Na zadanoj prostornoj rešetki označite štapove, uključujući spojeve s podlogom, u kojima su vrijednosti sila različite od nule! Sila $\vec{P}_y$ usporedna je s osi y . Koordinate su čvorova

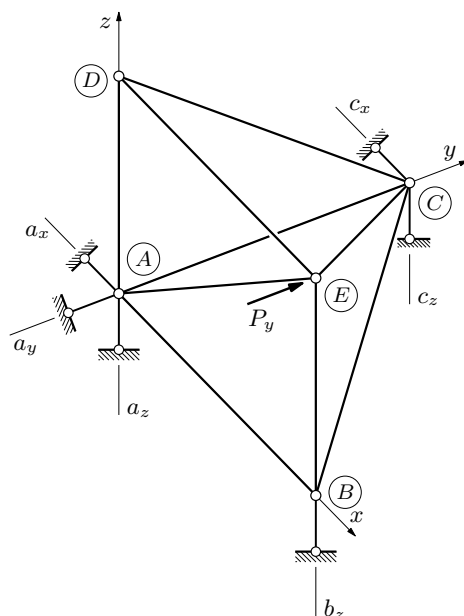
$$A (0, 0, 0),$$

$$B (5, 0, 0),$$

$$C (0, 5, 0),$$

$$D (0, 0, 5),$$

$$E (5, 0, 5).$$



Slika 1.

Način prvi, školski (prvo reakcije, pa od čvora do čvora)

Budući da je os a_y štapa koji čvor A spaja s podlogom i na kojoj djeluje reakcija $\vec{A}_y$ jedina os ležajnih štapova koja nije okomita na os y (u stvari, $a_y = y$) i da je sila $\vec{P}_y$ usporedna s osi y , iz uvjeta ravnoteže projekcija sila na tu os slijedi $A_y = \mp P_y$ (,-' ili ,+' ovisno o pretpostavljenom smislu djelovanja sile $\vec{A}_y$) i, prema tome, što je za nas i naš zadatak važno,

$$A_y \neq 0.$$

Pravac djelovanja reakcije $\vec{A}_y$ os je y , osi $a_x = x$, $a_z = z$, c_x i c_z ležajnih štapova, na kojima djeluju reakcije $\vec{A}_x$, $\vec{A}_z$, $\vec{C}_x$ i $\vec{C}_z$, tu os sijeku, a pravac je djelovanja sile $\vec{P}_y$ usporedan s njom, što znači da je sijeka negdje tamo neizmjereno daleko, pa momenti svih tih sila oko nje iščezavaju. Slijedi da i moment jedine preostale sile, reakcije $\vec{B}_z$, oko te osi mora iščeznuti, a kako je pravac njezina djelovanja ne sijeka, ni ovdje ni tamo negdje neizmjereno daleko, iščeznuti mora ta reakcija. Prema tome,

$$B_z = 0.$$

Pravac djelovanja reakcije $\vec{A}_x$ os je x koju osi ostalih ležajnih štapova, osim osi c_z na kojoj djeluje reakcija $\vec{C}_z$, sijeku ili tu negdje ili tamo negdje neizmjereno daleko. Pravac djelovanja sile $\vec{P}_y$ tu os ne sijeka, pa iz jednadžbe ravnoteže momenata oko nje slijedi

$$C_z \neq 0.$$

Os a_z se poklapa s osi z koju osi ostalih ležajnih štapova, osim osi c_x , sijeku ili tu negdje ili tamo negdje neizmjereno daleko. Kako je pravac djelovanja sile $\vec{P}_y$ ne siječe, iz jednadžbe ravnoteže momenata oko nje slijedi

$$C_x \neq 0.$$

Os c_z osi ostalih ležajnih štapova, osim osi a_x , sijeku ili tu negdje ili tamo negdje neizmjereno daleko. Pravac je djelovanja sile $\vec{P}_y$ ne siječe, pa iz jednadžbe ravnoteže momenata oko nje slijedi

$$A_x \neq 0.$$

Os štap $\{B, C\}$ sijeku osi svih ležajnih štapova osim osi a_z . Kako je ne siječe ni pravac djelovanja sile $\vec{P}_y$, iz jednadžbe ravnoteže momenata oko nje slijedi

$$A_z \neq 0.$$

Prema tome, na kraju, kao sažeti pregled vrijednosti sila u ležajnim štapovima,

$$A_x \neq 0, \quad A_y \neq 0, \quad A_z \neq 0, \quad B_z = 0, \quad C_x \neq 0 \quad \text{i} \quad C_z \neq 0. \quad (\S)$$

