

GS 1. — 1. srpnja 2024.

Zadatak 3.

Grafičkim postupkom u projekcijama (u tlocrtu i nacrtu) uravnotežite silu $\vec{F}$ silama u štapovima $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ i $\{3, 4\}$ prostorne rešetke!

ležajevi: 1 (1, 1, 0)

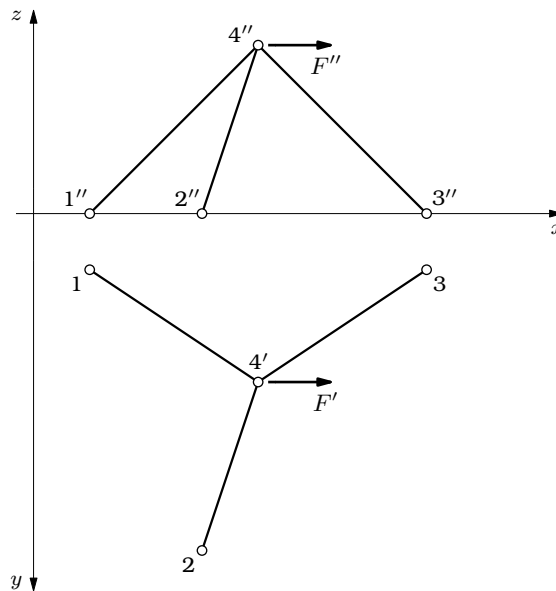
2 (3, 6, 0)

3 (7, 1, 0)

„slobodni” čvor: 4 (4, 3, 3)

$$\vec{F} = F \vec{i}$$

$$F = 75 \text{ kN}$$



Alici je već dosadilo da sjedi uz svoju sestru na obronku i ne radi ništa; jednom ili dvaput virnula je u knjigu što ju je čitala sestra, ali u knjizi nije bilo ni slika ni razgovora. „A kakva mi je i to knjiga”, pomisli Alica, „bez slika ili razgovora?”

Lewis Carroll: *Alica u Zemlji čudesa*

Na predavanju o statički određenim prostornim rešetkastim nosačima¹ pokazano je da je grafički postupak uravnoteživanja zadane sile silama na tri zadana pravca koji prolaze točkom na pravcu djelovanja zadane sile, ali ne leže u jednoj ravnini, dualan Culmannovom postupku kojim se zadana sila $\vec{F}$ uravnotežuje trima silama na zadanim pravcima djelovanja koji ne prolaze jednom točkom, ali sa zadanom silom leže u istoj ravnini.

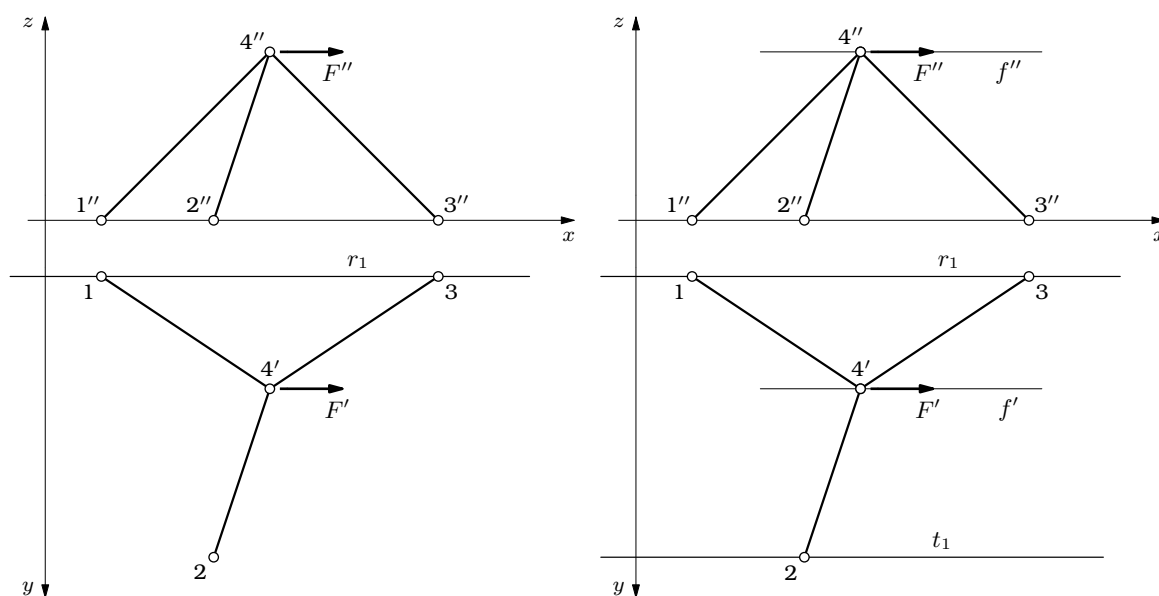
Četiri sile uravnotežujemo primjenom uvjeta ravnoteže dviju sila: rezultanta dviju sila mora djelovati na pravcu djelovanja rezultante drugih dviju sila, pri čemu rezultante moraju imati jednake intenzitete i suprotan smisao djelovanja.

¹ Prezentacija predavanja s popratnim tekstom dostupna je na mrežnoj stranici predmeta *Bilješke i skice s predavanja* (<http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/>; izravna je poveznica na prezentaciju <http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/pdn/p-pr.pdf>). Na stranicama 15 do 33 primjer je rješavanja sličnoga zadatka aksonometrijskim i Mongeovim postupkom projiciranja.

Ako se pravci djelovanja dviju sila sijeku (i ako sile ne tvore spreg), pravac djelovanja njihove rezultante prolazi sjecištem tih pravaca i leži u ravnini koju određuju.²

U Culmannovom postupku pravac djelovanja rezultanata nalazimo kao spojnicu sjecišta parova pravaca. U dualnom postupku u prostoru taj ćemo pravac odrediti kao presječnicu ravnina koje parovi pravaca određuju. Kako se u čvoru 4 sastaju štapovi i kako u njemu djeluje sila $\vec{F}$, u ravninama je obiju rezultanata, pa je na presječnici tih ravnina. Za nalaženje presječnice treba nam još (samo) jedna točka.

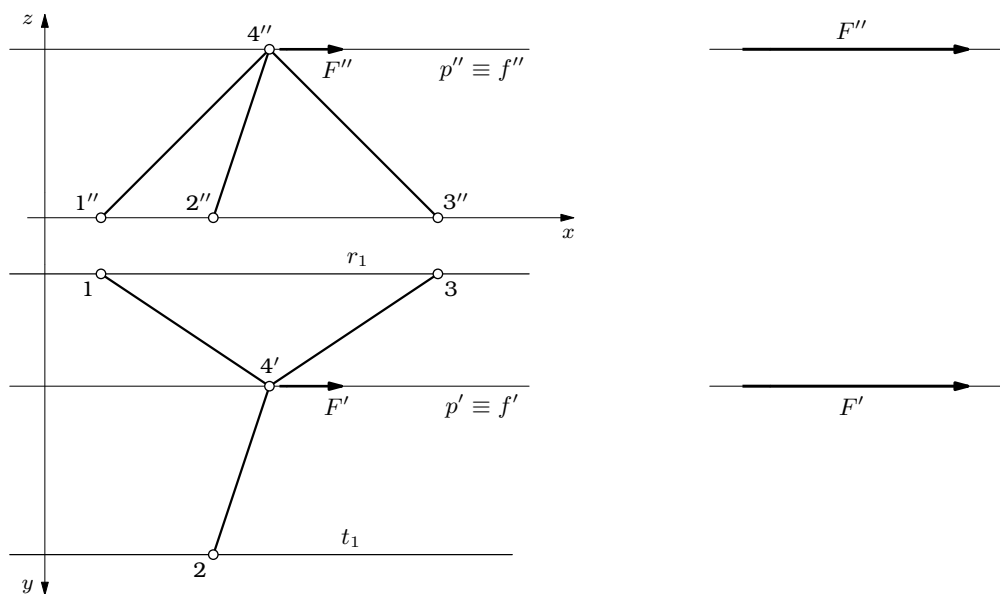
U Mongeovu su postupku ravnine određene tragovima. Prvi su tragovi ravnina u tlocrtnoj ravnini; budući da su prvi tragovi ravnina rezultanata u jednoj ravnini, sijeku se u traženoj drugoj točki. Naravno, isto vrijedi za nacrtanu ravninu i druge tragove, ali su ležajevi 1, 2 i 3 u tlocrtnoj ravnini (u ravnini određenoj jednadžbom $z = 0$), pa su te točke prva probodišta pravaca $s_{1,4}$, $s_{2,4}$ i $s_{3,4}$ koji su osi štapova $\{1,4\}$, $\{2,4\}$ i $\{3,4\}$, a time i pravci djelovanja sila $\vec{s}_{1,4}$, $\vec{s}_{2,4}$ i $\vec{s}_{3,4}$. Prvi trag r_1 ravnine ϱ , koja je određena, recimo, pravcima $s_{1,4}$ i $s_{3,4}$, prolazi stoga točkama 1 i 3 (lijevi crtež na slici 1.). Kako je pravac f na kojem djeluje sila $\vec{F}$ usporedan s osi x , a stoga i s tlocrtnom ravninom, njegova je neizmjereno daleka točka njegovo prvo probodište, pa prvi trag t_1 ravnine τ određene pravcima f i $s_{2,4}$, prolazi prvim probodištem 2 pravca $s_{2,4}$ usporedno s tlocrtom f' pravca f (desni crtež na slici 1.).