U čvorovima D i B sastaju se po tri štap s nepoznatim vrijednostima sila, a u čvorovima E , A i E po četiri. Vrijednosti sila stoga zaslada možemo odrediti samo u čvorovima B i D , pa analizu moramo započeti u jednome od njih.

Budući da na čvor D ne djeluje vanjska sila i da osi triju štapova koji su u taj čvor spojeni ne leže u jednoj ravnini, ravnoteža je čvora moguća samo ako u tim štapovima sila nema. Prema tome,

$$S_{\{A,D\}} = 0 \quad \& \quad S_{\{C,D\}} = 0 \quad \& \quad S_{\{D,E\}} = 0.$$

Budući da je $B_z = 0$ i da su u čvor B priključena još tri štap osi kojih nisu u istoj ravnini, pri čemu se os štap $\{B, E\}$ poklapa s pravcem b_z , bit će

$$S_{\{B,E\}} = 0.$$

Osi se preostalih dvaju štapova ne poklapaju, pa sila u njima ne može biti; prema tome,

$$S_{\{A,B\}} = 0 \quad \& \quad S_{\{B,C\}} = 0.$$

Sila $\vec{P}_y$ djeluje na čvor E . U taj su čvor, osim štapova $\{B, E\}$ i $\{D, E\}$ u kojima, zaključili smo, nema sila, priključeni štapovi $\{A, E\}$ i $\{C, E\}$. Silu $\vec{P}_y$ možemo uravnotežiti silama u štapovima $\{A, E\}$ i $\{C, E\}$ samo ako su osi tih dvaju štapova i pravac djelovanja sile u jednoj su ravnini.¹ A budući da sva tri pravca prolaze jednom točkom, čvorom E , i da sijeku jedan pravac, os štap $\{A, B\}$, u jednoj su ravnini. Kako se pravac djelovanja sile ne poklapa ni s jednom od dvije osi, bit će

$$S_{\{A,E\}} \neq 0 \quad \& \quad S_{\{C,E\}} \neq 0.$$

Od štapova spojenih u čvor C sada je nepoznata samo vrijednost sile u štapu $\{A, C\}$. Osi preostala tri štap nisu u jednoj ravnini, a vrijednosti su sila u njima različite od

¹ Još „posebniji” slučaj, da se pravac djelovanja sile poklapa s jednom od dviju osi, uključen je u ovaj. Tada preostaju dva pravca, a oni su, dakako, u jednoj ravnini.

nule, pa pravac djelovanja rezultante tih sila ne može biti ni u jednoj od triju ravnina koje razapinju parovi njihovih osi. Dakako, taj se pravac mora poklapati s osi $\{A,C\}$ (koja također nije ni u jednoj od spomenutih ravnina). Prema tome,

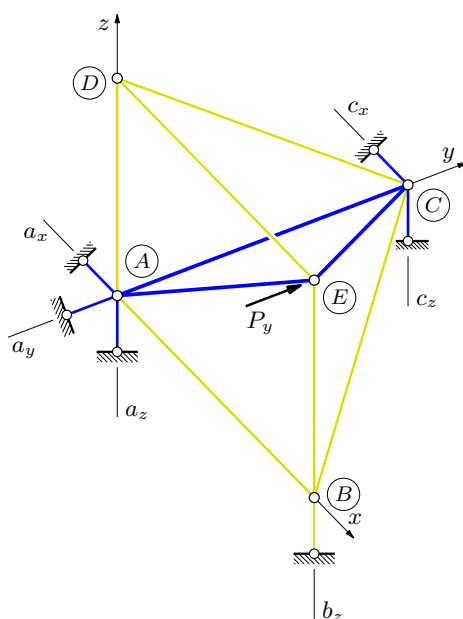
$$S_{\{A,C\}} \neq 0.$$

(Uvjet da se pravac djelovanja rezultante poznatih sila mora poklapati s osi $\{A,C\}$ može poslužiti kao provjera dotadašnjih proračuna ako vrijednosti sila treba izračunati, a ne samo utvrditi njihovo (ne)postojanje.)