Slika 1.

Tragovi r_1 i t_1 su usporedni, pa se sijeku u zajedničkoj neizmjereno dalekoj točki. Tom točkom prolazi i pravac f . Budući da prolazi i točkom 4, pravac f je tražena presječnica p ravnina ϱ i τ (lijevi dio slike 2.).

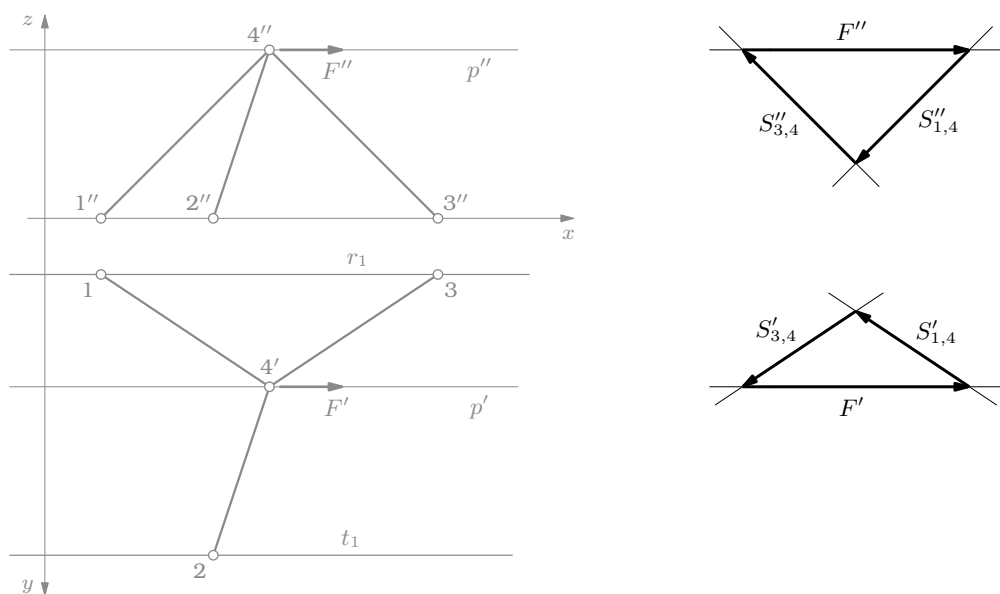
² Iz *Mehanike 1.* bi trebalo biti poznato da zbroj dviju sila koje djeluju na mimosmjernim pravcima nije jedna sila, nego dvije sile na mimosmjernim pravcima (od kojih jedan možemo odabrati) koje se mogu (u odnosu na odabranu točku) zamijeniti rezultirajućim djelovanjem sastavljenim od rezultirajuće sile i rezultirajućega momenta.