I na kraju, kao sažeti pregled vrijednosti sila u „unutarnjim” štapovima,

$$\begin{aligned} S_{\{A,B\}} &= 0, & S_{\{A,C\}} &\neq 0, & S_{\{A,D\}} &= 0, & S_{\{A,E\}} &\neq 0, \\ S_{\{B,C\}} &= 0, & S_{\{B,E\}} &= 0, \\ S_{\{C,D\}} &= 0, & S_{\{C,E\}} &\neq 0, \\ S_{\{D,E\}} &= 0. \end{aligned} \quad (\mathfrak{K})$$

Na slici 2. su, prema $(\mathfrak{K})$ i $(\mathfrak{K}')$, štapovi u kojima su vrijednosti sila različite od nule nacrtani plavom, a štapovi u kojima nema sila žutom bojom.



Slika 2.

Način drugi, školski (recimo) (od čvora do čvora, kao rješavanje Schwedlerove kupole; nije uvijek moguć)

U čvoru D sastaju se tri štapa s nepoznatim vrijednostima sila, u čvorovima B i E po četiri, u čvoru C šest štapova, a u čvoru A sedam. Analizu, prema tome, moramo započeti u čvoru D .

Na čvor D ne djeluje vanjska sila, a osi triju štapova u taj čvor spojenih štapova nisu u jednoj ravnini, pa su

$$S_{\{A,D\}} = 0 \quad \mathcal{E} \quad S_{\{C,D\}} = 0 \quad \mathcal{E} \quad S_{\{D,E\}} = 0.$$

Sada su u čvoru E vrijednosti sila nepoznate u tri priključena štapa. Treba uočiti da je pravac djelovanja sile $\vec{P}_y$ u ravnini koju razapinju osi štapova $\{A,E\}$ i $\{C,E\}$ (pogledajte „dokaz” na stranici 2!) i da os štapa $\{B,E\}$ izlazi nje. Slijedi da je

$$S_{\{B,E\}} = 0,$$

a kako se pravac djelovanja sile $\vec{P}_y$ ne poklapa ni s osi $\{A,E\}$ ni s osi $\{C,E\}$,

$$S_{\{A,E\}} \neq 0 \quad \& \quad S_{\{C,E\}} \neq 0.$$

Osi triju u čvor B priključenih štapova s nepoznatim vrijednostima sila nisu u jednoj ravnini, a kako je $S_{\{B,E\}} = 0$ i kako se pravac b_z i os $\{B,E\}$ poklapaju, bit će

$$B_z = 0,$$

a potom, budući da se $\{A,B\}$ i $\{B,C\}$ ne poklapaju, i

$$S_{\{A,B\}} = 0 \quad \& \quad S_{\{B,C\}} = 0.$$

Znamo da su $S_{\{B,C\}} = 0$, $S_{\{C,D\}} = 0$ i $S_{\{C,E\}} \neq 0$, pa u čvoru C preostaju još tri štapa s nepoznatim vrijednostima. Njihove osi nisu u jednoj ravnini, niti je os $\{C,E\}$ u nekoj od triju ravnina koje razapinju parovi tih osi²), tako da su

$$C_x \neq 0 \quad \& \quad C_z \neq 0 \quad \& \quad S_{\{A,C\}} \neq 0.$$

I na kraju čvor A . Znamo da su $S_{\{A,B\}} = 0$ i $S_{\{A,D\}} = 0$, a $S_{\{A,C\}} \neq 0$ i $S_{\{A,E\}} \neq 0$. Os štapa $\{A,C\}$ poklapa se s osi y , a os je štapa $\{A,E\}$ u ravnini xz , pa pravac djelovanja rezultante sila u tim štapovima nije ni u jednoj od triju koordinatnih ravnina³, pa su

$$A_x \neq 0 \quad \& \quad A_y \neq 0 \quad \& \quad A_z \neq 0.$$

Slika je, naravno, ponovno slika 2.