Slika 2.

Nakon što smo pronašli pravac djelovanja rezultanta, nastaviti možemo u tlocrtu i nacrtu poligona sila (desni dio slike 2.). Pravac p pravac je djelovanja rezultante sila $\vec{F}$ i $\vec{S}_{2,4}$. No, kako je p i pravac djelovanja sile $\vec{F}$, bit će $\vec{S}_{2,4} = 0$ (još uvijek desni dio slike 2.).

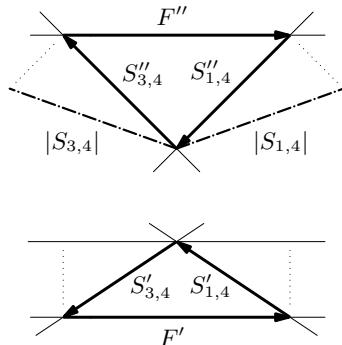
Pravac p je i pravac djelovanja rezultante sila $\vec{S}_{1,4}$ i $\vec{S}_{3,4}$. Te će dvije sile uravnotežiti silu $\vec{F}$ ako njihova rezultanta osim istoga pravca djelovanja ima i isti intenzitet kao sila $\vec{F}$, a smisao djelovanja suprotan od nje. Uravnoteženje sile $\vec{F}$ silama $\vec{S}_{1,4}$ i $\vec{S}_{3,4}$ svodi se na zatvaranje tlocrta i nacrta poligona sila (desni dio slike 3.). Sila $\vec{S}_{1,4}$ je vlačna, a sila $\vec{S}_{3,4}$ tlačna.



Slika 3.

„Gruba” provjera: pravci f , $s_{1,4}$ i $s_{3,4}$ u jednoj su ravnini; pravac $s_{2,4}$ „izlazi” iz nje. Ravnoteža je moguća (ako i) samo ako na pravcu $s_{2,4}$ sile nema [zašto?].

U zadatku se ne traži, ali potpunosti radi, odredit ćemo još i intenzitete sila $\vec{S}_{1,4}$ i $\vec{S}_{3,4}$. Uz odabrano mjerilo sila, njihovi su intenziteti jednaki pravim duljinama (orijentiranih) dužina kojima su sile prikazane. Prave duljine dužina određujemo prevajljanjem u ravninu projekcija, recimo u nacrtu ravninu (slika 4.).



Slika 4.

Mjerilo sila je $1\text{ cm} :: 25\text{ kN}$. Duljine su prevajljenih dužina jednake. Očitana je duljina $23,5\text{ mm}$, pa su $|S_{1,4}| = |S_{3,4}| = 58,75\text{ kN}$.

Zadatak ćemo riješiti još jednom, uravnotežujući rezultantu sila $\vec{F}$ i $\vec{S}_{3,4}$ i rezultantu sila $\vec{S}_{1,4}$ i $\vec{S}_{2,4}$.

Prvi trag r_1 ravnine ϱ , određene pravcima $s_{1,4}$ i $s_{2,4}$ prolazi točkama **1** i **2**, a prvi trag t_1 ravnine τ određene pravcima f i $s_{3,4}$ prolazi točkom **3** usporedno s pravcem f . Kako je točka **1** i na tragu t_1 , sjecište je tragova r_1 i t_1 , pa se presječna p ravnina ϱ i τ poklapa s pravcem $s_{1,4}$ (lijevi dio slike 5.).

Sada možemo u poligonu sila sklopiti trokut sila kojem su stranice sile $\vec{F}$ i $\vec{S}_{3,4}$ i njihova rezultanta (ili pravac njezina djelovanja) (tlocrt i nacrt na desnom dijelu slike 5.).

Rezultantu sila $\vec{F}$ i $\vec{S}_{3,4}$ uravnotežuje rezultanta sila $\vec{S}_{1,4}$ i $\vec{S}_{2,4}$, no kako je $p \equiv s_{1,4}$, bit će $\vec{S}_{2,4} = 0$ (desno dio slike 6.).

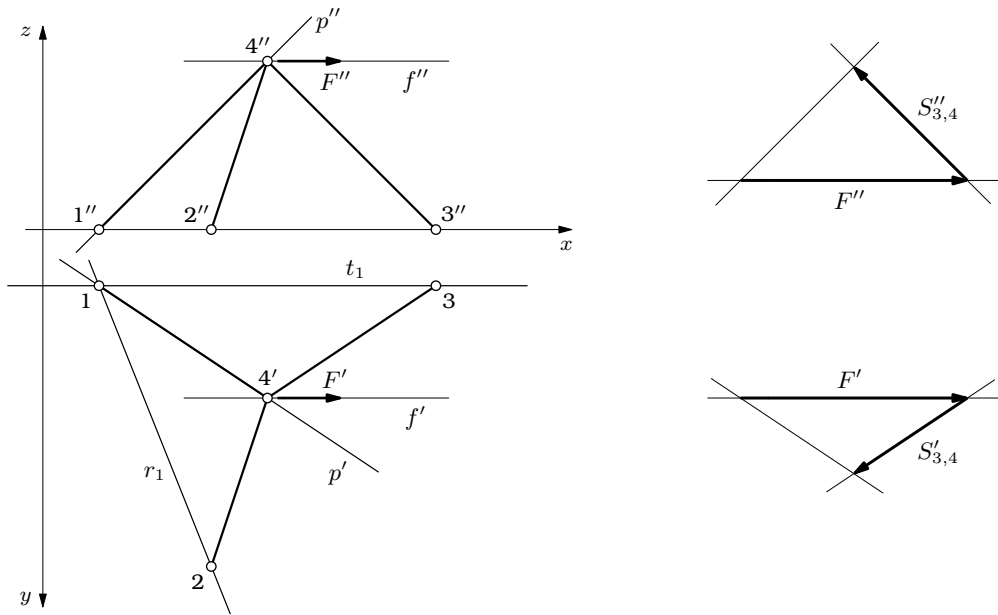
I na kraju, i opet potpunosti radi, iako se u zadatku ne traži, provjerit ćemo dobiveno analitičkim postupkom.

Jedinični su vektori na pravcima $s_{1,4}$, $s_{2,4}$ i $s_{3,4}$, orijentirani od točke **4** prema točkama **1**, **2** i **3**:

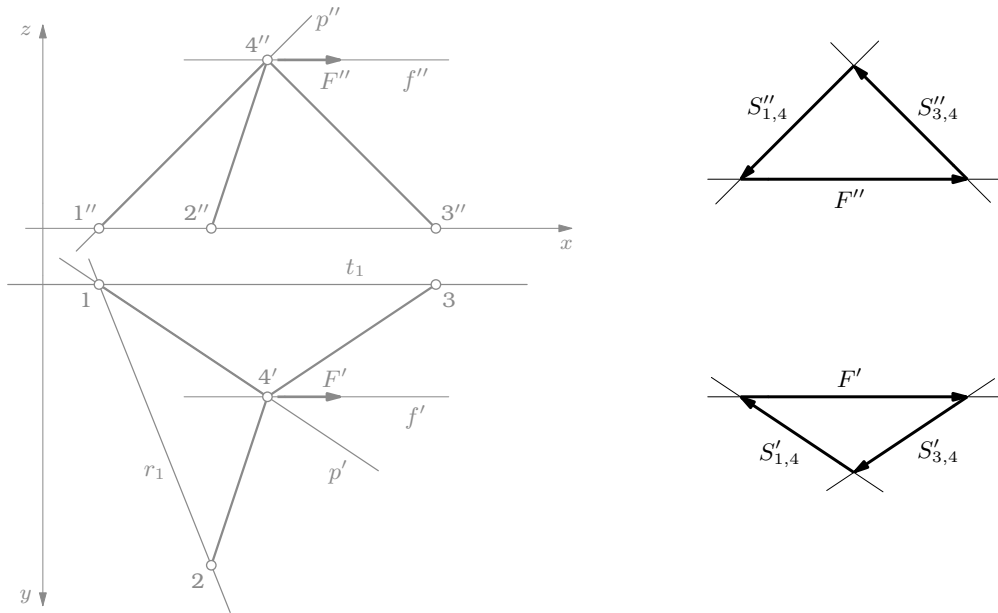
$$\vec{e}_{1,4} = \frac{\vec{s}_{1,4}}{|\vec{s}_{1,4}|} = \frac{1-4}{|1-4|} = \frac{(1, 1, 0) - (4, 3, 3)}{\sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2 + (0-3)^2}} = \frac{1}{4,690\,42} (-3, -2, -3),$$