Način treći, uz zor i uvid

Lijep je kao [...] slučajan susret šivaćega stroja i kišobrana na operacijskom stolu.

Comte de Lautréamont: *Maldororova pjevanja*

Počnimo s očitim: kako na čvor D ne djeluje vanjska sila i kako osi triju štapova u taj čvor spojenih štapova nisu u jednoj ravnini,

$$S_{\{A,D\}} = 0 \quad \& \quad S_{\{C,D\}} = 0 \quad \& \quad S_{\{D,E\}} = 0.$$

Pravac je djelovanja reakcije $\vec{A}_y$ os y , pravci djelovanja četiriju reakcija tu os sijeku, a neizmjereno je daleko siječe i pravac djelovanja sile $\vec{P}_y$. Ne siječe je jedino pravac b_z , pa iz jednadžbe ravnoteže momenata oko nje slijedi

$$B_z = 0.$$

² Još „posebniji” slučaj, da se os $\{C,E\}$ poklapa s jednom od tih triju osi obuhvaćen je ovim slučajem: os $\{C,E\}$ tada je u obje koje razapete njome i jednom od preostale dvije osi.

³ Osi triju štapova s nepoznatim vrijednostima sila poklapaju se s koordinatnim osima, pa su ravnine koje razapinju parovi tih osi koordinatne ravnine.

Budući da osi preostalih triju štapova spojenih u čvor B nisu u jednoj ravnini,

$$S_{\{A,B\}} = 0 \quad \mathcal{E} \quad S_{\{B,C\}} = 0 \quad \mathcal{E} \quad S_{\{B,E\}} = 0.$$

Lako je vidjeti da je čvor E sa silom $\vec{P}_y$ i dva štapa s nepoznatim vrijednostima sila „ravninski” (ako Vam nije lako, pročitajte ponovno jednorečenični „dokaz” na stranici 2), pa se sila $\vec{P}_y$ može uravnotežiti silama u ta dva štapa, te su

$$S_{\{A,E\}} \neq 0 \quad \mathcal{E} \quad S_{\{C,E\}} \neq 0.$$

Čvorovi C i $A - C$, pa $A -$ mogu se sada riješiti kao u načinu drugom. No, može se prvo, u dva koraka, riješiti i čvor A . Korak prvi: pravci djelovanja sile $\vec{P}_y$ i reakcije $\vec{A}_y$ jedini su pravci djelovanja sila vanjskih sila koji nisu okomiti na os y , pa je

$$A_y \neq 0.$$

Korak drugi: rezultantu reakcije $\vec{A}_y$ i sile u štapu $\{A,E\}$ uravnotežujemo silama na pravcima a_x i a_z i u štapu $\{A,C\}$ (znamo da su $S_{\{A,B\}} = 0$ i $S_{\{A,C\}} = 0$). Pravci a_x i a_z i os $\{A,C\}$ poklapaju se s koordinatnim osima x , z i y , a pravac djelovanja rezultanta reakcije $\vec{A}_y$ i sile u štapu $\{A,E\}$ nije ni u jednoj koordinatnoj ravnini (što obuhvaća i to da nije niti na jednoj koordinatnoj osi), pa su

$$A_x \neq 0 \quad \mathcal{E} \quad A_z \neq 0 \quad \mathcal{E} \quad S_{\{A,C\}} \neq 0.$$

Preostaje čvor C . U njemu su sile nepoznatih vrijednosti sile na pravcima c_x i c_z . Rezultanta poznatih sila u štapovima $\{A,C\}$ i $\{C,E\}$ ($S_{\{B,C\}} = 0$ i $S_{\{C,D\}} = 0$) ne djeluje ni na pravcu c_x ni na pravcu c_z , pa su

$$C_x \neq 0 \quad \mathcal{E} \quad C_z \neq 0.$$

(Trebalo bi izračunati vrijednosti sila, a ne samo utvrditi njihovo (ne)postojanje, kao provjera dotadašnjih proračuna može poslužiti uvjet da pravac djelovanja rezultante sila u štapovima $\{A,C\}$ i $\{C,E\}$ mora ležati u ravnini koju razapinju pravci c_x i c_z .)

⋮

A slika? Dakako, i po treći put slika [2](#).