$$\vec{e}_{2,4} = \frac{\vec{s}_{2,4}}{|\vec{s}_{2,4}|} = \frac{2-4}{|2-4|} = \frac{(3, 6, 0) - (4, 3, 3)}{\sqrt{(3-4)^2 + (6-3)^2 + (0-3)^2}} = \frac{1}{4,358\,90} (-1, 3, -3),$$

$$\vec{e}_{3,4} = \frac{\vec{s}_{3,4}}{|\vec{s}_{3,4}|} = \frac{3-4}{|3-4|} = \frac{(7, 1, 0) - (4, 3, 3)}{\sqrt{(7-4)^2 + (1-3)^2 + (0-3)^2}} = \frac{1}{4,690\,42} (3, -2, -3).$$



Slika 5.



Slika 6.

Označimo li vrijednosti sila u štapovima sa $S_{1,4}$, $S_{2,4}$ i $S_{3,4}$, sustav je jednadžbu ravnoteže projekcija sila na koordinatne osi

$$-0,639\,602\,S_{1,4} - 0,229\,416\,S_{2,4} + 0,639\,602\,S_{3,4} + 75 = 0,$$

$$-0,426\,401\,S_{1,4} + 0,688\,247\,S_{2,4} - 0,426\,401\,S_{3,4} = 0,$$

$$-0,639\,602\,S_{1,4} - 0,688\,247\,S_{2,4} - 0,639\,602\,S_{3,4} = 0.$$

Njegova su rješenja

$$S_{1,4} = 58,630\,2, \quad S_{2,4} = 0 \quad \& \quad S_{3,4} = -58,630\,2,$$

pa su sile

$$\vec{S}_{1,4} = S_{1,4} \vec{e}_{1,4} = (-37,50; -25,0; -37,50),$$

$$\vec{S}_{2,4} = S_{2,4} \vec{e}_{2,4} = (0, 0, 0),$$

$$\vec{S}_{3,4} = S_{3,4} \vec{e}_{3,4} = (-37,50; 25,0; 37,50).$$

Domaća zadaća prva [trivijalna]. Riješite zadatak uravnotežujući rezultante sila $\vec{F}$ i $\vec{S}_{1,4}$ te $\vec{S}_{2,4}$ i $\vec{S}_{3,4}$!

Domaća zadaća druga [ružnija]. Što bi se u postupku rješavanja promijenilo da su koordinate čvora **2** $(3, 6, -1)$? [Još malo³ ružnija]. A što bi se promijenilo da su koordinate čvora **3** $(7, 1, 1)$? Pokušajte riješiti oba zadatka!

Dodatak [odgovor na pitanje „zašto?” s dna stranice 3]. Dokaz tvrdnje: ako na točku djeluju četiri sile i ako su pravci djelovanja triju od njih u jednoj ravnini, a pravac djelovanja četvrte nije, onda ta četvrta sila iščezava.

Jedina sila koja će postojati projiciramo li sile na pravac okomit na ravninu triju sila bit će projekcija sile na četvrtom pravcu. Ravnoteža je projekcija moguća samo ako te projekcije, a time ni te sile, nema.

³ ... nimalo za one koji su na *Deskriptivnoj geometriji* naučili da su usporedni pravci tek poseban slučaj pravaca koji se sijeku.